УДК 517.9

В. М. Мізерний, к. т. н., доц.; Т. А. Модебадзе, к. ф-м. н., доц.

В. Н. Мизерный, к. т. н., доц.; Т. А. Модебадзе, к. ф-м. н., доц.

V. Mizernyy, Cand. Sc. (Eng.), Assist. Prof.; T. Modebadze, Cand. Sc. (Ph.-Math.), Assist. Prof.

АНАЛІЗ СТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ ТЕПЛООБМІННИХ ПРОЦЕСІВ У ДИСПЕРСНОМУ ШАРІ

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ТЕПЛООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В ДИСПЕРСНОМ СЛОЕ

THE ANALYSIS OF STATIONARY CONDITIONS OF HEAT EXCHANGE PROCESSES IN DISPERSE LAYER

Досліджується коректність математичних моделей стаціонарного режиму випалювання залізорудних котунів у конвеєрній машині неперервної дії на основі аналізу процесу нелінійного теплообміну двофазних середовищ.

Исследуется корректность математических моделей стационарного режима обжига железорудных окатышей в конвейерной машине непрерывного действия на основании анализа процесса нелинейного теплообмена двухфазных сред.

The present paper considers the correctness of mathematic models of stationary conditions of ironstone pellet roasting on the uninterrupted conveyer machine on the basis of non linear heat exchange process analysis in two-phase environments

Вступ

Дана стаття є продовженням [1]. Тут розглядається стаціонарний режим роботи конвеєрної машини неперервної дії для випалювання залізорудних котунів. Необхідно довести можливість розв'язання крайової задачі, що є його математичною моделлю, і показати, до яких класів функцій буде належати розв'язок в залежності від вибору крайових умов. При доведенні можливості розв'язання крайової задачі будемо використовувати функціонально-аналітичне формулювання крайових задач, тобто представимо їх у вигляді операторних рівнянь у банахових просторах. Такий перехід від крайових задач до операторних рівнянь у даний час є широко застосовуваним [2, 3, 4, 5], оскільки значно полегшує вивчення і процес розв'язання задачі.

Введение

Данная статья является продолжением [1]. Здесь рассматривается стационарный режим работы конвейерной машины непрерывного действия для обжига железорудных окатышей. Необходимо доказать разрешимость краевой задачи, которая является его математической моделью, и показать, к каким классам функций будет принадлежать решение в зависимости от выбора краевых условий. При доказательстве разрешимости краевой задачи будем использовать функционально-аналитическую формулировку краевых задач, т. е. представим их в виде операторных уравнений в банаховых пространствах. Такой переход от краевых задач рассматриваемого вида к операторным уравнениям в настоящее время является широко применяемым [2, 3, 4, 5], поскольку значительно облегчает изучение и решение задачи.

Introduction

The present paper is the sequential one of [1]. The stationary condition of functioning of continuous conveyer machine for ironstone pellet roasting is considered. It is necessary to prove the possibility of marginal task solution, being its mathematic model, and show to which types of function the solution is concerned depending on the marginal conditions choice. When proving the possibility of marginal task solution we use functional and analytic marginal tasks formulating, that is we present them in the form of operator equations systems in Banah spaces. Nowadays such transfer from marginal tasks to operator equations is widely used [2, 3, 4, 5], as it substantially improves the study and the task solving process.

Постановка задачі та побудова математичної моделі

Розглянемо стаціонарний режим роботи конвеєрної машини, який у зоні випалювання опишемо системою диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\begin{aligned} V_y \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,y) \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x,y)\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right) &= l_1 |T|^{\frac{2}{3}} (T - \Theta) + \alpha \left(T^4 - \Theta^4 \right); \\ W_x \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1(x,y) \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2(x,y)\frac{\partial T}{\partial y}\right) &= l_1 |T|^{\frac{2}{3}} (T - \Theta) + \alpha \left(T^4 - \Theta^4 \right), \end{aligned} \tag{1}$$

де $V_y \ge 0$, $W_x \ge 0$, $l_1 \ge 0$, $\alpha \ge 0$ — задані константи (заданные константы, set constants), а коефіцієнти $a_i(x,y)$, $b_i(x,y)$ $(i = 1, 2)$ задовольняють умови

$$a_i(x,y) \ge \lambda_1 > 0, \quad b_i(x,y) \ge \lambda_2 > 0 \quad a_i, b_i \in L_\infty(\Omega). \tag{2}$$

На межі області $\partial\Omega$ задані крайові умови для газу і твердої речовини

$$\begin{aligned} T(0,y) &= \varphi_1(y); & \Theta(0,y) &= \eta_1(y); \\ T(h,y) &= \varphi_2(y); & \Theta(h,y) &= \eta_2(y); \\ T(x,0) &= \varphi_3(x); & \Theta(x,0) &= \eta_3(x); \\ T(x,l) &= \varphi_4(x); & \Theta(x,l) &= \eta_4(x) \end{aligned} \tag{3}$$

і обмеження на стан

$$\left|\operatorname{grad} \Theta(x,y)\right| \le k \quad \forall\ (x,y) \in \Omega, \tag{4}$$

де k — відома стала (известная постоянная, known constant).

Необхідно довести можливість розв'язання нелінійної крайової задачі (1), (3) і показати, у яких класах функцій існує розв'язок.

Нехай досить регулярні функції $\hat{T}(x,y)$ і $\hat{\Theta}(x,y)$ задовольняють умови

$$\hat{T}(x,y)\Big|_{\partial\Omega} = T\Big|_{\partial\Omega}; \quad \hat{\Theta}(x,y)\Big|_{\overset{\bullet}{\partial\Omega}} = \Theta\Big|_{\partial\Omega}. \tag{5}$$

Тоді для функцій $\overline{T} = T - \hat{T}$, $\overline{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ крайова задача (1), (3) матиме вигляд

$$\begin{aligned} & V_y \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,y) \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x,y)\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial y}\right) = \\ & = l_1 \left|\overline{T} + \hat{T}\right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T} + \hat{T}\right) - \left(\overline{\Theta} + \hat{\Theta}\right)\right) + \alpha\left(\left(\overline{T} + \hat{T}\right)^4 - \left(\overline{\Theta} + \hat{\Theta}\right)\right) - \\ & \quad - \left(V_y \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1 \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2 \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial y}\right)\right); \\ & W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1(x,y) \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2(x,y)\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right) = \\ & = l_1 \left|\overline{T} + \hat{T}\right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{\Theta} + \hat{\Theta}\right) - \left(\overline{T} + \hat{T}\right)\right) + \alpha\left(\left(\overline{\Theta} + \hat{\Theta}\right)^4 - \left(\overline{T} - \hat{T}\right)^4\right) - \\ & \quad - \left(W_x \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1 \frac{\partial \hat{T}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2 \frac{\partial \hat{T}}{\partial x}\right)\right), \end{aligned} \tag{6}$$

з відповідними крайовими умовами

$$\overline{T}\Big|_{\partial\Omega} = 0; \quad \overline{\Theta}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7}$$

і обмеженням на стан

$$\left|\mathrm{grad}\left(\overline{\Theta}(x,y) + \widehat{\Theta}(x,y)\right)\right| \le k \quad \forall\ (x,y) \in \Omega . \tag{8}$$

Функцію $\overline{Y} = \left\{\overline{\Theta}(x,y), \overline{T}(x,y)\right\}$, яка належить просторові $X, X = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p \ge 5$, і задовольняє $\forall\, \mu \in X,\ \mu = (\mu_1; \mu_2)$ інтегральну тотожність

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \left(V_y \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\mu_1 + W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\mu_2 \right) dxdy + \int\limits_\Omega \left(a_1 \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\frac{\partial \mu_1}{\partial y} \right) dxdy = \\
&= \int\limits_\Omega \left(V_y \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\mu_1 + W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\mu_2 \right) dxdy - l_1 \int\limits_\Omega \left|\overline{T} + \widehat{T}\right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T} + \widehat{T}\right) - \left(\overline{\Theta} + \widehat{T}\right) \right) \times \\
&\times (\mu_2 - \mu_1)\, dxdy - \alpha \int\limits_\Omega \left(\left(\overline{T} + \widehat{T}\right)^4 - \left(\overline{\Theta} + \widehat{T}\right)^4 \right) (\mu_2 - \mu_1)\, dxdy + \\
&+ \int\limits_\Omega \left(a_1 \frac{\partial\widehat{\Theta}}{\partial x}\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial\widehat{\Theta}}{\partial y}\frac{\partial \mu_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x}\frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \widehat{T}}{\partial y}\frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right) dxdy,
\end{aligned} \tag{9}$$

назвемо узагальненим розв’язком задачі (6), (7).

Співвідношення (9) має сенс для всіх $\overline{\Theta}, \overline{T}, \mu_1, \mu_2 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega),\ p \ge 5.$ $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — це простір Соболєва [2, 4], тому що відповідно до нерівності Гельдера такі функції на межі Г області Ω набувають значень, які дорівнюють $\overline{\Theta}(\Gamma),\ \overline{T}(\Gamma),\ \mu_1(\Gamma),\ \mu_2(\Gamma)$ відповідно, причому ці значення на межі Г є елементами простору $L_2(\Gamma)$. Перетворимо (9) до вигляду

$$\left\langle \mathrm{A}\left(\overline{y}\right), \mu \right\rangle = \left\langle \overline{F}(\overline{y}), \mu \right\rangle - \left\langle \mathrm{A}\left(\hat{y}\right), \mu \right\rangle \quad \forall\ \mu \in X, \tag{10}$$

де оператор A визначається своєю білінійною формою

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{A}\left(\overline{y}\right), \mu \right\rangle = &\int\limits_\Omega \left(V_y \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\mu_1 + W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\mu_2 \right) dxdy + \int\limits_\Omega \left(a_1 \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\frac{\partial \mu_1}{\partial y} + \right. \\
&\left. + b_1 \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right) dxdy,
\end{aligned} \tag{11}$$

а оператор $\overline{F}(\overline{y}) \overset{\Delta}{=} F\left(\overline{y} + \hat{y}\right)$ визначається напівлінійною формою

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{F}(\overline{y}), \mu \right\rangle = &-l_1 \int\limits_\Omega \left|\overline{T} + \widehat{T}\right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T} + \widehat{T}\right) - \left(\overline{\Theta} + \widehat{T}\right) \right) (\mu_2 - \mu_1)\, dxdy - \\
&- \alpha \int\limits_\Omega \left(\left(\overline{T} + \widehat{T}\right)^4 - \left(\overline{\Theta} - \widehat{\Theta}\right)^4 \right) (\mu_2 - \mu_1)\, dxdy;
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\overline{F}(\overline{y}) = \begin{Bmatrix} \overline{f}_1\left(\overline{\Theta}, \overline{T}\right) \\ -\overline{f}_1\left(\overline{\Theta}, \overline{T}\right) \end{Bmatrix}, \tag{13}$$

де $f_1(\Theta, T) = -l_1 \left|\overline{T} + \hat{T}\right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T} + \hat{T}\right) - \left(\overline{\Theta} + \hat{\Theta}\right)\right) + \alpha\left(\left(\overline{T} + \hat{T}\right)^4 - \left(\overline{\Theta} - \hat{\Theta}\right)^4\right)$.

