УДК 62.50:658.21

Т. М. Боровська, к. т. н., доц.;
І. С. Колесник;
В. А. Северілов, к. т. н., доц.

ОПТИМІЗАЦІЯ СТРАТЕГІЙ РОЗВИТКУ РОЗПОДІЛЕНИХ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ НА БАЗІ АГРЕГУВАННЯ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

Запропоновано: а) нову постановку варіаційної задачі оптимального розвитку виробничої системи з урахуванням використання зовнішніх ресурсів — без збільшення числа змінних управління, б) метод агрегування функцій розвитку елементів в оптимальну функцію розвитку виробничої системи. Це дає можливість зводити задачі високої розмірності до базової — одновимірної. Розроблені програми оптимізації і моделювання процесів розвитку дозволяють побудувати систему для технологічного прогнозування в інноваційній діяльності.

Вступ

Високі технології, високі темпи розвитку виробничих систем, короткі життєві цикли виробів і технологій вимагають інших підходів в розробці технічних систем. Ці підходи можна назвати екологічними: біологічні об'єкти, екологічні системи звичайно розглядаються в розвитку, в процесі еволюції, з урахуванням кінцевих термінів функціонування біологічних об'єктів. У виробничій системі, що розвивається, виникає задача розподілу власних і зовнішніх ресурсів в просторі — між елементами системи, і в часі. Природно оптимізувати не поточний стан, а процес розвитку в цілому за інтегральним критерієм — «накопиченим прибутком». В формальному аспекті це варіаційна задача розподілу, ретельно досліджена Белманом [1], а в прикладному — це задача оптимального управління розвитком технічної системи. Слід підкреслити, що це не є задача економіки — тут домінують чисто технічні і технологічні аспекти. Однак, після того як оптимальне розв'язання знайдено і досліджено, то на цій основі можна побудувати систему підтримки рішень для фінансово-економічних задач, прив'язаних до процесу розвитку технічної системи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Задача оптимального управління розвитком досить повно і на фундаментальному рівні розглянута Р. Белманом [1, 2] як задача розподілу. Белман отримав розв'язання для випадку лінійних функцій розвитку виробничої системи. Для довільних функцій розвитку він визначив структуру оптимального управління розподілом ресурсів, що складається з трьох інтервалів: «все в розвиток», «Ейлерова ділянка» і «все в накопичення». З невідомих причин у сучасній літературі ці фундаментальні конкретні й ефективні результати не отримали подальшого розвитку. Наприклад, в [7] з цього класу задач розглянуте лише «золоте правило накопичення». Список перспективних і фундаментальних методів розв'язань, що заслуговують на подальший розвиток можна продовжити: в роботі 1974 року запропоновано підхід до оптимізації на базі агрегування узагальнених виробничих функцій для специфічних систем — авіаційно-ракетних [3], в [9] подано обґрунтовану програмну реалізацію методу оптимального агрегування.

Ефективне використання можливостей сучасних програмних засобів для моделювання та оптимізації дозволяє проводити досить широкі дослідження задач оптимального управління і розробляти програми для прогнозування й планування. В [4, 5] за рахунок використання можливостей математичного пакету фундаментальні задачі оптимального розподілу зроблені доступними для студентів — виконано «рімейки» класичних задач і розроблено програми для моделювання й оптимізації варіаційних задач розподілу з довільними цільовими функціями та обмеженнями.

Постановка проблеми

В [6] розглянуто побудову програмної системи для оптимізації та моделювання процесів розвитку розподілених, багатопродуктових виробничих систем на базі використання методу принципу максимуму. Для знаходження максимуму функції Гамільтона там використано нескладні методи на базі перебору — для неопуклих, негладких обмежень розв'язок є розривною функцією величини обмеження за ресурсом. Поширені методи пошуку екстремуму в такому випадку є непрацездатними. Однак, методи на базі перебору стають занадто повільними зі збільшенням розмірності системи.

Мета даної роботи — розробка методу оптимізації стратегії розвитку розподіленої виробничої системи, що суттєво зменшував би обсяг обчислень.

