

С. А. Скрябін, д. т. н., М. М. Барабой

## МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ НОРМАЛЬНИХ І ДОТИЧНИХ КОНТАКТНИХ НАПРУЖЕНЬ З УРАХУВАННЯМ РОЗВИТКУ ДЕФОРМАЦІЇ В ЧАСІ ПРИ ВАЛЬЦЮВАННІ

Описано метод визначення контактних нормальних і дотичних напружень, з урахуванням розвитку деформації в часі. Виведено формули, що характеризують динаміку зміни області деформації в часі й використовуванні для визначення контактних нормальних і дотичних напружень. Розбіжність результатів теоретичного розрахунку з експериментальними даними при перевірці запропонованого методу становить 1,7...4 %, що підтверджує можливість його застосування для визначення контактних нормальних і дотичних напружень.

### Вступ

Актуальність розробки і впровадження маловідходних технологічних процесів штампування поковок з алюмінієвих, титанових, магнієвих сплавів, високолегованих корозійностійких, жаростійких, жароміцних та інших сталей із застосуванням процесу вальцювання на підприємствах авіаційної промисловості обумовлена значним застосуванням у виробі галузі цих сплавів, підвищеною витратою металу (коефіцієнт використання металу 0,15...0,3), високою трудомісткістю, тривалим циклом виготовлення якісних штампованих поковок (як правило 2...3 штампування з проміжними операціями нагрівання, обрізки облою, травлення, зачищення) і задачами з удосконалення металоощадних технологій. Широке використання перерахованих вище сплавів визначається їх технічними, фізичними і механічними властивостями. Вони повинні мати високі статичні міцнісні характеристики (межу міцності, границю текучості, опір зрізу), задовільну пластичність і термомеханічні характеристики, які необхідно враховувати при розробці технологічних процесів їх гарячого деформування.

Методи [1, 2, 3 та ін.] за якими визначаються контактні нормальні і дотичні напруження зводяться до розгляду їх розподілу вздовж області деформації. Такий підхід до розв'язання задачі з їх визначення не дозволяє врахувати нерівномірність деформації в поперечному напрямку й вплив бічних позаконтактних зон, що прилягають до фактичного осередку деформації. Ці фактори особливо важливо враховувати при визначенні нормальних і дотичних напружень у вальцюванні (прокатці) в калібрах з різним співвідношенням геометричних форм калібру й вальцювальної заготовки. Крім цього, в наявних методах не враховується розвиток деформації у часі.

Метою даної роботи є розробка методу визначення нормальних і дотичних контактних напружень в осередку деформації з урахуванням вищеперерахованих факторів.

Робота виконувалася у відповідності до науково-технічної програми Міністерства промислової політики України «Державна комплексна програма розвитку авіаційної промисловості України до 2010 року», затвердженої постановою Кабінету Міністрів України від 12.12.2001 р., № 1665-25.

### Суть запропонованого методу

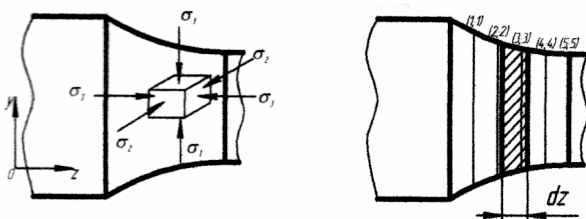


Рис. 1. Схема напруженого стану в перехідній зоні вальцюваної заготовки

Для виведення формул з визначення нормальних і дотичних контактних напружень у зоні деформації з урахуванням перерахованих факторів, розіб'ємо об'єм осередку деформації на ряд шарів товщиною  $dz$ , рис. 1.