Необхідно відзначити, що оскільки співвідношення (9) справедливо для будь-яких $\mu \in X = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p \geq 5$, то воно еквівалентно операторному рівнянню

$$\mathsf{A}\left(\overline{y}\right) = f, \quad f \in X^* \tag{14}$$

у просторі X, де $\mathsf{A}\left(\overline{y}\right) = \mathrm{A}\left(\overline{y}\right) - \overline{F}\left(\overline{y}\right)$, $f = -\mathrm{A}\left(\hat{y}\right)$, $X = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p \geq 5$.

Доведемо, що оператор А, який визначається формою (11), є лінійним, обмеженим, монотонним та коерцитивним, що діє з простору $X_1 = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right]^2$, в простір $X_1^* = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(\Omega)\right]$, а оператор $\overline{F}$, який визначається формою (12), є обмеженим демінеперервним оператором, що діє з $X_2 = \left[L_p(\Omega)\right]^2$, $p \geq 5$ у $X_2^* = \left[L_p(\Omega)\right]^2$, $1/p + 1/q = 1$.

Дійсно, з існування інтегралів (11) і нерівності Гельдера випливає, що А — лінійний оператор з $X_1 = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right]^2$, в $X_1^* = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(\Omega)\right]$. Покажемо, що для А справедливі оцінки

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|\overline{y}\|_{X_1} = \|\mu\|_{X_1} = 1} \left|\left\langle \mathrm{A}\left(\overline{y}\right), \mu\right\rangle\right| < \infty, \quad \mu \in X_1, \tag{15}$$

$$\left\langle A\left(\overline{y}_1\right) - A\left(\overline{y}_2\right), \overline{y}_1 - \overline{y}_2\right\rangle_{X_1} \geq 0 \quad \forall\ \overline{y}_1, \overline{y}_2 \in X_1. \tag{16}$$

З огляду на обмеженість коефіцієнтів $a_i(x, y)$, $b_i(x, y)$, $i = 1, 2$ і те, що V_y, W_x — задані константи, оцінимо $\|\mathrm{A}\|$:

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{A}(\overline{y}), \mu\right\rangle = \int_\Omega \left(V_y \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\mu_1 + W_x \frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\mu_2\right) dxdy + \int_\Omega \left(a_1 \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\frac{\partial\mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\frac{\partial\mu_1}{\partial y} + \right.\\ \left. + b_1 \frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\frac{\partial\mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right) dxdy \leq M\left[\int_\Omega \left|\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\mu_1\right| + \left|\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\mu_2\right| + \left|\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\frac{\partial\mu_1}{\partial x}\right| + \right.\\ \left. + \left|\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right| dxdy\right],\end{aligned} \tag{17}$$

$$M = \max\left\{V_y, W_x, \sup_\Omega a_1(x, y), \sup_\Omega a_2(x, y), \sup_\Omega b_1(x, y), \sup_\Omega b_2(x, y), \right\}. \tag{18}$$

Далі використовуємо нерівність Гельдера. Тоді

$$\left\langle \mathrm{A}\left(\overline{y}, \mu\right)\right\rangle \leq M\left(\left\|\overline{\Theta}\right\|\left\|\mu_1\right\| + \left\|\overline{T}\right\|\left\|\mu_2\right\|\right) \leq 2M\left(\|\overline{y}\|^2 + \|\mu\|^2\right) < \infty, \quad \left(\|\overline{y}\| = \|\mu\| = 1\right), \tag{19}$$

де $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{X_1}$.

Це підтверджує справедливість (15).

Враховуючи лінійність A, запишемо

$$\left\langle \mathrm{A}(\bar{y}_1) - \mathrm{A}(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle =$$

$$= \int_\Omega \left(W_x \frac{\partial (\bar{T}_1 - \bar{T}_2)}{\partial x} (\bar{T}_1 - \bar{T}_2) + V_y \frac{\partial (\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2)}{\partial y} (\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2) \right) dxdy +$$

$$+ \int_\Omega \left[\left(a_1 \frac{\partial (\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2)}{\partial x} \right)^2 + \left(a_2 \frac{\partial (\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2)}{\partial y} \right) + \qquad (20)$$

$$+ \left(b_1 \frac{\partial (\bar{T}_1 - \bar{T}_2)}{\partial x} \right)^2 + \left(b_2 \frac{\partial (\bar{T}_1 - \bar{T}_2)}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \ge 0,$$

звідки випливає справедливість (16). Крім того,

$$\left\langle \mathrm{A}(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle = \int \left(W_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \bar{T} + V_y \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x} \bar{\Theta} \right) dxdy +$$

$$+ \int_\Omega \left(a_1 \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial y} + b_1 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \ge C \|\bar{y}\|^2, \qquad (21)$$

$$C = \min \left\{ \inf_\Omega a_1(x, y); \inf_\Omega a_2(x, y), \inf_\Omega b_1(x, y), \inf_\Omega b_2(x, y) \right\}. \qquad (22)$$

оскільки

$$\int_\Omega W_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \bar{T} dxdy = 0; \quad \int_\Omega V_y \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial y} \bar{\Theta} dxdy = 0. \qquad (23)$$

Отже, A — коерцитивний оператор.

Розглянемо нелінійні частини системи (5). З нерівності Гельдера випливає, що інтеграл у (12) має сенс, якщо функції $\bar{\Theta}$, $\bar{T}$, μ_1, μ_2, належать просторові $L_p(\Omega)$, $p \ge 5$, тобто $\bar{y} = (\bar{\Theta}, \bar{T})$.

Покажемо, що $\bar{F}$ переводить обмежені множини з X_2 в обмежені множини в $X_2^* = \left[L_p(\Omega) \right]^2$, $1/p + 1/q = 1$ і, як оператор з X_2 у X_2^*, є демінеперервним. Покажемо, що

$$\bar{F}(\bar{y}) \in \left[L_p(\Omega) \right]^2, \ \forall \ \bar{y} \in \left[L_p(\Omega) \right]^2, \ p \ge 5. \qquad (24)$$

Для цього досить довести, що $\bar{f}_1(\bar{y}(\cdot)) \in L_p(\Omega)$. Функція $\bar{f}_1(\bar{y})$ є вимірною і для неї виконуються нерівності

$$f_1(\bar{\Theta}, \bar{T}) = l_1 \left| \bar{T} + \hat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \left(\bar{T} + \hat{T} \right) - \left(\bar{\Theta} + \hat{\Theta} \right) + \alpha \left(\left(\bar{T} + \hat{T} \right)^4 - \left(\bar{\Theta} - \hat{\Theta} \right)^4 \right) \le$$

$$\le \beta \left| \bar{T} + \hat{T} \right|^{\frac{2}{3}} + \left(\left| \bar{T} + \hat{T} \right| + \left| \bar{\Theta} + \hat{\Theta} \right| \right) + \left(\bar{T} + \hat{T} \right)^4 + \left(\bar{\Theta} - \hat{\Theta} \right)^4 = \qquad (25)$$

$$= \beta \left| \bar{T} + \hat{T} \right|^{\frac{5}{3}} + \left(\left| \bar{T} + \hat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \left| \bar{\Theta} + \hat{\Theta} \right| + \left| \bar{T} + \hat{T} \right|^4 + \left| \bar{\Theta} + \hat{\Theta} \right|^4 \right) \quad \left(\beta = \max(l_1, \alpha) \right).$$

Звідси випливає

$$\left|\overline{f}_1(\overline{\Theta},\overline{T})\right| \le \begin{cases} \overline{m}_1\left(\left|\overline{T}+\widehat{T}\right|^4+\left|\overline{\Theta}+\widehat{\Theta}\right|^4\right), & \left|\overline{T}+\widehat{T}\right| \ge 1; \\ \overline{m}_2\left(\left|\overline{T}+\widehat{T}\right|^{\frac{8}{5}}+\left|\overline{\Theta}+\widehat{\Theta}\right|^4\right), & \left|\overline{T}+\widehat{T}\right| < 1. \end{cases} \tag{26}$$

Тоді для $p=5,\ q=\dfrac{5}{4}$

$$\left|\overline{f}_1(\overline{\Theta},\overline{T})\right|^q \le \begin{cases} \overline{c}_1\left(\left|\overline{T}+\widehat{T}\right|^5+\left|\overline{\Theta}+\widehat{\Theta}\right|^5\right), & \left|\overline{T}+\widehat{T}\right| \ge 1; \\ \overline{c}_2\left(\left|\overline{T}+\widehat{T}\right|^2+\left|\overline{\Theta}+\widehat{\Theta}\right|^5\right), & \left|\overline{T}+\widehat{T}\right| < 1, \end{cases} \tag{27}$$

де $\overline{m}_1,\overline{m}_2,\overline{c}_1,\overline{c}_2$ — константи, що не залежать від $\overline{y}$ (константы, не зависящие от $\overline{y}$; constants not dependent on $\overline{y}$).

Оскільки функції $\overline{T},\ \widehat{T},\ \overline{\Theta},\ \widehat{\Theta} \in L_p(\Omega),\quad p \ge 5$, то функція $\left|\overline{f}_1\left(\overline{\Theta},\overline{T}\right)\right|^q$ має інтегровану за Лебегом мажоранту. Звідси випливає, що $\overline{f}_1(\overline{\Theta},\overline{T}) \in L_p(\Omega)$ і $\overline{F}(\overline{y}) \in \left[L_p(\Omega)\right]^2 = X_2^*$. З доведеної нерівності отримуємо $\left\|\overline{F}(\overline{y})\right\|_{X_2^*} \le K^* = \text{const}$ для $\left\|\overline{y}\right\|_{X_2} \le \overline{K}^* = \text{const}$, тобто $\overline{F}$ — обмежений оператор.

Необхідно зазначити, що для функції $\overline{f}_1$, визначеної на $\Omega \times \mathrm{R}$, виконуються такі умови:

1) для майже всіх $\overline{x}=(x;y) \in \Omega$ функції $\xi \to \overline{f}_1(\overline{x},\xi)$ неперервні на R^2;

2) для кожного $\xi \in \mathrm{R}^2$ функції $\overline{x} \to \overline{f}_1(\overline{x},\xi)$ вимірні;

3) для всіх $\xi=(\xi_1;\xi_2) \in \mathrm{R}^2$ і для майже всіх $\overline{x} \in \Omega$ справедлива нерівність

$$\left|\overline{f}_1(\overline{x},\xi)\right| \le C\left(1+\sum_{j=1}^{2}\left|\xi_j\right|^{p-1}\right),\quad p \ge 5, \tag{28}$$

де C – константа (константа, constant).