Постановка задачі. Маємо децентралізовану систему, де виробляються N видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють $x1(t), x2(t),..., xN(t)$ (одиниць вимірювання продукції за місяць, квартал, рік). Рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt}x(t)_i = fin\left(y(t)_i, i\right) = fin\left[xs(t)\cdot(\alpha u)_i, i\right], \tag{1}$$

де $fin(y(t)_i, i)$ — **функція розвитку** для i-го виробництва, що характеризує ефективність перетворення ресурсу у виробничі потужності і належить до класу нестрого монотонно зростаючих функцій; $xs(t) = \sum_j x(t)_j$ — сумарне виробництво в момент t; $0 \le \alpha \le 1$ — управління, що визначає розподіл ресурсу між розвитком і накопиченням; $0 \le u(t)_i \le 1$ — управління, що визначають частку ресурсів, що виділяється в поточний момент для розширення виробничих потужностей по i-му продукту. Для цих управлінь виконується умова нормування: $\sum_j u(t)_j = 1$. Вибрані нами управління безрозмірні. Розмірні управління будуть такими:

$$y(t)_i := xs(t)\alpha u_i; \quad z(t) := xs(t)(1-\alpha), \tag{2}$$

де $y(t)_i$ — об'єм ресурсів на розвиток i-го виробництва, $z(t)$ — об'єм ресурсів, що йде в накопичення.

Потрібно визначити оптимальну стратегію розвитку, що максимізує сумарний накопичений випуск за певний плановий період T

$$JN = \int_0^T xs(t)\cdot unak(t)\,dt. \tag{3}$$

Інтерпретація параметра T — момент зміни технології і конструкції виробу i, відповідно засобів виробництва. Формально маємо варіаційну задачу з N змінними управління. Ми вибираємо форму задачі з безрозмірними змінними управління, що дає можливість оптимального агрегування функцій розвитку елементів виробничої системи [9]. Під агрегуванням маємо заміну багатопродуктової виробничої системи еквівалентною по віддачі інвестицій однопродуктовою. Виходячи з можливості агрегування розглянемо альтернативні підходи до розв'язання варіаційної задачі на прикладі одновимірної (однопродуктової) виробничої системи. Очевидно в такій задачі маємо тільки одну змінну — пропорцію розподілу між розвитком і накопиченням.

Точний розв'язок задачі оптимізації розвитку

В [8] наведено точний розв'язок оптимізаційної задачі методом принципу максимуму. Головна перевага принципу максимуму в тому що він працює у разі довільних обмежень управління. Власне процедура отримання розв'язку є рутинною — записуємо задачу в канонічному вигляді — додаємо ще одну змінну стану — критерій і відповідне диференційне рівняння

$$\frac{d}{dt}x(t) = fin\left(x(t)\cdot u(t)\right) = fx; \quad \frac{d}{dt}J1(t) = x(t)\cdot\left(1-u(t)\right) = fJ. \tag{4}$$

З урахуванням обмеження на управління $0 \le u(t) \le 1$, записуємо вираз для функції Гамільтона

$$H(x,u) = \sum_{i=0}^{N} \psi_i f_i = \psi J\cdot fJ + \psi x\cdot fx, \tag{5}$$

де fJ, fx — праві частини рівнянь (4). Підставляємо їх у (5)

$$H(x,u) = \psi J\left[x(t)\left(1-u(t)\right)\right] + \psi x fin\left(x(t)u(t)\right). \tag{6}$$

Записуємо рівняння для визначення спряжених функцій

$$\frac{d}{dt}\psi J(t) = -\frac{\partial}{\partial J}H(x,u); \quad \frac{d}{dt}\psi x(t) = -\frac{\partial}{\partial x}H(x,u). \tag{7}$$

Розв'язуємо отримані диференційні рівняння. Перше — елементарне, а друге може бути розв'язане тільки числовими методами. Сучасні математичні пакети дозволяють визначити розв'язок як функцію відповідних змінних і параметрів: $\psi x(\alpha, x, fin(.), t)$.