Розглянемо напруження в похилих площинах, які перпендикулярні пло-

щині осередку деформації (рис. 2), припускаючи, що напружено-деформований стан кожної точки в цьому шарі буде визначатися такими тензорами:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

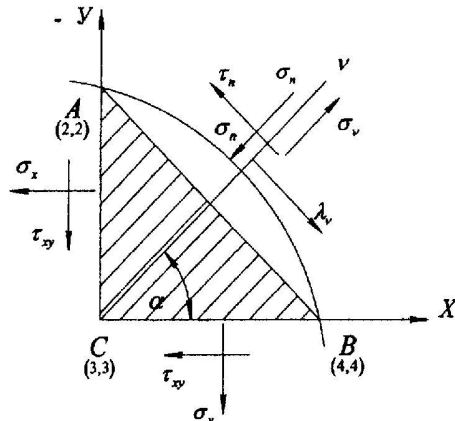


Рис. 2. Розподіл напружень у похилій площадці при плоскому напруженому стані

При виведенні рівнянь, що визначають сили тертя й тиску в осередку деформації, вважатимемо: термін «похила площина» означає, що нормаль до цієї площини не збігається з жодною з осей обраної нами системи координат; напруги по гранях елементарного об'єму розподіляються рівномірно й похила площина розглядається як похилий переріз в елементарному паралелепіпеді.

У площині ABC (рис. 2), нормаль якої  $v$  складає кут  $\alpha$  з віссю  $OX$ , діє нормальна  $\sigma_v$  і дотична  $\tau_v$  напруги. Напруги розподілені рівномірно по товщині шару  $dz$ , торцеві грані елемента ABC незавантажені, оскільки відповідно до умови,  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ;  $\sigma_z = 0$ .

Для визначення величин  $\sigma_v$  і  $\tau_v$  розглянемо умову рівноваги елемента ABC. Спроектуємо всі

зусилля на напрямок нормалі  $v$ :

$$\sigma_v ds dz = \sigma_x dy \cos \alpha dz + \sigma_y dx \sin \alpha dz + \tau_{xy} (dy \sin \alpha + dx \cos \alpha) dz. \quad (1)$$

Масові сили, що діють на елемент ABC  $p_x \frac{1}{2} dx dy dz$ ;  $p_y \frac{1}{2} dx dy dz$ , є зусиллями другого порядку малості і тому рівнянні відсутні. Враховуючи, що  $\sin \alpha = \frac{dx}{ds}$ ,  $\cos \alpha = \frac{dy}{ds}$ , отримаємо зі співвідношення (1)

$$\sigma_v = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha.$$

Аналогічно, проектуючи всі зусилля на напрямок вектора  $\tau_v$ , знаходимо

$$\tau_v ds dz = \sigma_y dx \cos \alpha dz - \sigma_x dy \sin \alpha dz + \tau_{xy} (dy \cos \alpha - dx \sin \alpha) dz$$

або 
$$\tau_v = 1/2(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Оскільки в осередку деформації залишкові нормальні й дотичні напруги  $\sigma_v$  і  $\tau_v$  спрямовані в протилежні сторони силам тиску і тертя  $\sigma_n, \tau_n$ , вони будуть визначатися виразами

$$\sigma_n = -(\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha); \quad (2)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (3)$$

Заміняючи у виразах (2) і (3)  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}$ , деформаціями, використовуючи узагальнений закон Гука (матеріал будемо вважати нестисливим, тобто  $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0$ ) отримаємо

$$\sigma_n = -(2G^* \epsilon_x \cos^2 \alpha + 2G^* \epsilon_y \sin^2 \alpha + G^* \gamma_{xy} \sin 2\alpha); \quad (4)$$

$$\tau_n = G^* (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\alpha - G^* \gamma_{xy} \cos 2\alpha, \quad (5)$$

де  $G^*$  — модуль зсуву в пластичній області.

Далі, використовуючи рівняння Коші,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

та підставивши їх у формули (4), (5), отримаємо:

$$\sigma_n = -2G^* \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin 2\alpha \right]; \quad (6)$$

$$\tau_n = G^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin 2\alpha - G^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos 2\alpha. \quad (7)$$

Формули (6), (7) описують нормальні й дотичні напруження на контурі елементарного шару  $d_z$ . Для їхньої числової реалізації використаємо метод скінченних різниць, попередньо замінивши деформівний контур  $\Gamma$  області  $G$  сітковим (рис. 3).