Розглянемо послідовність $\{\overline{y}_n\} \in X_2$ таку, що $\left\|\overline{y}_n-\overline{y}\right\|_{X_2} \to 0$. Через обмеженість $\overline{F}$ множина $\left\{\overline{F}(\overline{y}_n)\right\}$ обмежена і, отже, є слабко передкомпактною. Тому для доведення того, що $\overline{F}(\overline{y})$ є слабкою границею послідовності $\left\{\overline{F}(\overline{y}_n)\right\}$, досить показати, що $\overline{F}(\overline{y}_{n_k}) \to \overline{F}(\overline{y})$ для кожної послідовності $\left\{\overline{F}(\overline{y}_n)\right\}$, яка слабко сходиться. Припустимо, z — слабка границя такої послідовності $\left\{\overline{F}(\overline{y}_{n_k})\right\}$. Тоді існує підпослідовність $\left\{\upsilon_j\right\}$ послідовності $\left\{\overline{y}_{n_k}\right\}$, що сходиться до $\overline{y}$ майже всюди в Ω. Внаслідок неперервності функції $(\overline{x};\xi) \to \overline{f}_1(\overline{x};\xi)$ по $\xi \in \mathrm{R}^2$ маємо $\overline{F}(\upsilon_j(\overline{x})) \to \overline{F}(\overline{y}(\overline{x}))$ майже усюди в Ω. Разом з тим $\left\{\overline{F}(\upsilon_j)\right\}$, як підпослідовність послідовності $\left\{\overline{F}(\overline{y}_{n_k})\right\}$, слабко сходиться до z. Тоді виходить, що $\overline{F}(\overline{y})=z$, тобто $\overline{F}(\overline{y}_{n_k}) \to \overline{F}(\overline{y})$ в X_2^* і оператор $\overline{F}$ — демінеперервний.

Розглянемо оператор $\mathrm{A}: X \to X^*$, породжений задачею (6), (7),

де $X=\left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p \ge 5$, $X^*=\left[W_2^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)\right]$, $1/p+1/q=1$. Оператор A є:

а) обмежений;

б) коерцитивний, тобто для нього виконується умова

$$\lim_{\|\bar{y}\|_{X\to\infty}} \frac{\langle \mathsf{A}(\bar{y}), \bar{y} \rangle}{\|\bar{y}\|_X} = +\infty ; \tag{29}$$

в) є оператором з напівобмеженою варіацією, тобто для довільних $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in X$ таких, що $\|\bar{y}_1\|_X \le R,\ \|\bar{y}_2\|_X \le R$, справедлива нерівність

$$\left\langle \mathsf{A}(\bar{y}_1) - \mathsf{A}(\bar{y}_2),\ \ \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle \ge -C\left(R; \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|'_X \right), \tag{30}$$

де $\|\cdot\|'_X$ — норма, компактна в порівнянні з (норма, компактная по сравнению с; norm, compact as compared with) $\|\cdot\|_X$, а функція $C(\rho;\tau)$ — неперервна і така, що (непрерывная и такая, что; continous and that) $C(\rho; t\tau)/t \to 0$, якщо (при, if) $t \to +0$;

г) має властивість (M): з того, що $\bar{y}_n, \to \bar{y}\left(\bar{y}_n, \bar{y} \in \mathrm{D}(\mathsf{A}) \subset X\right)$ слабко в X, $\mathsf{A}\left(\bar{y}_n\right) \to X$ слабко в X^* і виконується нерівність $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\langle \mathsf{A}\left(\bar{y}_n\right), \bar{y}_n \right\rangle_X \le \left\langle X, \bar{y} \right\rangle_X$, випливає $X = \mathsf{A}\left(\bar{y}\right)$.

Справедливість твердження а) випливає безпосередньо з властивості A і $\bar{F}$. Далі доведемо справедливість б). Для цього вивчимо форму

$$\left\langle \mathsf{A}(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle_X = \left\langle A(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle_{X_1} - \left\langle \bar{F}(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle_{X_2} . \tag{31}$$

Форма $\left\langle \mathsf{A}(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle_X = \left\langle A(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle_{X_q}$ коерцитивна. Оцінимо $\left(-\left\langle \bar{F}(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle_{X_2} \right)$:

$$\begin{aligned} -\left\langle \bar{F}(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle_{X_2} &= l_1 \int_\Omega \left| \bar{T} + \hat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \left(\bar{\Theta} - \bar{T} \right)^2 dxdy + l_1 \int_\Omega \left| \bar{T} + \hat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \left(\bar{T} - \hat{\Theta} \right) dxdy + \\ &+ \alpha \int_\Omega \left(\bar{T} - \bar{\Theta} \right)^2 \left(\bar{T} + \hat{T} + \bar{\Theta} + \hat{\Theta} \right) \left(\bar{T} + \hat{T} \right)^2 dxdy + \\ &+ \alpha \int_\Omega \left(\bar{T} - \bar{\Theta} \right) \left(\bar{T} - \hat{\Theta} \right) \left(\bar{T} + \hat{T} + \bar{\Theta} + \hat{\Theta} \right) \left(\left(\bar{T} + \hat{T} \right)^2 + \left(\bar{\Theta} + \hat{\Theta} \right)^2 \right) dxdy. \end{aligned} \tag{32}$$

Вибираючи функції $\hat{T}$ і $\hat{\Theta}$ таким чином, щоб задовольнити умову $\left(\bar{T} - \bar{\Theta} \right)\left(\hat{T} - \hat{\Theta} \right) \ge 0$ майже усюди в Ω, отримаємо оцінку

$$-\frac{\left\langle \bar{F}(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle}{\|\bar{y}\|_X} \ge 0 . \tag{33}$$

Підставивши отриману оцінку в (31), приходимо до справедливості твердження б). Далі покажемо, що A — оператор з напівобмеженою варіацією. З визначення A випливає

$$\begin{aligned} \left\langle \mathsf{A}\left(\bar{y}_1\right) - \mathsf{A}\left(\bar{y}_2\right), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle &= \left\langle \mathsf{A}\left(\bar{y}_1\right) - \mathsf{A}\left(\bar{y}_2\right), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle_{X_1} - \\ &- \left\langle \bar{F}\left(\bar{y}_1\right) - \bar{F}\left(\bar{y}_2\right), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle_{X_2} . \end{aligned} \tag{34}$$

З огляду на монотонність оператора A, отримаємо

$$\left\langle \mathsf{A}\left(\bar{y}_1\right) - \mathsf{A}\left(\bar{y}_2\right), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle_{X_1} \ge 0 . \tag{35}$$

Розглянемо другий доданок правої частини (34). Для зручності викладень позначимо через $\psi = \bar{y}_1 - \bar{y}_2\ \left(\psi = \left(\psi_1; \psi_2 \right) \right)$; $\psi_1 = \bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2$; $\psi_2 = \bar{T}_1 - \bar{T}_2$. Тоді

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \overline{F}\left(\overline{y}_1\right) - \overline{F}\left(\overline{y}_2\right), \overline{y}_1 - \overline{y}_2 \right\rangle = l_1 \int_\Omega \left| \overline{T}_1 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T}_1 + \widehat{T} \right) - \left(\overline{\Theta}_1 + \widehat{\Theta} \right) \right) (\psi_1 - \psi_2)\, dxdy - \\
&- l_1 \int_\Omega \left| \overline{T}_1 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T}_2 + \widehat{T} \right) - (\overline{\Theta}_2 + \widehat{\Theta}) \right) (\psi_1 - \psi_2)\, dxdy + \\
&+ \alpha \int_\Omega \left(\left(\overline{T}_1 + \widehat{T} \right)^4 - \left(\overline{\Theta}_1 + \widehat{\Theta} \right)^4 \right) (\psi_1 - \psi_2)\, dxdy - \\
&- \alpha \int_\Omega \left(\left(\overline{T}_2 + \widehat{T} \right)^4 - \left(\overline{\Theta}_2 + \widehat{\Theta} \right)^4 \right) (\psi_1 - \psi_2)\, dxdy = \\
&= l_1 \int_\Omega (\psi_2 - \psi_2) \left(\left| \overline{T}_1 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \left(\overline{T}_1 - \overline{\Theta}_1 \right) + \left| \overline{T}_2 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \left(\overline{\Theta}_2 - \overline{T}_2 \right) \right) dxdy - \\
&- l_1 \int_\Omega (\psi_2 - \psi_1) \left(\left| \overline{T}_1 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} - \left| \overline{T}_2 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \right) dxdy - \\
&- \alpha \int_\Omega (\psi_2 - \psi_1) \left(\overline{T}_1 - \overline{T}_2 \right) \left(\overline{T}_1 + \overline{T}_2 + 2\widehat{T} \right) \left(\left(\overline{T}_1 + \widehat{T} \right)^2 + \left(\overline{T}_2 + \widehat{T} \right)^2 \right) dxdy - \\
&- \alpha \int_\Omega (\psi_2 - \psi_1) \left(\overline{\Theta}_1 - \overline{\Theta}_2 \right) \left(\overline{\Theta}_1 + \overline{\Theta}_2 + 2\widehat{\Theta} \right) \left(\left(\overline{\Theta}_1 + \widehat{\Theta} \right)^2 + \left(\overline{\Theta}_2 + \widehat{\Theta} \right)^2 \right) dxdy \le \\
&\le l_1 \left| \int_\Omega (\psi_2 - \psi_1) \left[\left(\left| \overline{T}_1 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \overline{T}_1 - \left| \overline{T}_2 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \overline{T}_2 \right) - \left(\left| \overline{T}_1 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \overline{\Theta}_1 - \left| \overline{T}_2 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \overline{\Theta}_2 \right) \right] dxdy \right| + \\
&+ l_1 \left| \int_\Omega (\psi_2 - \psi_1) \left(\left| \overline{T}_1 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} - \left| \overline{T}_2 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \right) \left(\widehat{T} - \widehat{\Theta} \right) dxdy \right| + \\
&+ \alpha \left| \int_\Omega (\psi_2 - \psi_1) \left(\overline{T}_1 - \overline{T}_2 \right) \left(\overline{T}_1 + \overline{T}_2 + 2\widehat{T} \right) \left(\left(\overline{T}_1 + \widehat{T} \right)^2 + \left(\overline{T}_2 + \widehat{T} \right)^2 \right) dxdy \right| + \\
&+ \alpha \left| \int_\Omega (\psi_2 - \psi_1) \left(\overline{\Theta}_1 - \overline{\Theta}_2 \right) \left(\overline{\Theta}_1 + \overline{\Theta}_2 + 2\widehat{\Theta} \right) \left(\left(\overline{\Theta}_1 + \widehat{\Theta} \right)^2 + \left(\overline{\Theta}_2 + \widehat{\Theta} \right)^2 \right) dxdy \right| \le \\
&\le l_1 \left| \int_\Omega \left(\left| \overline{T}_1 - \overline{T}_2 \right| + \left| \overline{\Theta}_1 - \overline{\Theta}_2 \right| \right) \left[\left(\left| \overline{T}_1 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \overline{T}_1 - \left| \overline{T}_2 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \overline{T}_2 \right) - \right. \right. \\
&- \left. \left. \left(\left| \overline{T}_1 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \overline{\Theta}_1 - \left| \overline{T}_2 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \overline{\Theta}_2 \right) + \left(\left| \overline{T}_1 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} - \left| \overline{T}_2 + \widehat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \left(\widehat{T} - \widehat{\Theta} \right) \right) \right] dxdy \right| + \\
&+ \alpha \left| \int_\Omega \left(\left| \overline{T}_1 - \overline{T}_2 \right| + \left| \overline{\Theta}_1 - \overline{\Theta}_2 \right| \right) \left(\left| \overline{T}_1 - \overline{T}_2 \right| + \left| \overline{\Theta}_1 - \overline{\Theta}_2 \right| \right) \left[\left(\overline{T}_1 + \overline{T}_2 + 2\widehat{T} \right) \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. \left(\left(\overline{T}_1 + \widehat{T} \right)^2 + \left(\overline{T}_2 + \widehat{T} \right)^2 \right) + \left(\overline{\Theta}_1 + \overline{\Theta}_2 + 2\widehat{\Theta} \right) \left(\left(\overline{\Theta}_1 + \widehat{\Theta} \right)^2 + \left(\overline{\Theta}_2 + \widehat{\Theta} \right)^2 \right) \right] dxdy \right| \le \\
&\le C\left(R; \left\| y_1 - y_2 \right\|_X^{'} \right),
\end{aligned}
\tag{36}
$$