Записуємо точний вираз для функції Гамільтона

$$H(x,\alpha) = x(t)\left(1-\alpha(t)\right) + fin\left(x(t)\alpha(t)\right)\psi x\left(\alpha, x, fin(.), t\right). \tag{8}$$

Наближене розв'язання задачі оптимізації процесу розвитку

На підставі чисто логічних міркувань можна сконструювати функцію-індикатор $Hi(x,\alpha)$, яка є оцінкою залежності прирощення критерию $J1$ від поточного управління $\alpha(t)$ та поточного стану $x(t)$ виробничих потужностей. Частка ресурсу виділена в накопичення дасть прирощення критерію $S1 = x(t)(1-\alpha)$. Прирощення продукції, що можна отримати до кінця процесу буде

$$S2 = \Delta x(T-t) = fin\left(x(t)\alpha(t)\right)\cdot(T-t).$$

Це додатковий ресурс, який можна на подальших кроках використати для накопичення і розвитку. Адекватна точності даних оцінка прирощення критерію буде $S2$. Тоді маємо

$$Hi(x,\alpha) = S1 + S2 = x(t)\left(1-\alpha(t)\right) + fin\left(x(t)\alpha(t)\right)\cdot(T-t). \tag{9}$$

Порівняємо точний (8) і наближений (9) вирази для функції Гамільтона. Вони відрізняються тільки останніми множниками. В першому випадку це нелінійна спадна функція часу, в другому — лінійна. Можна було прийти до цього наближення і формалізованим шляхом — отримати точний вираз для $\varphi x(t)$, розкласти цю функцію в ряд і взяти перше лінійне наближення. Наближення (9) збігається з отриманим Белманом аналітичним розв'язком задачі для випадку лінійної функції розвитку.

Проведемо кількісне порівняння функцій $H(x_k, u_k)$ та $Hi(x_k, u_k)$. На рис. 1 подано дві проекції тривимірного графіка, де побудовано еволюцію в часі функції Гамільтона — точної і наближеної. На графіку 1б побудовано максимуми цієї функції — вони значно відрізняються, однак положення цих максимумів — значення оптимального управління є досить близькими і однаковими за структурою: спочатку «все в розвиток», потім гладкі — «Ейлерові», за класифікацією Белмана, ділянки, а в кінці процесу — «все в накопичення».

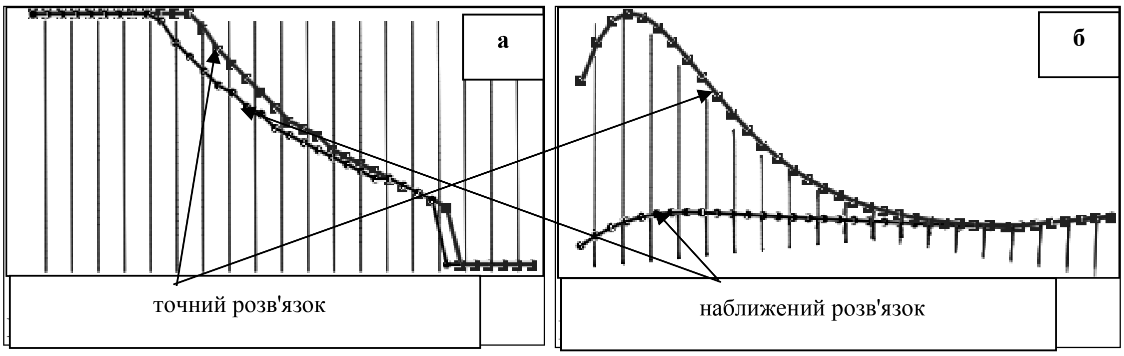

Рис. 1. Залежність максимуму функції Гамільтона від часу процесу:

а) оптимальні управління, б) величина максимуму функції

Для нас функція Гамільтона є лише засобом отримання оптимального розв'язку і нам достатньо того, що наближена функція дає досить точне наближення оптимального управління — стратегії розвитку.