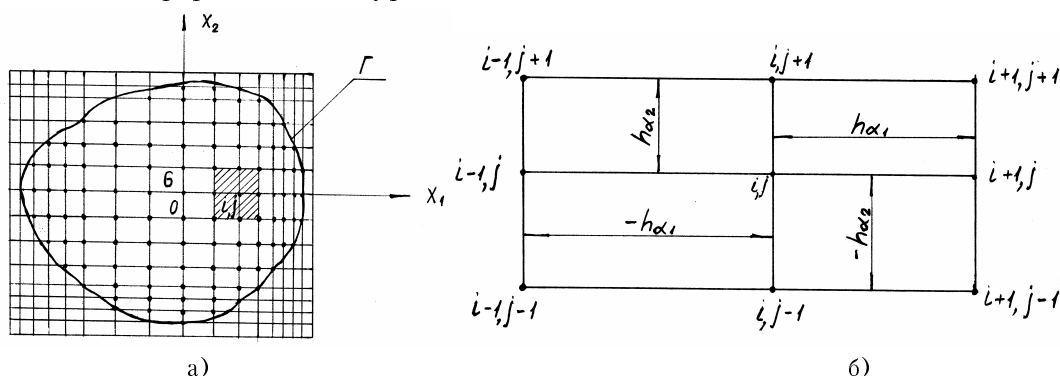


Рис. 3. Криволінійна однозв'язна кінцева область:

а) — загальний вигляд; б) — елементарний осередок  $(i, j)$  досліджуваної області

Тоді контактні нормальні й дотичні напруження можна описати формулами

$$\sigma_n = -2G^* \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{2+h_{\alpha_2}^{(i,j)}} - \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{2+h_{\alpha_1}^{(i,j)}} \right) \sin 2\alpha + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{\alpha_1}^{(i,j)}} \cos^2 \alpha + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{\alpha_2}^{(i,j)}} \sin^2 \alpha; \quad (8)$$

$$\tau_n = G^* \left[ \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{\alpha_1}^{(i,j)}} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{\alpha_2}^{(i,j)}} \right) \sin 2\alpha + \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_{\alpha_2}^{(i,j)}} - \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_{\alpha_1}^{(i,j)}} \right) \cos 2\alpha \right]. \quad (9)$$

Для довільного контуру деформівного шару  $Z$  вирази (8), (9) матимуть вигляд

$$\sigma_n^* = \left( \sum_{n=1}^k \sigma_n^k \right) l_i \Delta Z_i; \quad (10)$$

$$\tau^* = \left( \sum_{n=1}^k \tau_n^k \right) l_i \Delta Z_i, \quad (11)$$

де  $l_i$  — довжина дуги калібру;  $\Delta Z_i$  — товщина деформівного шару.

Як приклад розрахунку контактних нормальних і дотичних напружень розглянемо вальцювання заготовок зі сплаву АК6 з розмірами  $\varnothing 25 \times 150$  мм в овальному калібрі, що має розміри: висота 13 мм, ширина 29 мм. Температура вальцювання 450 °С; швидкість обертання валків 0,2 м/с; робочий радіус валків  $R_p = 66,5$  мм.

У таблиці наведені формули для визначення поточних значень контактних нормальних і дотичних напружень.