де

$$C\left(R;\|y_1-y_2\|'_X\right)=\begin{cases} l_1\|y_1-y_2\|^{\frac{5}{3}}\left(R+\|\hat{T}\|\right)\left(2R+\|\hat{y}\|\right)+\alpha\|y_1-y_2\|^2\left(2R+\|\hat{T}\|\right)+2R^2+2\|\hat{T}\|^2, \\ \text{якщо}\quad |T_i+\hat{T}|\geq 1,\ \ i=1,2; \\ l_1\|y_1-y_2\|^{\frac{5}{3}}\left(R+\|\hat{y}\|\right)+4\alpha\|y_1-y_2\|^2\left(\|y_1\|+\|y_2\|+2\|\hat{y}\|\right), \\ \text{якщо}\quad \left|T_i+\hat{T}\right|<1,\ \ i=1,2; \\ l_1\|y_1-y_2\|^{\frac{5}{3}}\left(R+\|\hat{T}\|+1\right)\left(2R+\|\hat{y}\|\right)+\alpha\|y_1-y_2\|^2\left(2R+\|\hat{T}\|\right)\left(\|\hat{y}\|^2+2R^2\right), \\ \text{якщо}\quad |T_i+\hat{T}|\geq 1,\ |T_j+\hat{T}|<1,\ \ i\neq j;\ \ i,j=1,2. \end{cases} \tag{37}$$

Тут $\|\cdot\|'_X=\|\cdot\|=\|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^2}$, $p\geq 5$.

За теоремою вкладення Соболєва норма $\|\cdot\|'_X=\|\cdot\|=\|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^2}$, $p\geq 5$, компактна щодо норми $\|\cdot\|_X$. Тоді

$$-\left\langle \bar{F}(\bar{y}_1)-\bar{F}(\bar{y}_2),\ \bar{y}_1-\bar{y}_2\right\rangle\geq -C\left(R;\ \|y_1-y_2\|'_X\right). \tag{38}$$

Підставляючи останню формулу в (34), приходимо до справедливості твердження в).

Доведення г) безпосередньо випливає з твердження [4]:

якщо $\mathsf{A}: X\to X$ — оператор з напівобмеженою варіацією, то наступні умови еквівалентні:

а) оператор A радіально неперервний на X;

б) з $\left\langle f-\mathsf{A}(\xi),\ \bar{y}-\xi\right\rangle_X\geq -C\left(R;\ \|\bar{y}-\xi\|'_X\right)\forall\xi\in X\ \ \left(\|\xi\|_X\leq R;\ \|\bar{y}\|_X\leq R\right)$ випливає $\mathsf{A}(\bar{y})=f$;

в) оператор A має властивість (M);

г) оператор A^* — демінеперервний на X.

Таким чином, розглянуто стаціонарний режим роботи конвеєрної випалювальної машини, припустивши при цьому, що нам відомі значення функцій $\Theta(x,y)$ і $T(x,y)$ на межі області Ω. Однак слід зазначити, що на практиці в ряді режимних зон немає можливості отримати ці значення через відсутність на всій межі області Ω вимірювальних приладів, що у свою чергу викликано рядом причин технічного характеру. На практиці відомий розподіл температури газу лише на межі $\Gamma_1=\{0\}\times(0,l):\ T|_{\Gamma_1}\equiv T(0,y)=\varphi_1(y)$, де він входить у шар котунів, і розподіл температури котунів на межі $\Gamma_2=(0,h)\times\{0\}:\ \Theta|_{\Gamma_2}\equiv\Theta(x,0)=\eta_3(x)$, де шар котунів входить у зону випалювання. Тому доцільно розглянути змішану крайову задачу вигляду

$$\begin{aligned} V_y\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)&=l_1\,|\,T|^{\frac{2}{3}}\,(T-\Theta)+\alpha\left(T^4-\Theta^4\right); \\ W_x\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(b_1\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(b_2\frac{\partial T}{\partial y}\right)&=l_1\,|\,T|^{\frac{2}{3}}\,(\Theta-T)+\alpha\left(\Theta^4-T^4\right) \end{aligned} \tag{39}$$

в області $\Omega=(0,h)\times(0,l)$, де $V_y,\ W_x,\ \alpha,\ a_i,\ b_i,\ i=1,2$, такі ж, як у попередньому випадку, а крайові умови на $\partial\Omega$ для $T(x,y)$ і $\Theta(x,y)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} &T|_{\Gamma_1}=T(0,y)=\varphi_1(y), \\ &\left(K_1\frac{\partial T}{\partial n}+\alpha_1\left(T-T_s\right)\right)\Bigg|_{\gamma_1}=0;\quad \gamma_1=\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4; \end{aligned} \tag{40}$$

$$\Theta\big|_{\Gamma_2} = \Theta(x,0) = \eta_3(x),$$
$$\left(K_2\frac{\partial\Theta}{\partial n} + \alpha_2\left(\Theta - T_s\right)\right)\Bigg|_{\gamma_2} = 0; \quad \gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \tag{41}$$

де Γ_i — такі, що $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\Omega$; $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ для $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3, 4$, і задане обмеження на стан таке ж, як у задачі (1) (такие, что $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\Omega$; $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ для $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3, 4$, и задано ограничение на состояние такое же, как в задаче (1); such that $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\Omega$; $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ for $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3, 4$, and the given limitation of the same condition as in task (1)).

Далі доведемо можливість розв'язання змішаної крайової задачі (39)—(41) і покажемо, до яких класів функцій належить розв'язок $\overline{y}$.

Нехай достатньо регулярні функції $\widehat{T}(x,y)$ і $\widehat{\Theta}(x,y)$ задовольняють умови

$$\widehat{T}\big|_{\Gamma_1} = T\big|_{\Gamma_1}; \; \widehat{\Theta}\big|_{\Gamma_1} = \Theta\big|_{\Gamma_1} \; . \tag{42}$$

Тоді для функцій $\overline{T} = T - \widehat{T}$; $\overline{\Theta} = \Theta - \widehat{\Theta}$ змішана крайова задача (38)—(40) буде мати вигляд

$$\begin{gathered}
V_y\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\right) = \\
= l_1 \,|\, \overline{T} + \widehat{T}|^{\frac{2}{3}}\left(\left(\overline{T} + \widehat{T}\right) + \left(\overline{\Theta} + \widehat{\Theta}\right)\right) + \alpha\left(\left(\overline{T} + \widehat{T}\right)^4 - (\overline{\Theta} + \widehat{\Theta})^4\right) - \\
- \left(V_y\frac{\partial\widehat{\Theta}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\frac{\partial\widehat{\Theta}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial\widehat{\Theta}}{\partial y}\right)\right); \\
W_x\frac{\partial\overline{T}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\right) = \\
= l_1\left|\overline{T} + \widehat{T}\right|^{\frac{2}{3}}\left(\left(\overline{\Theta} + \widehat{\Theta}\right) - \left(\overline{T} + \widehat{T}\right)\right) + \alpha\left(\left(\overline{\Theta} + \widehat{\Theta}\right)^4 - \left(\overline{T} + \widehat{T}\right)^4\right) - \\
- \left(W_x\frac{\partial\widehat{T}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1\frac{\partial\widehat{T}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_1\frac{\partial\widehat{T}}{\partial y}\right)\right)
\end{gathered} \tag{43}$$

з відповідними крайовими умовами

$$\overline{T}\big|_{\Gamma_1} = 0, \; \left(k_1\frac{\partial\left(\overline{T} + \widehat{T}\right)}{\partial n} + \alpha_1\left(\overline{T} + \widehat{T} - T_s\right)\right)\Bigg|_{\gamma_1} = 0; \tag{44}$$

$$\overline{\Theta}\big|_{\Gamma_2} = 0, \; \left(k_2\frac{\partial\left(\overline{\Theta} + \widehat{\Theta}\right)}{\partial n} + \alpha_2\left(\overline{\Theta} + \widehat{\Theta} - T_s\right)\right)\Bigg|_{\gamma_2} = 0, \tag{45}$$

а також обмеженням на стан

$$\left|\operatorname{grad}\left(\overline{\Theta}(x,y) + \widehat{\Theta}(x,y)\right)\right| \leq k_3 . \tag{46}$$

Назвемо узагальненим розв'язком задачі (42)—(44) функцію $\overline{Y} = \left(\overline{\Theta}(x,y);\; \overline{T}(x,y)\right)$ з просто-ру

$$X = \overset{\circ\Gamma_2}{W_2^1}(\Omega) \cap L_p(\Omega) \times \overset{\circ\Gamma_1}{W_2^1}(\Omega) \cap L_p(\Omega), \quad p \ge 5, \tag{47}$$

яка задовольняє $\forall \mu \in X$ інтегральну тотожність

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(V_y \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial y} \mu_1 + W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \mu_2 \right) dxdy + \\
&+ \int_\Omega \left(a_1 \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial y} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right) dxdy + \\
&+ \int_0^l \alpha_1 \overline{T}(x,y) \mu_2(x,y) \Big|_{x=h} dy + \int_0^h \alpha_2 \overline{\Theta}(x,y) \mu_1(x,y) \Big|_{y=l} dx = \\
&= -l_1 \int_\Omega | \overline{T} + \widehat{T} |^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T} + \widehat{T} \right) - \left(\overline{\Theta} + \widehat{\Theta} \right) \right) (\mu_1 - \mu_1)\, dxdy - \\
&- \alpha \int_\Omega \left(\left(\overline{T} + \widehat{T} \right)^4 - \left(\overline{\Theta} + \widehat{\Theta} \right)^4 \right) (\mu_2 - \mu_1) + \int_\Omega f^* \mu dxdy - \\
&- \int_0^h \left(\alpha_2 \left(\widehat{\Theta} - T_s \right) + a_2 \frac{\partial \widehat{\Theta}}{\partial y} \right) \mu_1 \Big|_{y=l} dx - \int_0^l \left(\alpha_1 \left(\widehat{T} - T_s \right) + b_1 \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x} \right) \mu_2 \Big|_{x=h} dy,
\end{aligned} \tag{48}$$

де через f^* позначено елемент із X^*, який визначається інтегральною тотожністю

$$\int_\Omega f^* \mu dxdy = \int_\Omega \left(V_y \frac{\partial \widehat{\Theta}}{\partial y} \mu_1 + W_x \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x} \mu_2 \right) dxdy + \int_\Omega \left(a_1 \frac{\partial \widehat{\Theta}}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \widehat{\Theta}}{\partial y} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial \widehat{T}}{\partial y} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right) dxdy. \tag{49}$$

Співвідношення (48) має сенс $\forall \overline{\Theta}(x,y)$, $\overline{T}(x,y)$, $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$, що належать просторові

$$X = \overset{\circ\Gamma_2}{W_2^1}(\Omega) \cap L_p(\Omega) \times \overset{\circ\Gamma_1}{W_2^1}(\Omega) \cap L_p(\Omega), \quad p \ge 5, \tag{50}$$

де $\overset{\circ\Gamma_i}{W_2^1}$ — замикання в $W_2^1(\Omega)$ гладких функцій, рівних нулю на Γ_i $(i = 1,2)$ (замыкание в $W_2^1(\Omega)$ гладких функций, равных нулю на Γ_i $(i=1,2)$, closing in $W_2^1(\Omega)$ of smooth functions equal to 0 by Γ_i $(i=1,2)$), оскільки відповідно до нерівності Гельдера і результатів [5, гл. 1] такі функції набувають значення на межі Γ області Ω, які дорівнюють $\overline{\Theta}(\Gamma)$, $\overline{T}(\Gamma)$, $\mu_1(\Gamma)$, $\mu_2(\Gamma)$ відповідно. Ці значення на межі Γ є елементами простору $L_2(\Gamma)$.