Узагальнення задачі оптимізації розвитку

Введемо в модель можливість тимчасового використання зовнішніх ресурсів. Високі технології, глобалізація виробництва вимагають високих темпів розвитку виробничих систем. Для потенційно ефективного виробництва критичне значення має швидкість його розвитку від лабораторного експерименту до масового виробництва. В сучасних організаціях паралельно виконуються десятки проектів. Ці проекти звичайно знаходяться на різних стадіях розвитку життєвого циклу. В таких умовах є можливість залучати тимчасово ресурси (кадри, обладнання, фінанси) одного виробництва для розвитку іншого. Такі процеси тимчасового залучення зовнішніх ресурсів призведуть до тривіальних обчислювальних і нереалістичних техніко-економічних результатів, якщо не ввести правила повернення тимчасово залучених ресурсів.

Загальновідома фінансова категорія «кредити» є просто окремим випадком процесів такого класу. Дійсним першоджерелом і прикладом такого розвитку є біологічні системи. Будемо замість терміну «зовнішні залучені ресурси» вживати короткий і загальнозрозумілий — «кредити». Ще одна відмінність «кредитів» задачі розвитку від фінансових кредитів — «кредити» повертаються звичайно іншим елементам.

Введемо додаткову змінну управління — темп «кредитів» $xkr\ (t)$, тоді доступний обсяг поточних ресурсів буде $xs\ (t) = x\ (t) + xkr\ (t)$. Візьмемо, для прикладу, такий механізм повернення кредитів: кредити отримані в певний період часу повертаються з цього моменту і до кінця процесу рівними частками і з урахуванням процентів. Цій словесній формулі відповідає такий вираз для функції Гамільтона

$$Hki(xs, xkr, \alpha) = xs(1-\alpha) + fin(xs\cdot\alpha)(Tp-t) - xkr\left[1 + pr(Tr-t)\right].$$

Отримали задачу з двома змінними управління α та xkr. Задачі з такою постановкою розглянуті в [3, 4, 7, 8]. Така постановка задачі природна для економіста, але нераціональна. В цій задачі можна не вводити додаткову змінну, а тільки розширити ресурсні обмеження. Знімемо верхнє обмеження для змінної управління α, будемо вважати доступним для розподілу те, що на поточний момент накопичено (2): $JN(t) = \int_0^t xs(t)\cdot unak(t)\,dt.$ Будемо вважати цей ресурс безкоштовним і таким, що не треба обов'язково повертати (внутрішня позичка). Тоді верхня границя допустимого управління зсувається до величини:

$$\alpha_{dop} = \frac{x(t) + JN(t)}{x(t)}. \tag{10}$$

Можна брати більші значення управління, але за це треба «платити». Якщо управління $\alpha(t) > \alpha_{dop}$, то ресурс в розмірі (зовнішня позичка)

$$zp(t) = \left(\alpha(t) - \alpha_{dop}\right)x(t)\left[\left(\alpha(t) - \alpha_{dop}\right) > 0\right] \tag{11}$$

повинен бути повернутим до кінця процесу з відповідними процентами. Останній множник — логічна умова (булєва змінна), що виділяє тільки діапазон зовнішніх позичок. Перекладаємо ці міркування в робочий вираз для функції Гамільтона

$$Hka(x, \alpha) = xs(1-\alpha) + fin(xs\cdot\alpha)(Tp-t) - zp(t)\left[1 + pr(Tp-t)\right] \tag{12}$$

Таким чином отримали розширену задачу без введення нових змінних управління.

Агрегування функцій розвитку. Запишемо функцію Гамільтона для випадку багатотовимірної виробничої системи

$$Hka(x, \alpha, u) = xs(1-\alpha) + \left(\sum_{j=1}^{N} fin\left(xs\alpha u_j\right)_j\right)(Tp-t) + zp(t)\left[1 + pr(Tp-t)\right]. \tag{13}$$

У (13) вираз у великих дужках визначає сумарне поточне прирощення темпу виробництва. Незалежно від того, якою буде α — частка ресурсу для розвитку, розподіл ресурсу між окремими виробництвами u_j, $j = 1\ldots N$ повинен бути оптимальним — таким, що максимізує сумарне поточне прирощення темпу виробництва. Запишемо цю локальну задачу оптимізації в стандартному вигляді. Введемо означення: $R = xs\alpha$, $r_i = Ru_i$, $i = 1\ldots N$. Задано цільову функцію N змінних $F(r_1, r_2, .., r_N) = \sum_{j=1}^{N} fin(r_j)_j$, обмеження по ресурсу $G(r_1, r_2, .., r_N) = R - \sum_j r_j = 0$ та обмеження на управління $0 \le u_j \le 1$.