**Формули для визначення контактних нормальних і дотичних напружень**

Параметр	Позначення	Розрахункова формула
Кут контакту, рад	$\alpha$	$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{2R_3 - \Delta h}{2R_p}\right) = \arccos(0,9022) = 0,4458$
Час деформації, с	$t$	$t = 10^{-3} \left(\frac{R_p \alpha}{v_a}\right) = 10^{-3} \left(\frac{66,5 \cdot 0,4458}{0,2}\right) = 0,145$
Радіус калібра, мм	$R_k$	$R_k = \frac{\Delta h^2 + b_k^2}{4\Delta h} = \frac{12^2 + 29^2}{4 \cdot 12} = 20,5$
Ширина овалу, мм	$b_{об}$	$b_{об} = b_k + \frac{2\delta(2R_k - \Delta h)}{b_k} = 29 + \frac{2 \cdot 15(41 - 12)}{29} = 31$
Висота овалу, мм	$h_{об}$	$h_{об} = 2\Delta h + \delta = 2 \cdot 6 + 1,5 = 13,5$
Проміжок деформації, с	$t_i$	$t_i = \frac{0,145d_i}{\alpha_i}$
Кут дуги контакту, рад	$\alpha_d$	задається
Кут контакту в поперечно-му перерізі осередку деформації	$\varphi_i$	$\varphi_i = \frac{v_B t_i \left(1 - \frac{\Delta h}{2R_k}\right)}{R_p \alpha}$
Довжина дуги поперечного переріза зони контакту, мм	$l_{\varphi i}$	$l_{\varphi i} = R_p \varphi_i$
Ширина овалу, мм	$b_{об}^{(i)}$	$b_{об}^{(i)} = \frac{(b_{об} + 2R_k)}{\alpha R_p} v_a t_i + 2R_3$
Висота овалу, мм	$h_{об}^{(i)}$	$h_{об}^{(i)} = 2\{R_3 - R_p[\cos(\alpha - \alpha_i) - \cos\alpha]\} + m$
Коефіцієнти деформації	$K_x^{(i)}; K_y^{(i)}$	$K_x = \frac{b_{об}^{(i)}}{2R_3}; K_y = \frac{h_{об}^{(i)}}{2R_3}$
Площа контакту, мм <sup>2</sup>	$F_k^{(i)}$	$F_k^{(i)} = R_k \frac{v_B t_i}{R_p} \left[ (R_p + R_k) \frac{\varphi v_B t_i}{2R_p \alpha} - R_k \sin\left(\frac{\varphi v_B t_i}{2R_p \alpha}\right) \right]$
Інтенсивність напруження, кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_i$	задається
Головні деформації	$\varepsilon_1^{(i)}; \varepsilon_2^{(i)}$	$\varepsilon_1^i = \frac{1}{2} l_n K_x^{(i)}; \varepsilon_2^i = \frac{1}{2} l_n K_y^{(i)}$
Інтенсивність деформації	$\varepsilon_i^{(i)}$	$\varepsilon_i^{(i)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^{(i)2} + \varepsilon_2^{(i)2} + \varepsilon_1^{(i)} \varepsilon_2^{(i)}}$
Модуль деформації другого роду, кг/мм <sup>2</sup>	$G^*$	$G^* = \frac{\sigma_i^{(i)}}{3\varepsilon_i^{(i)}}$
Напруження уздовж площини, перпендикулярної до осі ОУ, кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_x^{(i)}$	$\sigma_x^{(i)} = 2G^* (1 - K_x^{(i)})$
Напруження уздовж площини, перпендикулярної до осі ОХ, кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_y^{(i)}$	$\sigma_y^{(i)} = 2G^* (1 - K_y^{(i)})$
Крок у напрямку осі ОХ, мм	$h_{\alpha_1}$	$h_{\alpha_1}^{(i,j)} = R_3 K_x^{(i)} (\sin\beta_{i+1,j} - \sin\beta_{i,j+1})$
Крок у напрямку осі ОУ, мм	$h_{\alpha_2}$	$h_{\alpha_2}^{(i,j)} = R_3 K_y^{(i)} (\cos\beta_{i,j+1} - \cos\beta_{i+1,j})$
Кути розбивки поперечного перерізу, рад	$\beta_{i+i,j}; \beta_{i,j+i}$	задаються
Граничні значення на поверхні заготовки, мм	$u_{i,j+1}^{(r)}$	$u_{i,j+1}^{(r)} = R_3 (1 - K_x^{(i)}) \sin\beta_{i,j+1}$