Перетворимо (48) до вигляду

$$\begin{aligned}
&\langle A(\overline{y}), \mu \rangle = \left\langle F\left(\overline{y} + \widehat{y} \right), \mu \right\rangle - \langle A(\overline{y}), \mu \rangle + \\
&+ \int_0^h \left(\alpha_2 T_s - a_2 \frac{\partial \widehat{\Theta}}{\partial n} \right) \mu_1 \Big|_{y=l} dx + \int_0^l \left(\alpha_1 T_s - b_1 \frac{\partial \widehat{T}}{\partial n} \right) \mu_2 \Big|_{x=h} dy,
\end{aligned} \tag{51}$$

де A визначається білінійною формою

$$\begin{aligned}
\langle A(\overline{y}), \mu \rangle &= \int_\Omega \left(V_y \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial y} \mu_1 + W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \mu_2 \right) dxdy + \\
&+ \int_\Omega \left(a_1 \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial y} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right) dxdy + \\
&+ \int_0^h \alpha_1 \overline{\Theta}(x,y) \mu_1(x,y) \Big|_{y=l} dx + \int_0^l \alpha_1 \overline{T}(x,y) \mu_2(x,y) \Big|_{x=h} dy,
\end{aligned} \tag{52}$$

а оператор $F\left(\overline{y}+\hat{y}\right)\overset{\Delta}{=}\overline{F}(\overline{y})$ — формою

$$\left\langle \overline{F}(\overline{y}),\mu\right\rangle = l_1\int\limits_{\Omega}\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{\frac{2}{3}}\left(\left(\overline{T}+\hat{T}\right)-\left(\overline{\Theta}+\hat{\Theta}\right)\right)(\mu_2-\mu_1)\,dxdy - \\ -\alpha\int\limits_{\Omega}\left(\left(\overline{T}+\hat{T}\right)^4-\left(\overline{\Theta}+\hat{\Theta}\right)^4\right)(\mu_2-\mu_1)\,dxdy. \tag{53}$$

Справедливі такі властивості оператора А, що визначається формою (52). Оператор А є лінійним обмеженим коерцитивним оператором, що діє з $X_1=\left[W_2^1(\Omega)\right]^2$ в X_1^*, а оператор $\overline{F}: X_2\to X_2^*$, що визначається формою (53) $X_2=\left[L_p(\Omega)\right]^2$, $X_2^*=\left[L_q(\Omega)\right]^2$, є обмеженим і демінеперервним, $1/p+1/q=1$.

Доведення здійснюється аналогічно доведенню властивостей оператора, породженого крайовою задачею (6), (7).

Покажемо тільки, що A – коерцитивний оператор.

$$\left\langle A(\overline{y}),\overline{y}\right\rangle = \int\limits_{\Omega}\left(V_y\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\overline{\Theta}+W_x\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\overline{T}\right)dxdy + \\ +\int\limits_{\Omega}\left(a_1\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}+a_2\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}+b_1\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}+b_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\right)dxdy + \\ +\int\limits_0^h\alpha_2\overline{\Theta}^2(x,y)\Big|_{y=l}dx+\int\limits_0^l\alpha_1\overline{T}^2(x,y)\Big|_{x=h}dy. \tag{54}$$

Після інтегрування по частинах першого доданку правої частини рівняння, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}\left(V_y\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\overline{\Theta}\right)dxdy=\frac{V_x}{2}\int\limits_0^h\overline{\Theta}^2(x,y)\Big|_{y=l}dx; \\ \int\limits_{\Omega}\left(W_x\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\overline{T}\right)dxdy=\frac{W_x}{2}\int\limits_0^l\overline{T}^2(x,y)\Big|_{y=l}dy. \tag{55}$$

Позначимо $m_1=\min\left\{\inf\limits_{\Omega}a_i(x,y),\ \inf\limits_{\Omega}b_i(x,y),\ i=1,2\right\}$; $m_2=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Тоді

$$\left\langle \mathrm{A}(\overline{y}),\overline{y}\right\rangle \ge \frac{V_x}{2}\int\limits_0^h\overline{\Theta}^2(x,y)\Big|_{y=l}dx+\frac{W_x}{2}\int\limits_0^l\overline{T}^2(x,y)\Big|_{y=l}dy + \\ +m_1\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\overline{y}}{\partial x}\frac{\partial\overline{y}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{y}}{\partial y}\frac{\partial\overline{y}}{\partial y}\right)dxdy+m_2\left(\int\limits_0^h\overline{\Theta}^2(x,y)\Big|_{y=l}dx+\int\limits_0^l\overline{T}^2(x,y)\Big|_{y=h}dy\right)\ge \\ \ge\left(\frac{V_y}{2}+m_2\right)\left\|\overline{\Theta}\right\|_1^2+\left(\frac{W_x}{2}+m_1\right)\left\|\overline{T}\right\|_1^2+m_1\left\|\overline{y}\right\|^2, \tag{56}$$

де $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{X_1}$; $\|\cdot\|_1=\|\cdot\|_{L_2(\partial\Omega)}$; за умови позитивності значень V_y, W_x, m_1, m_2

$$\left\langle \mathrm{A}(\overline{y}),\overline{y}\right\rangle \ge m_1\left\|\overline{y}\right\|^2. \tag{57}$$

Отже, А — коерцитивний оператор.

Перепишемо (48) у вигляді операторного рівняння

$$\mathrm{A}(\overline{y})=f,\ \ f\in X^* \tag{58}$$

у просторі *X*, де $\mathsf{A}(\bar{y}) = \mathrm{A}(\bar{y}) - \bar{F}(\bar{y})$:

$$\langle f, \mu \rangle = -\langle \mathrm{A}(\bar{y}), \mu \rangle + \int_0^h \left(\alpha_2 T_s - a_2 \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial n} \right) \mu_1 \Bigg|_{y=c} dx + \int_0^l \left(\alpha_1 T_s - b_1 \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial n} \right) \mu_2 \Bigg|_{x=h} dy. \tag{59}$$

З попередніх викладок можна зробити такий висновок: якщо коефіцієнти крайової задачі (43)—(45) задовольняють умови $a_i(x,y) \ge \lambda_1 > 0$, $b_i(x,y) \ge \lambda_2 > 0$ майже всюди в Ω, $a_i, b_i \in L_\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$, то рівняння (57) має розв'язок для кожного $f \in X^*$ і множина його розв'язків для кожного *f* слабко компактна, а задача (43)—(45) має розв'язок $\bar{y}$, який належить просторові

$$X = \overset{\circ \Gamma_2}{W_2^1}(\Omega) \cap L_p(\Omega) \times \overset{\circ \Gamma_1}{W_2^1}(\Omega) \cap L_p(\Omega), \; p \ge 5. \tag{60}$$

При цьому оператор $\mathsf{A} : X \to X^*$, породжений задачею (43)—(45):

а) обмежений;

б) коерцитивний;

в) є оператором з напівобмеженою варіацією;

г) має властивість (M).

Доведення пунктів а), б) і в) проводиться аналогічно задачі (6), (7).

Покажемо тільки, що A — оператор з напівобмеженою варіацією.

З визначення A випливає, що

$$\left\langle \bar{\mathsf{A}}(\bar{y}_1) - \bar{\mathsf{A}}(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}(\bar{y}_1) - \mathrm{A}(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle - \left\langle \bar{F}(\bar{y}_1) - \bar{F}(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle. \tag{61}$$

Далі враховуємо властивості оператора A:

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathrm{A}(\bar{y}_1) - \mathrm{A}(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle \ge \\ &\ge \frac{V_y}{2} \int_0^h \left(\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2 \right)^2 \Bigg|_{y=l} dx + \frac{W_x}{2} \int_0^l \left(\bar{T}_1 - \bar{T}_2 \right)^2 \Bigg|_{x=h} dy + \\ &+ m_1 \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial (\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial (\bar{T}_1 - \bar{T}_2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (\bar{T}_1 - \bar{T}_2)}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy + \\ &+ m_2 \left(\int_0^h \left(\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2 \right)^2 \Bigg|_{y=l} dx + \int_0^l \left(\bar{T}_1 - \bar{T}_2 \right)^2 \Bigg|_{x=h} dy \right) \ge 0, \end{aligned} \tag{62}$$

де $m_1 = \min \left\{ \inf_\Omega a_i(x,y); \; \inf_\Omega b_i(x,y), \; i = 1,2 \right\}$, $m_2 = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Для другого доданка правої частини (61) справедлива оцінка, яка аналогічна отриманій у вищенаведених твердженнях,

$$-\left\langle \bar{F}(\bar{y}_1), \bar{F}(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle \ge -C\left(R; \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|'_X \right). \tag{63}$$

Тоді остаточно

$$\left\langle \mathsf{A}(\bar{y}_1) - \mathsf{A}(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle \ge -C\left(R; \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|'_X \right), \tag{64}$$

де $\|\cdot\|'_X = \|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^2}$, $p \ge 5$, компактна щодо норми $\|\cdot\|_X$ (компактная относительно нормы $\|\cdot\|_X$; compact as for the norm $\|\cdot\|_X$).

Функція *C* визначена формулою (37).

Постановка задачи и построение математической модели

Рассмотрим стационарный режим работы конвейерной машины, который в зоне обжига опишем системой дифференциальных уравнений в частных производных (1), а коэффициенты $a_i(x,y),\ b_i(x,y)\ \ (i=1,2)$ удовлетворяют условиям (2).

На границе области $\partial\Omega$ заданы краевые условия для газа и твердого вещества (3) и ограничения на состояние (4).

Необходимо доказать разрешимость нелинейной краевой задачи (1), (3) и показать, в каких классах функций существует решение.

Пусть достаточно регулярные функции $\widehat{T}(x,y)$ и $\widehat{\Theta}(x,y)$ удовлетворяют условиям (5).

Тогда для функций $\overline{T}=T-\widehat{T},\ \ \overline{\Theta}=\Theta-\widehat{\Theta}$ краевая задача (1), (3) будет иметь вид (6) с соответствующими краевыми условиями (7) и ограничением на состояние (8).