Треба знайти розподіл $(r_1, r_2, .., r_N)$, що дає максимум цільової функції та задовольняє обмеження. Будемо шукати не один розв'язок для конкретного значення обмеження R, а функціональну залежність Dop (R) — функцію оптимального розподілу ресурсу. Деякий компонент вектор-функції $Dop(R)_j$ визначає залежність оптимального для і-го елемента системи обсягу ресурсу від загального обмеження по ресурсу. Визначимо оптимальну *функцію розвитку*

$$Fop(R) := \sum_{j=1}^{N} fin\Big(Dop(R)_j\Big)_j . \tag{14}$$

Числовими методами оптимізації завжди можна обчислити функції $Fop(R)$ та *Dop* (*R*). Підставимо (14) у (13):

$$Hka(x,\alpha) = xs(1-\alpha) + Fop(xs\alpha)(Tp - t) + zp(t)\big[1 + pr(Tp - t)\big]. \tag{15}$$

Чи отримуємо ми якісь переваги, від того, що попередньо обчислюємо функції *Fop* (*R*) та *Dop* (*R*)? Припустимо, що для задовільної точності треба обчислити ці функції в *K*1 точках діапазону визначення функцій розвитку. Тобто нам необхідно *K*1 раз розв'язати задачу знаходження екстремуму функції (*N* — 1) змінної. Екстремум функції Гамільтона (*N* змінних) знаходиться для $K2 = Tp \div \Delta T$ моментів часу процесу, де T_p — плановий період, ΔT — крок обчислень. При використанні агрегованої форми (14) потрібно *K*2 раз обчислити екстремум функції однієї змінної. Для *K*2 > *K*1 підхід на базі агрегування може мати переваги, однак можливе радикальніше зменшення витрат на обчислення функцій *Fop* (*R*) та *Dop* (*R*).

Застосуємо принцип оптимальності і логіку динамічного програмування до задачі визначення оптимальної виробничої функції. Розглянемо спочатку задачу визначення оптимальної функції розвитку для системи з двох елементів. Введемо множину α-функцій:

$$f\alpha 2(x,\alpha) = f1(x,\alpha) + f2\big[(1-\alpha)x\big], \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Оптимальна функція розвитку буде обвідною системи α-функцій.

$$Fop2(x) := \max_\alpha \big(f\alpha 2(x,\alpha)\big).$$

Задачу визначення оптимальної функції розвитку системи з трьох елементів можна подати так: формуємо нову систему α-функцій

$$f\alpha 3(x,\alpha) = Fop2(\alpha x) + f3\big[(1-\alpha)x\big], \quad 0 \le \alpha \le 1$$

Визначаємо оптимальну функцію розвитку для системи з трьох елементів

$$Fop3(x) := \max_\alpha \big(f\alpha 3(x,\alpha)\big).$$

Очевидно, що цю процедуру можна застосувати для системи з довільним числом елементів. В результаті ми замінюємо задачу пошуку екстремуму функції N змінних, якщо обмежуються сумарні витрати ресурсу послідовністю з (*N* — 1) задач пошуку екстремуму однієї змінної. Логіка агрегування відповідає логіці виведення дискретного методу динамічного програмування [1, 2] з однією різницею — замість адитивного критерію — накопиченого протягом багатокрокового процесу доходу розглядаємо адитивний критерій — сумарний дохід системи з елементами, що працюють паралельно.