Параметр	Позначення	Розрахункова формула
Граничні значення на поверхні заготовки, мм	$u_{i+1,j}^{(r)}$	$u_{i+1,j}^{(r)} = R_3 \left( 1 - K_x^{(i)} \right) \sin \beta_{i+1,j}$
Граничні значення на поверхні заготовки, мм	$v_{i,j+1}^{(r)}$	$v_{i,j+1}^{(r)} = R_3 \left( 1 - K_y^{(i)} \right) \cos \beta_{i,j+1}$
Граничні значення на поверхні заготовки мм	$v_{i+1,j}^{(r)}$	$v_{i+1,j}^{(r)} = R_3 \left( 1 - K_y^{(i)} \right) \cos \beta_{i+1,j}$
Кут нахилу нормалі до поверхні заготовки	$\text{tg} \alpha_{i,j}$	$\text{tg} \alpha_{i,j} = \frac{K_x^{(i)} (\sin \beta_{i+1,j} - \sin \beta_{i,j+1})}{K_y^{(i)} (\cos \beta_{i,j+1} - \cos \beta_{i+1,j})}$
Дотичні напруження уздовж площин паралельних координатним осям, кг/мм <sup>2</sup>	$\tau_{xy}$	$\tau_{xy} = \frac{G^*}{2} \left( \frac{u_{i,j}^{(r)} - u_{i+1,j}^{(r)}}{h_{\alpha_2}^{(i,j)}} - \frac{v_{i+1,j}^{(r)} - v_{i+1,i,j}^{(r)}}{h_{\alpha_1}^{(i,j)}} \right)$
Нормальний тиск, кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_n^{(i)}$	$\sigma_n^{(i)} = - \left( \sigma_x \cos^2 \alpha_{i,j} + \sigma_y \sin^2 \alpha_{i,j} + \tau_{xy} \sin 2\alpha_{i,j} \right)$
Дотичне напруження, кг/мм <sup>2</sup>	$\tau_n^{(i)}$	$\tau_n^{(i)} = 0,5 (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha_{i,j} - \tau_{xy} \cos^2 \alpha_{i,j}$
Теоретичний усереднений тиск	$\sigma_{cp}^m$	$\sigma_{cp}^m = 1,15 (\sigma_{cp}^n)$
Похибка тиску	$h_{пор}^{(i)}$	$h_{пор}^{(i)} = \left( \frac{\sigma_{cp} - \sigma_{cp}^m}{\sigma_{cp}} \right) 100 \%$
Середня величина похибки розрахунку	$h_{пор}^{cp}$	$h_{пор}^{cp} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m h_{пор}^{(n)}$

На рис. 4, 5 показані епюри нормальних і дотичних напружень, з яких видно, як змінюються їхні значення зі збільшенням контактної площі й, відповідно, часу деформації.

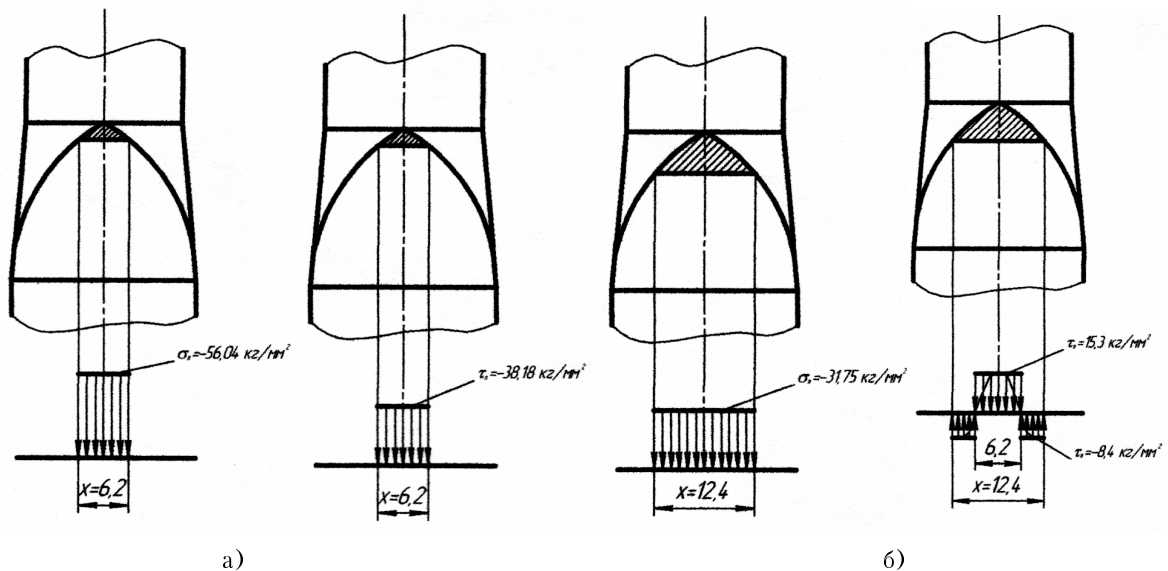


Рис. 4. Епюри нормальних і дотичних напружень. Час деформації  $t$ : а) — 0,029 с, б) — 0,058 с