Функцию $\overline{Y}=\left\{\overline{\Theta}(x,y),\overline{T}(x,y)\right\}$ принадлежащую пространству X, $X=\left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap L_p(\Omega)\right]^2$ $p\ge 5$ и удовлетворяющую $\forall\mu\in X,\ \mu=(\mu_1;\mu_2)$ интегральному тождеству (9) назовем обобщенным решением задачи (6), (7)

Соотношение (9) имеет смысл для всех $\overline{\Theta},\overline{T},\mu_1,\mu_2\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap L_p(\Omega),\ \ p\ge 5$ где $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева [2, 4], так как согласно неравенству Гельдера такие функции принимают значение на границе Γ области Ω, равные $\overline{\Theta}(\Gamma),\ \overline{T}(\Gamma),\ \mu_1(\Gamma),\ \mu_2(\Gamma)$ соответственно, причем эти значения на границе Γ являются элементами пространства $L_2(\Gamma)$. Преобразуем (9) к виду (10), где оператор A определяется своей билинейной формой (11), а оператор $\overline{F}(\overline{y})\overset{\Delta}{=}F(\overline{y}+\hat{y})$ определяется полулинейной формой (12).

Необходимо отметить, что поскольку соотношение (9) справедливо при любых $\mu\in X=\left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p\ge 5$, то оно эквивалентно операторному уравнению (14) в пространстве X, где $\mathrm{A}(\overline{y})=\mathrm{A}(\overline{y})-\overline{F}(\overline{y}),\ \ f=-\mathrm{A}(\hat{y}),\ \ X=\left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap L_p(\Omega)\right]^2,\ \ p\ge 5$.

Докажем, что оператор А, определяющийся формой (11), является линейным, ограниченным, монотонным, коэрцитивным оператором, действующим из пространства $X_1=\left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right]^2$, в пространство $X_1^*=\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(\Omega)\right]$, а оператор $\overline{F}$, определяющийся формой (12), является ограниченным деминепрерывным оператором, действующим из $X_2=\left[L_p(\Omega)\right]^2,\ p\ge 5$ в $X_2^*=\left[L_p(\Omega)\right]^2,\ \ 1/p+1/q=1$.

Действительно, из существования интегралов (11) и неравенства Гельдера следует, что А — линейный оператор из $X_1=\left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right]^2$, в $X_1^*=\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(\Omega)\right]$. Покажем, что для А справедливы оценки (15), (16).

Учитывая ограниченность коэффициентов $a_i(x,y),\ b_i(x,y),\ \ i=1,2$ и то, что V_y,W_x — заданные константы, оцениваем $\|\mathrm{A}\|$: (17), (18).

Далее используем неравенство Гельдера. Тогда (19).

Это подтверждает справедливость (15).

Учитывая линейность А, запишем (20), откуда вытекает справедливость (16). Кроме того, (21), (22), поскольку (23).

Следовательно, А — коэрцитивный оператор.

Рассмотрим нелинейные части системы (5). Из неравенства Гельдера следует, что интеграл в

(12) имеет смысл, если функции $\overline{\Theta}, \overline{T}, \mu_1, \mu_2$, принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, $p \geq 5$, т. е. $\overline{y} = (\overline{\Theta}, \overline{T})$,

Покажем, что $\overline{F}$ переводит ограниченные множества из X_2 в ограниченные множества в $X_2^* = \left[L_p(\Omega)\right]^2$, $1/p + 1/q = 1$ и, как оператор из X_2 в X_2^*, деминепрерывен. Покажем, что (24).

Для этого достаточно показать, что $\overline{f}_1\left(\overline{y}(\cdot)\right) \in L_p(\Omega)$. Функция $\overline{f}_1(\overline{y})$ является измеримой и для нее выполняются неравенства (25). Отсюда следует (26).

Тогда при $p = 5$, $q = \dfrac{5}{4}$ (27).

Поскольку функции $\overline{T}, \widehat{T}, \overline{\Theta}, \widehat{\Theta} \in L_p(\Omega)$, $p \geq 5$, то функция $\left|\overline{f}_1\left(\overline{\Theta}, \overline{T}\right)\right|^q$ имеет интегрированную по Лебегу мажоранту. Отсюда следует, что $\overline{f}_1\left(\overline{\Theta}, \overline{T}\right) \in L_p(\Omega)$ и $\overline{F}\left(\overline{y}\right) \in \left[L_p(\Omega)\right]^2 = X_2^*$. Из доказанного неравенства также получаем $\left\|\overline{F}(\overline{y})\right\|_{X_2^*} \leq K^* = \text{const}$ для $\left\|\overline{y}\right\|_{X_2} \leq \overline{K}^* = \text{const}$, т. е. $\overline{F}$ — ограниченный оператор.

Заметим, что для функции $\overline{f}_1$, определенной на $\Omega \times \mathbf{R}$, выполняются следующие условия:

1) для почти всех $\overline{x} = (x; y) \in \Omega$ функции $\xi \to \overline{f}_1(\overline{x}, \xi)$ непрерывны на $\mathbf{R}^2$;

2) для каждого $\xi \in \mathbf{R}^2$ функции $\overline{x} \to \overline{f}_1(\overline{x}, \xi)$ измеримы;

3) для всех $\xi = (\xi_1; \xi_2) \in \mathbf{R}^2$ и для почти всех $\overline{x} \in \Omega$ справедливо неравенство (28).

Рассмотрим последовательность $\left\{\overline{y}_n\right\} \in X_2$ такую, что $\left\|\overline{y}_n - \overline{y}\right\|_{X_2} \to 0$. В силу ограниченности $\overline{F}$ множество $\left\{\overline{F}(\overline{y}_n)\right\}$ ограничено и, значит, слабо предкомпактно. Поэтому для доказательства того, что $\overline{F}(\overline{y})$ является слабым пределом последовательности $\left\{\overline{F}(\overline{y}_n)\right\}$, достаточно показать, что $\overline{F}(\overline{y}_{n_k}) \to \overline{F}(\overline{y})$ для каждой слабо сходящейся последовательности $\left\{\overline{F}(\overline{y}_n)\right\}$. Положим, z — слабый предел такой последовательности $\left\{\overline{F}(\overline{y}_n)\right\}$. Тогда существует подпоследовательность $\left\{\upsilon_j\right\}$ последовательности $\left\{\overline{y}_{n_k}\right\}$, сходящаяся к $\overline{y}$ почти всюду в Ω. Вследствие непрерывности функции $(\overline{x}; \xi) \to \overline{f}_1(\overline{x}; \xi)$ по $\xi \in \mathbb{R}^2$ имеем $\overline{F}(\upsilon_j(\overline{x})) \to \overline{F}(\overline{y}(\overline{x}))$ почти всюду в Ω. Вместе с тем $\left\{\overline{F}(\upsilon_j)\right\}$ как подпоследовательность последовательности $\left\{\overline{F}(\overline{y}_n)\right\}$ слабо сходится к z. Значит, $\overline{F}(\overline{y}) = z$, т. е. $\overline{F}(\overline{y}_{n_k}) \to \overline{F}(\overline{y})$ в X_2^* и оператор $\overline{F}$ — деминепрерывен.

Рассмотрим оператор $\mathbf{A}: X \to X^*$, порожденный задачей (6), (7), где $X = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p \geq 5$, $X^* = \left[W_2^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)\right]$, $1/p + 1/q = 1$. Оператор $\mathbf{A}$ является:

а) ограниченным;

б) коэрцитивным, т. е. для него выполняется условие (29);

в) оператором с полуограниченной вариацией, т. е. для произвольных $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \in X$ таких, что $\left\|\overline{y}_1\right\|_X \leq R$, $\left\|\overline{y}_2\right\|_X \leq R$ справедливо неравенство (30).

г) обладает свойством (М): из того, что $\overline{y}_n, \to \overline{y}\left(\overline{y}_n, \overline{y} \in \mathrm{D}(\mathbf{A}) \subset X\right)$ слабо в X, $\mathbf{A}\left(\overline{y}_n\right) \to \mathrm{X}$ слабо в X* и выполняется неравенство $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\langle \mathbf{A}\left(\overline{y}_n\right), \overline{y}_n \right\rangle_X \leq \left\langle \mathrm{X}, \overline{y} \right\rangle_X$ следует $\mathrm{X} = \mathbf{A}\left(\overline{y}\right)$.

Справедливость утверждения а) следует непосредственно из свойства A и $\overline{F}$. Далее докажем справедливость б). Для этого изучим форму (31).

Форма $\left\langle \mathbf{A}\left(\overline{y}\right), \overline{y} \right\rangle_X = \left\langle A\left(\overline{y}\right), \overline{y} \right\rangle_{X_q}$ коэрцитивная. Оценим $\left(-\left\langle \overline{F}(\overline{y}), \overline{y} \right\rangle_{X_2}\right)$ (32).

Выбирая функции $\widehat{T}$ и $\widehat{\Theta}$ таким образом, чтобы удовлетворить условие $\left(\overline{T} - \overline{\Theta}\right)\left(\widehat{T} - \widehat{\Theta}\right) \geq 0$ почти всюду в Ω, получаем оценку (33).

Подставив полученную оценку в (31), приходим к справедливости утверждения б). Покажем, что A — оператор с полуограниченной вариацией. Из определения A следует (34).

Учитывая монотонность оператора А, получаем (35).

Рассмотрим второе слагаемое правой части (34). Для удобства выкладок обозначим $\psi = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \ \left(\psi = \left(\psi_1;\psi_2\right)\right)$; $\psi_1 = \bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2$; $\psi_2 = \bar{T}_1 - \bar{T}_2$: тогда (36), где (37).

Здесь $\|\cdot\|'_X = \|\cdot\| = \|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^2}$, $p \ge 5$.

По теореме вложения Соболева норма $\|\cdot\|'_X = \|\cdot\| = \|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^2}$, $p \ge 5$, компактная относительно нормы $\|\cdot\|_X$. Тогда (38).

Подставляя последнюю формулу в (34), приходим к справедливости утверждения в).

Доказательство г) непосредственно следует из утверждения [4]:

если $\mathbf{A}: X \to X$ — оператор с полуограниченной вариацией, то следующие условия эквивалентны:

а) оператор $\mathbf{A}$ радиально непрерывен на X;

б) из $\langle f - \mathbf{A}(\xi), \bar{y} - \xi\rangle_X \ge -C\left(R; \|\bar{y} - \xi\|'_X\right) \forall \xi \in X \ \left(\|\xi\|_X \le R; \|\bar{y}\|_X \le R\right)$ следует $\mathbf{A}(\bar{y}) = f$;

в) оператор $\mathbf{A}$ обладает свойством (М);

г) оператор $\mathbf{A}$ $*$ — деминепрерывен на *X*.

Таким образом, рассмотрен стационарный режим работы конвейерной обжиговой машины, предполагая, что известны значения функций $\Theta(x,y)$ и $T(x,y)$ на границе области Ω. Однако на практике в ряде режимных зон мы не имеем возможности получить эти значения из-за отсутствия на всей границе области Ω измерительных приборов, что в свою очередь вызвано рядом существующих технических сложностей. В действительности, известно распределение температуры газа лишь на границе $\Gamma_1 = \{0\}\times(0,l): T\big|_{\Gamma_1} \equiv T(0,y) = \varphi_1(y)$, где он входит в слой окатышей, и распределение температуры окатышей на границе $\Gamma_2 = (0,h)\times\{0\}: \Theta\big|_{\Gamma_2} \equiv \Theta(x,0) = \eta_3(x)$, где слой окатышей входит в зону обжига. Поэтому целесообразно рассмотреть смешанную краевую задачу вида (39) в области $\Omega = (0,h)\times(0,l)$, где $V_y, W_x, \alpha, a_i, b_i, i = 1,2$, такие же, как в предыдущем случае, а краевые условия на $\partial\Omega$ для $T(x,y)$ и $\Theta(x,y)$ имеют вид (40), (41).