Моделювання оптимальних процесів розвитку

Для перевірки теоретичних результатів і проведення обчислювальних експериментів був розроблений комплекс програм оптимізації і моделювання процесів розвитку технічних систем [9]. На цій основі розроблені програми, де задача паралельно розв’язувалась альтернативними методами. Далі подано приклад результатів оптимізації процесу розвитку виробничої системи. Вибрано найгірший для методів оптимізації і актуальний для практики випадок — систему з неопуклими функціями розвитку та критичними значеннями стартового темпу виробництва і «ціни» зовнішніх ресурсів. В цьому критичному стані малі зміни параметрів — на тисячну від номінального значення, викликають суттєві кількісні і структурні — «катастрофічні» зміни оптимального процесу розвитку.

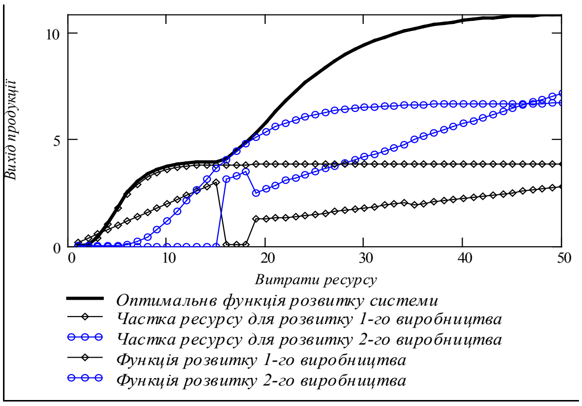

Рис. 2. Оптимальна функція розвитку системи і оптимальний розподіл ресурсу

В разі використання агрегування задача оптимізації розділяється на два етапи — спочатку обчислюється оптимальна функція розвитку та вектор-функція оптимального розподілу, потім визначається оптимальна стратегія розвитку. На рис. 2 подано функції розвитку елементів — «входи» та результат агрегування — оптимальна функція розвитку системи і відповідні функції розподілу ресурсу. Бачимо характерну особливість — розривність оптимальних функцій розподілу.

На рис. 3 подано приклади розрахунку оптимального процесу розвитку для системи з двох елементів із залученням зовнішніх ресурсів за двома методами — без агрегування і з агрегуванням. Перший процес розраховано програмою для оптимізації двовимірних систем, другий процес розраховано програмою оптимізації одновимірних систем. Не наводимо тексти програм оптимізації і моделювання — вони є простими за структурою, а їх прототипи подані повністю в [8, 9].

Бачимо, що структура розв'язань є ідентичною. Різниця в числових значеннях обумовлена використанням малої точності пошуку екстремуму 2—5 % і вибором критичного режиму. Однак дані для задач прогнозування розвитку мають високу невизначеність. Призначення результатів моделювання — якісний аналіз процесу розвитку та ризик-аналіз. Точність моделі і методу повинна відповідати точності даних.

Звернемо увагу на складну структуру оптимального управління (темпу ресурсів у розвиток) — воно має чотири точки розриву. Оптимальна кредитна стратегія теж має два розриви — раптове припинення і потім відновлення використання зовнішніх ресурсів. Бачимо, що агрегована модель системи точно відтворює структуру оптимального управління. Відомі числові й аналітичні методи виявились непрацездатними, оскільки вони базуються на припущеннях про опуклість та існування неперервних похідних для цільових функцій і обмежень. Ще одна особливість оптимальних процесів розвитку з неопуклими функціями розвитку — простий для розуміння і реалізації характер зростання темпу сумарного виробництва — воно приблизно кусочно-лінійне.