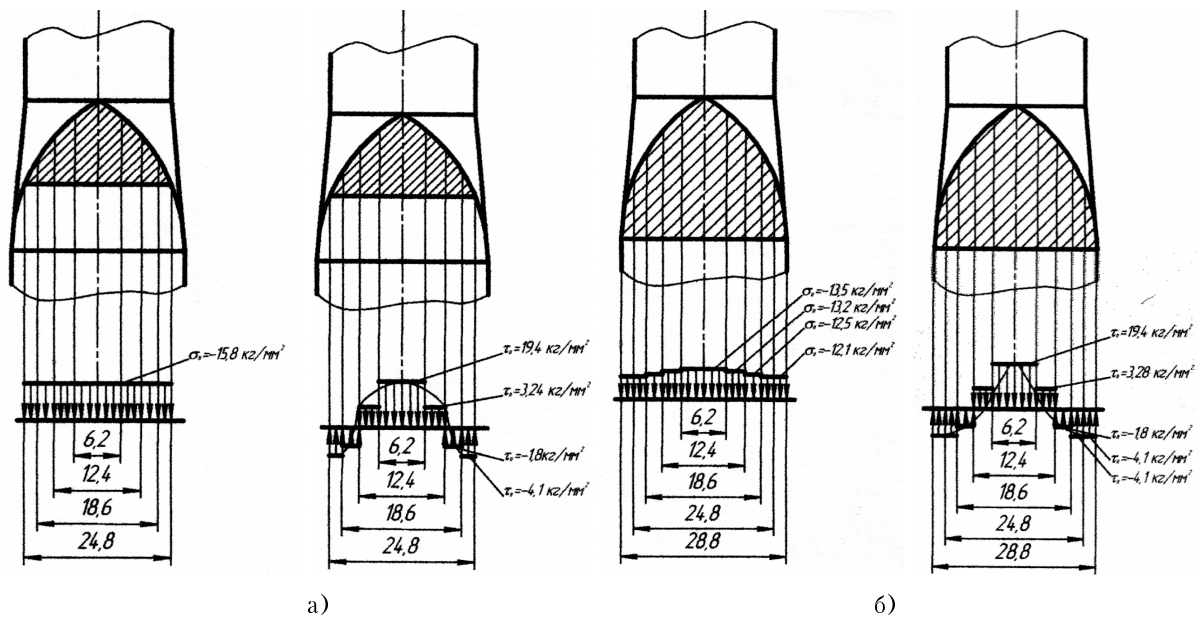


Рис. 5. Епюри нормальних і дотичних напружень. Час деформації  $t$ : а) — 0,116 с, б) — 0,145 с

Розбіжність результатів теоретичного розрахунку з експериментальними даними при перевірці пропозицій методики становить 1,7...4 %, що підтверджує можливість його застосування для визначення контактних нормальних і дотичних напружень.

### Висновки

У статті описано метод визначення контактних нормальних і дотичних напружень при вальцюванні, з урахуванням розвитку деформації у часі. Виведено формули, що характеризують динаміку зміни осередку деформації й використання для визначення контактних нормальних і дотичних напружень. Описано результати проведених досліджень. Розбіжність результатів розрахунку з експериментальними даними підтверджує можливість застосування запропонованого методу для визначення контактних нормальних і дотичних напружень.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Грудев А. П. Теория прокатки. — М.: Металлургия. — 1988. — 240 с.
2. Целиков А. И., Гришков А. И. Теория прокатки. — М.: Металлургия, 1980. — 359 с.
3. Целиков А. И., Никитин Г. С., Рокотян С. А. Теория продольной прокатки. — М.: Металлургия, 1980. — 320 с.

Рекомендована кафедрою опору матеріалів та прикладної механіки

Надійшла до редакції 4.09.06  
Рекомендована до друку 5.10.06

**Скрябін Семен Олександрович** — директор науково-виробничого центру «Ухналь», м. Київ; **Баробой Микола Миколайович** — головний металург ДАХК «Артем», м. Київ