Дальше докажем разрешимость смешанной краевой задачи (39)—(41) и покажем, каким классам функций принадлежит решение $\bar{y}$.

Пусть достаточно регулярные функции $\hat{T}(x,y)$ и $\hat{\Theta}(x,y)$ удовлетворяют условиям (42).

Тогда для функций $\bar{T} = T - \hat{T}$; $\bar{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ смешанная краевая задача (39)—(41) имеет вид (43) с соответствующими краевыми условиями (44), (45), а также ограничением на состояние (46).

Назовем обобщенным решением задачи (43)—(45) функцию $\bar{Y} = \left(\bar{\Theta}(x,y);\ \bar{T}(x,y)\right)$ из пространства (47), удовлетворяющую $\forall \mu \in X$ интегральному тождеству (48), где через f^* обозначен элемент из X^*, определяемый интегральным тождеством (49).

Соотношение (48) имеет смысл $\forall \bar{\Theta}(x,y), \bar{T}(x,y), \mu_1(x,y), \mu_2(x,y)$, принадлежащих пространству (50), поскольку согласно неравенству Гельдера и результатам [5, гл. 1] такие функции принимают значения на границе Γ области Ω, равные $\bar{\Theta}(\Gamma)$, $\bar{T}(\Gamma)$, $\mu_1(\Gamma)$, $\mu_2(\Gamma)$ соответственно. Эти значения на границе Γ являются элементами пространства $L_2(\Gamma)$.

Преобразуем (48) к виду (51), где A определяется билинейной формой (52), а оператор $F\left(\bar{y} + \hat{y}\right) \stackrel{\Delta}{=} \bar{F}(\bar{y})$ — формой (53).

Справедливы следующие свойства оператора А, определяющегося формой (52). Оператор А является линейным ограниченным коэрцитивным оператором, действующим из $X_1 = \left[W_2^1(\Omega)\right]^2$ в X_1^*, а оператор $\bar{F}: X_2 \to X_2^*$, определяющийся формой (53) $X_2 = \left[L_p(\Omega)\right]^2$, $X_2^* = \left[L_q(\Omega)\right]^2$, является ограниченным и деминепрерывным, $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство осуществляется аналогично доказательству свойств оператора, порожденного краевой задачей (6), (7).

Покажем только, что *A* — коэрцитивный оператор: (54).

После интегрирования по частям первого слагаемого правой части равенства, получим (55).

Обозначим $m_1 = \min\left\{\inf\limits_{\Omega} a_i(x,y), \inf\limits_{\Omega} b_i(x,y), \quad i=1,2\right\}$; $m_2 = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Тогда (56).

В силу положительности значений V_y, W_x, m_1, m_2 – (57). Следовательно, А – коэрцитивный оператор.

Перепишем (48) в виде операторного уравнения (58) в пространстве X, где $\mathbf{A}(\bar{y}) = \mathrm{A}(\bar{y}) - \bar{F}(\bar{y})$: (59).

Из предыдущего можно сделать заключение, что если коэффициенты краевой задачи (43)—(45) удовлетворяют условиям $a_i(x,y) \ge \lambda_1 > 0$, $b_i(x,y) \ge \lambda_2 > 0$ почти всюду в Ω; $a_i, b_i \in L_\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$, то уравнение (22) разрешимо при любом $f \in X^*$ и множество его решений при каждом f слабо компактно, а задача (43)—(45) имеет решение $\bar{y}$, принадлежащее пространству (60).

При этом оператор $\mathbf{A}: X \to X^*$, порожденный задачей (43)—(45),:

а) ограниченный;

б) коэрцитивныйй;

в) оператор с полуограниченной вариацией;

г) обладает свойством (М).

Доказательство пунктов а), б) и в) проводится аналогично задаче (6), (7).

Покажем только, что $\mathbf{A}$ — оператор с полуограниченной вариацией.

Из определения $\mathbf{A}$ следует, что (61).

Учитываем свойства оператора А: (62).

Для второго слагаемого правой части (61) справедлива оценка, аналогичная полученной в вышеприведенных утверждениях, (63). Тогда окончательно (64).

Функция C определена формулой (37).

Task setting and mathematic model construction

Let's consider the stationary condition of conveyer machine functioning, describing it in the roasting zone by the system of differential equations in partial derivatives (1), and factors $a_i(x,y)$, $b_i(x,y)$ $(i = 1, 2)$ meet the conditions (2).

The marginal conditions for gas and solid substance (3) are set at the area boundary $\partial\Omega$.

It is necessary to prove the solvability of non linear marginal task (1), (3) and show, in what types of functions the solution exists.

Let the sufficiently regular functions $\hat{T}(x,y)$ and $\hat{\Theta}(x,y)$ satisfy the conditions (5).

Then for functions $\bar{T} = T - \hat{T}$, $\bar{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ the marginal task (1), (3) will become (6) with appropriate marginal conditions (7) and limitation of condition (8).

Function $\bar{Y} = \{\bar{\Theta}(x,y), \bar{T}(x,y)\}$, which belongs to the space X, $X = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p \ge 5$ and satisfy $\forall \mu \in X$, $\mu = (\mu_1; \mu_2)$ integral identity (9) we call the generalized task solution (6), (7).

The correlation (9) has sense for all $\bar{\Theta}, \bar{T}, \mu_1, \mu_2 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, $p \ge 5$ where $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — Sobolev space [2, 4], since according to the Gelder inequality such functions take on values Г of area Ω equal to $\bar{\Theta}(\Gamma), \bar{T}(\Gamma), \mu_1(\Gamma), \mu_2(\Gamma)$ correspondingly, at the same time these values at the boundary Г are the elements of space $L_2(\Gamma)$. Let's change (9) to the form (10), where operator A is defined by its bilinear form (11), and operator $\bar{F}(\bar{y}) \overset{\Delta}{=} F(\bar{y} + \hat{y})$ is defined by the semi linear form (12).

It should be mentioned that as the correlation (9) is true at each $\mu \in X = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p \ge 5$, so it is equivalent to the operator equation (14) within space X, where $\mathrm{A}(\bar{y}) = \mathrm{A}(\bar{y}) - \bar{F}(\bar{y})$, $f = -\mathrm{A}(\hat{y})$, $X = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p \ge 5$ **.**

Let's prove that operator A, defined by the form (11) is linear, limited, monotonous, coercive operator, acting from the space $X_1 = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \right]^2$, to the space $X_1^* = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(\Omega) \right]$, and operator $\bar{F}$, defined by form (12), (13) is limited demicontinuous operator acting from $X_2 = \left[L_p(\Omega) \right]^2$, $p \geq 5$ to $X_2^* = \left[L_p(\Omega) \right]^2$, $1/p + 1/q = 1$.

Indeed from the existence of integrals (11) and Gelder inequality it follows that A is linear operator from $X_1 = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \right]^2$, to $X_1^* = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(\Omega) \right]$. Let's show that evaluations (15), (16) are true for A.

Considering the limitation of factors $a_i(x,y), b_i(x,y),\ i = 1,2$ and the fact that V_y, W_x – set constants, we evaluate $\|\mathrm{A}\|$: (17), (18).

Further we use the Gelder inequality. Then (19).

Considering the linearity of A, we write (20), from which the correctness (16) follows. Besides, (21), (22) because (23).

Therefore A – is a coercive factor.

Let's consider the non linear parts of the system (5). It follows from the Gelder inequality, that integral in (12) has sense provided the functions $\bar{\Theta}, \bar{T}, \mu_1, \mu_2$ belong to space $L_p(\Omega),\ p \geq 5,$ that is $\bar{y} = (\bar{\Theta}, \bar{T})$.

We show that $\bar{F}$ change limited multitudes to the $X_2^* = \left[L_p(\Omega) \right]^2$, $1/p + 1/q = 1$ and as the operator from X_2 to X_2^* is demicontinuous. Lets show, that (24).

For that it is enough to show, that $\bar{f}_1(\bar{y}(\cdot)) \in L_p(\Omega)$. Function $\bar{f}_1(\bar{y})$ is measurable and for it the inequalities (25) hold true. Hence it follows (26).

Then when $p = 5,\ q = \dfrac{5}{4}$ (27).

As functions $\bar{T}, \hat{T}, \bar{\Theta}, \hat{\Theta} \in L_p(\Omega),\quad p \geq 5$, then function $\left| \bar{f}_1(\bar{\Theta}, \bar{T}) \right|^q$ has integrated one according to Lebeg majorant. Hence follows that $\bar{f}_1(\bar{\Theta}, \bar{T}) \in L_p(\Omega)$ and $\bar{F}(\bar{y}) \in \left[L_p(\Omega) \right]^2 = X_2^*$. From the proved inequality we also get $\|\bar{F}(\bar{y})\|_{X_2^*} \leq K^* = \text{const}$ for $\|\bar{y}\|_{X_2} \leq \bar{K}^* = \text{const}$ that is $\bar{F}$ – is limited operator.

As it easy to see the following conditions are hold true for the function $\bar{f}_1$ which is defined at $\Omega \times \mathbf{R}$:

1) for almost all $\bar{x} = (x; y) \in \Omega$ functions $\xi \to \bar{f}_1(\bar{x}, \xi)$ are continuous at $\mathbf{R}^2$;

2) for each $\xi \in \mathbf{R}^2$ functions $\bar{x} \to \bar{f}_1(\bar{x}, \xi)$ are measurable;

3) for all $\xi = (\xi_1; \xi_2) \in \mathbf{R}^2$ and for almost all $\bar{x} \in \Omega$ the inequality (28) holds true.

Let's consider such sequence $\{\bar{y}_n\} \in X_2$ that $\|\bar{y}_n - \bar{y}\|_{X_2} \to 0$. In view of the limitation of $\bar{F}$ the multitude $\{\bar{F}(\bar{y}_n)\}$ is limited and, therefore, poorly pre-compact. So for the proof of the fact that $\bar{F}(\bar{y})$ is the poor limit of sequence $\{\bar{F}(\bar{y}_n)\}$, it is enough to show that $\bar{F}(\bar{y}_{n_k}) \to \bar{F}(\bar{y})$ for each poorly converging sequence $\{\bar{F}(\bar{y}_n)\}$. Let us assume that z – is a poor limit of such sequence $\{\bar{F}(\bar{y}_n)\}$. Then there exists a pre-sequence $\{\upsilon_j\}$ of the sequence $\{\bar{y}_{n_k}\}$ converging to $\bar{y}$ almost everywhere in Ω As s result of continuity of function $(\bar{x}; \xi) \to \bar{f}_1(\bar{x}; \xi)$ by $\xi \in \mathbf{R}^2$ we have $\bar{F}(\upsilon_j(\bar{x})) \to \bar{F}(\bar{y}(\bar{x}))$ almost everywhere in Ω. At the same time $\{\bar{F}(\upsilon_j)\}$ as pre-sequence of sequence $\{\bar{F}(\bar{y}_n)\}$ poorly converge to z. Therefore $\bar{F}(\bar{y}) = z$, that is $\bar{F}(\bar{y}_{n_k}) \to \bar{F}(\bar{y})$ in X_2^* and operator $\bar{F}$ – is demi-continuous.