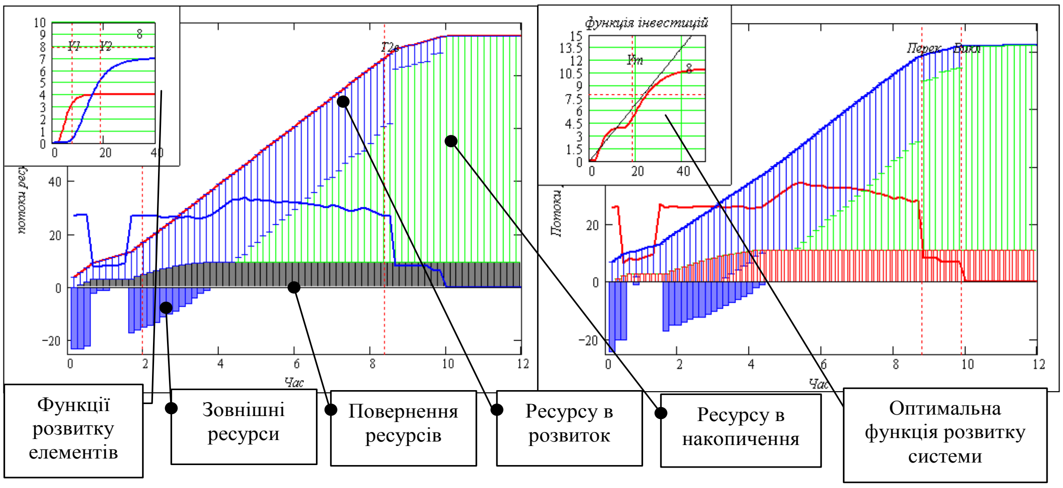

Рис. 3. Порівняння процесів оптимального розвитку системи з двох елементів, розрахованих альтернативними методами

Головною особливістю задачі оптимізації розвитку виробничих систем є швидке зростання невизначеності з часом. Відомо, що реальний горизонт прогнозування для високотехнологічних виробництв не перевищує два роки. Застосований нами метод принципу максимуму дозволяє на кожному кроці процесу враховувати уточнення параметрів системи, а метод агрегування дозволяє побудувати ряд моделей багатовимірної системи — від повністю агрегованої, до «точної». Такий ряд моделей дає можливість організувати взаємоконтроль та гнучкі методи ідентифікації параметрів виробничої системи.

Висновки

Запропонована нова постановка варіаційної задачі оптимального розвитку виробничої системи з урахуванням використання зовнішніх ресурсів — без збільшення кількості змінних управління. Запропоновано і реалізовано метод агрегування функцій розвитку елементів в оптимальну функцію розвитку виробничої системи.

В цілому запропоновані узагальнення задачі оптимізації розвитку дозволяють зводити варіаційні задачі високої розмірності до базової — одновимірної. Розроблені програми оптимізації і моделювання процесів розвитку можуть бути основою системи для технологічного прогнозування в інноваційній діяльності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории управления. — М.: Издат. иностр. литер., 1962. — 233 с.
2. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. — М.: Наука, 1964. — 317 с.
3. Берзин Е. А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем. — М.: Сов. радио, 1974. — 304с.
4. Боровська Т. М., Колесник І. С., Северілов В. А. Основи кібернетики та дослідження операцій. Навчальний посібник. — Вінниця: ВДТУ, 2002. — 242 с.
5. Боровська Т. М., Колесник І. С., Северілов В. А. Спеціальні розділи вищої математики. Навчальний посібник. — Вінниця: ВДТУ, 2002. — 182 с.
6. Колесник, І. С., Северілов В. А. Оптимальне управління розподіленням ресурсів в децентралізованих системах // Доповіді МНК «Контроль і управління в технічних системах», Універсум-Вінниця, 2001. — С. 73—78.
7. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навчальний посібник: — К.: КНЕУ, 2003. — 408 с.
8. Боровська Т. М., Колесник І. С., Северілов В. А. Оптимальне управління розвитком техніко-економічних систем. Кредитні стратегії // Вісник ВПІ. — 2003. — № 6. — С. 173—180.
9. Боровська Т. М., Колесник І. С., Северілов В. А. Оптимізація розподілу обмеженого ресурсу у виробничій системі на базі агрегування виробничих функцій // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. — 2005. — № 1. — С. 12—18.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління

Надійшла до редакції 13.04.05
Рекомендована до друку 6.09.05

Боровська Таїсія Миколаївна — доцент; ***Колесник Ірина Сергіївна*** — здобувач.

Кафедра комп’ютерних систем управління, Вінницький національний технічний університет;

Северілов Віктор *Андрійович* — доцент кафедри інформаційних технологій;

Соціально-економічний інститут ВМУРоЛ «Україна», м. Вінниця