Let's consider the operator $\mathbf{A}: X \to X^*$, generated by the task (6), (7), where

$X = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega) \right]^2$, $p \geq 5$, $X^* = \left[W_2^1(\Omega) \cap L_q(\Omega) \right]$, $1/p + 1/q = 1$. Operator **A** is:

a) limited;

b) coercive, that is the condition (29) holds true for it;

c) operator having semi-limited variation, that is for such arbitrary $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in X$ that $\|\bar{y}_1\|_X \leq R$, $\|\bar{y}_2\|_X \leq R$ the inequality (30) holds true.

d) has the property (M): from $\bar{y}_n, \to \bar{y}\left(\bar{y}_n, \bar{y} \in \mathrm{D}(\mathbf{A}) \subset X\right)$ is poor in X, $\mathbf{A}(\bar{y}_n) \to \mathrm{X}$ is poor in X* and the inequality $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\langle \mathbf{A}(\bar{y}_n), \bar{y}_n \right\rangle_X \leq \left\langle \mathrm{X}, \bar{y} \right\rangle_X$ holds true it follows $\mathrm{X} = \mathbf{A}(\bar{y})$.

The truth of statement a) follows directly from the property A and $\bar{F}$. Then we prove the truth b). With this purpose we examine form (31).

Form $\left\langle \mathbf{A}(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle_X = \left\langle A(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle_{X_q}$ is coercive. Let's evaluate $\left(-\left\langle \bar{F}(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle_{X_2} \right)$ (32).

When choosing functions $\hat{T}$ and $\hat{\Theta}$ in such a way to satisfy the condition $\left(\bar{T} - \bar{\Theta}\right)\left(\hat{T} - \hat{\Theta}\right) \geq 0$ $\left(\bar{T} - \bar{\Theta}\right)\left(\hat{T} - \hat{\Theta}\right) \geq 0$ almost everywhere in Ω, we get the evaluation (33).

When putting the obtained evaluation to (31), we come to the truth of statement b). Let's show that A — is operator with semi-limited variation. From the definition A follows (34).

Considering the monotony of operator A, we get (35).

Let's consider the second item of the right part of (34). For the convenience of computations we designate $\psi = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$ $\left(\psi = \left(\psi_1; \psi_2\right)\right)$; $\psi_1 = \bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2$; $\psi_2 = \bar{T}_1 - \bar{T}_2$: (36), where (37).

Here $\|\cdot\|'_X = \|\cdot\| = \|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^2}$, $p \geq 5$.

According to the Sobolev enclosure theorem, the norm $\|\cdot\|'_X = \|\cdot\| = \|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^2}$, $p \geq 5$, is compact as for the norm $\|\cdot\|_X$. Then (38).

When putting the last formula to (34), we come to the truth of statement c).

The proof of d) directly follows from statement [4]:

in case $\mathbf{A}: X \to X$ — operator with semi limited variation, then the next conditions are equivalent:

a) operator **A** is radial continuous at X;

b) from $\left\langle f - \mathbf{A}(\xi), \bar{y} - \xi \right\rangle_X \geq -C\left(R; \|\bar{y} - \xi\|'_X\right) \forall \xi \in X$ $\left(\|\xi\|_X \leq R; \|\bar{y}\|_X \leq R\right)$ follows $\mathrm{A}(\bar{y}) = f$;

c) operator **A** has a property (M);

d) operator $\mathbf{A}*$ — is demi-continuous at X.

Thus there the stationary functioning condition of conveyer roasting machine, was considered assuming the fact, that values of functions $\Theta(x, y)$ and $T(x, y)$ are known at the boundary of area Ω. But in practice in several conditions zones we couldn't have possibility to obtain such values over the absence at all boundary of area Ω the measuring devices, which, in part, induced be several significant technical complexities. In reality, it is known only the distribution of gas temperature is at the boundary $\Gamma_1 = \{0\} \times (0, l) : T|_{\Gamma_1} \equiv T(0, y) = \varphi_1(y)$, where it enters the pellet layer, and the pellet temperature distribution at the boundary $\Gamma_2 = (0, h) \times \{0\} : \Theta|_{\Gamma_2} \equiv \Theta(x, 0) = \eta_3(x)$, where the pellet layer enters the roasting zone. Therefore it is expedient to consider the mixed marginal task of a kind (39) at the area $\Omega = (0, h) \times (0, l)$, where V_y, W_x, α, a_i, b_i, $i = 1, 2$, are the same as in previous case, and the marginal conditions at $\partial\Omega$ for $T(x, y)$ and $\Theta(x, y)$ are of kind (40), (41).

Then we prove the solvability of mixed marginal task (39)—(41) and show, to what types of functions the solution $\bar{y}$ belongs.

Let enough regular functions $\hat{T}(x, y)$ and $\hat{\Theta}(x, y)$ satisfy the conditions (42).

Then for functions $\bar{T} = T - \hat{T}$; $\bar{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ mixed marginal task (39)—(41) has a kind (43) with appropriate marginal conditions (44), (45), and the limitation of condition (46).

Let's call the generalized task solution (43)—(45) function $\bar{Y} = \left(\bar{\Theta}(x, y); \bar{T}(x, y)\right)$ from space

(47), satisfying $\forall\mu \in X$ integral identity (48), where f^* is the element from X^*, defined by integral identity (49).

Correlation (48) has sense $\forall\bar{\Theta}(x,y), \bar{T}(x,y), \mu_1(x,y), \mu_2(x,y)$, belonging to space (50), where $\overset{\circ\Gamma_i}{W_2^1}$ - is closing in $W_2^1(\Omega)$ of smooth functions, equal to zero at Γ_i $(i=1,2)$, as according to the Gelder inequality and the results [5, Chapter 1] such functions take on value at the boundary Γ of area Ω, equal to $\bar{\Theta}(\Gamma)$, $\bar{T}(\Gamma)$, $\mu_1(\Gamma)$, $\mu_2(\Gamma)$ accordingly. These values at the boundary Γ are the elements of space $L_2(\Gamma)$.

Let's change (48) to the kind (51), where A is defined by bilinear form (52), and operator $F\left(\bar{y}+\hat{y}\right) \overset{\Delta}{=} \bar{F}(\bar{y})$ — by form (53).

The following properties of operator hold true A, which is defined by form (52). Operator A is linear limited coercive operator, acting from $X_1 = \left[W_2^1(\Omega)\right]^2$ to X_1^*, and operator $\bar{F} : X_2 \to X_2^*$, defined by form (53) $X_2 = \left[L_p(\Omega)\right]^2$, $X_2^* = \left[L_q(\Omega)\right]^2$, is limited and demi continuous, $1/p + 1/q = 1$.

The proof is conducted in the same way as the proof of operator properties, which was generated by marginal task (6), (7).

Let's only show that A – is a coercive operator: (54).

After integration by parts of the first item of the right part of the equality we get (55).

Let's designate $m_1 = \min\left\{\inf\limits_{\Omega} a_i(x,y), \inf\limits_{\Omega} b_i(x,y),\ \ i=1,2\right\}$; $m_2 = \min\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Then (56).

In the view of the positivity of values V_y, W_x, m_1, m_2 – (57). As a consequence, A – coercive operator.

Rewrite (48) in the form of operator equation (58) in the space X, where $\mathbf{A}(\bar{y}) = \mathrm{A}(\bar{y}) - \bar{F}(\bar{y})$: (59).

Following the previous we can make a conclusion, that in case the marginal task factors (43)—(45) satisfy the conditions $a_i(x,y) \ge \lambda_1 > 0,\ b_i(x,y) \ge \lambda_2 > 0$ almost everywhere in Ω; $a_i,\ b_i \in L_\infty(\Omega),\ \ i = 1,\ 2$, then equation (22) is solvable at any $f \in X^*$ and the multitude of its solutions at every f is poorly compact, and the task (43)—(45) has the solution $\hat{y}$, which belongs to the space (60).

At the same time operator $\mathbf{A} : X \to X^*$, generated by the task (43)—(45), is:

а) limited;

b) coercive;

в) operator with semi limited variation;

г) has the property (M).

The proof of statements a), b) and c) is the same as in the task (6), (7).

Let's only show that $\mathbf{A}$ — is operator with semi limited variation.

It follows from the definition $\mathbf{A}$ that (61).

Considering the properties of operator A: (62).

For the second item of the right part (61) such evaluation holds true, which is the same to the obtained one in the above (63). Then finally (64).

Function C is defined by formula (37).

Висновки

Досліджено коректність математичних моделей стаціонарного режиму випалювання залізорудних котунів у конвеєрній машині неперервної дії на основі аналізу процесу нелінійного теплообміну двофазних середовищ. Однак, досить часто на практиці необхідна оцінка динаміки, що вимагає наявності інформації про поточний стан устаткування, відсутність якої може призвести до значних матеріальних втрат. У зв'язку з цим виникає потреба у вивченні динамічного режиму роботи машини для випалювання залізорудних котунів, результати якого автори представлять у наступній статті.

Выводы

Иисследовано корректность математических моделей стационарного режима обжига железорудных окатышей в конвейерной машине непрерывного действия на основе анализа процесса нелинейного теплообмена двухфазных сред. Однако, довольно часто на практике необходима оценка динамики, требующая наличия информации о текущем состоянии оборудования, отсутствие которой может привести к значительным материальным потерям. В связи с этим появляется необходимость изучения динамического режима работы машины для обжига железорудных окатышей, результаты которого авторы представят в следующей статье.

Conclusions

The present paper provides the results of the research of the correctness of mathematic models of stationary condition of ironstone pellet roasting in continuous conveyer machine on the basis of the analysis of the non linear heat exchange in two-phase environments. But often in practice the evaluation of dynamics is necessary, which demands the available information regarding the current condition of equipment, the absence of which may result in the substantial material losses. As a result of this there appears the necessity of the examination of dynamic functioning condition of the ironstone pellet roasting, the results of which authors will present in the next paper.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

REFERENCES

1. Мізерний В. М., Модебадзе Т. А. Моделювання процесу нелінійного теплообміну двофазних середовищ // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2006. — № 3. — С. 61—75.
2. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
3. Згуровский М. З., Новиков А. Н. Анализ и управление односторонними физическими процессами. — К.: Наукова думка, 1996. – 350 с.
4. Иваненко В. И., Мельник В. С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — К.: Наукова думка, 1988. — 287 с.
5. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.

Рекомендована кафедрою інтеграції навчання з виробництвом

Надійшла до редакції 22.06.06
Рекомендована до друку 29.06.06

Мізерний Віктор Миколайович — завідувач кафедри інтеграції навчання з виробництвом.
Вінницький національний технічний університет;
Модебадзе Тимур Андрійович — доцент кафедри прикладної математики.
Кутаїський технічний університет (Грузія)

Мизерный Виктор Николаевич — заведующий кафедрой интеграции обучения с производством.
Винницкий национальный технический университет;
Модебадзе Тимур Андреевич — доцент кафедры прикладной математики.
Кутаисский технический университет (Грузия)

Viktor Mizernyy — Head of the Chair of Training and Production Integration.
Vinnytsia National Technical University;
Tymur Modebadze — Assistant Professor of the Chair of Applied mathematic.
Kutaisi Technical University (Georgia)