УДК 517.518

О. О. Юдін, асп.

НОРМАЛІЗОВАНА ЛІНІЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ РУХУ ПО СФЕРІ У БАГАТОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Розглянуто сферичну лінійну інтерполяцію та умови її заміни на нормалізовану лінійну інтерполяцію шляхом збільшення кількості вузлів інтерполяції з похибкою, яка не перевищує задану.

Бурхливий розвиток комп'ютерних технологій, забезпечує великі можливості обробки даних. Одним з основних методів обробки даних є інтерполяція, яка сьогодні також стає невід'ємною частиною систем відображення у комп'ютерній графіці. Існує досить багато методів інтерполяції. Але одним із основних методів інтерполяції при моделюванні руху по колу, дослідженні повторів та їх зміни у часі є сферична інтерполяція.

Аналізуючи літературні джерела, було розглянуто проблему проведення оптимізації сферичної інтерполяції та похибки спрощення математичної моделі сферичної лінійної інтерполяції [1]. Також проаналізовано різні способи сферичної інтерполяції на прикладі кватерніонів [2, 3].

Метою дослідження є підвищення ефективності сферичної інтерполяції за рахунок кускової лінеаризації математичної моделі.

Задачею дослідження є аналіз сферичної лінійної інтерполяції та розробка методу спрощення математичної моделі для заданого значення похибки інтерполяції.

В роботі було досліджено параметричну (часову) різницю між сферичною лінійною та нормалізованою лінійною інтерполяціями. Вперше було запропоновано метод лінеаризації сферичної інтерполяції — заміна сферичної лінійної інтерполяції на нормалізовану лінійну. Така заміна є доцільною через те, що формула обчислення сферичної лінійної інтерполяції є досить складною і її використання у ряді випадків дуже ускладнює математичну модель.

Розглянемо рисунок 1, на якому зображена сферична лінійна та звичайна лінійна інтерполяція між двома точками A та B, що знаходяться на одиничному колі з центром O. Нехай Ω — центральний кут для хорди AB. Точка E, характеризує значення функції лінійної інтерполяції у довільний момент часу *t*.

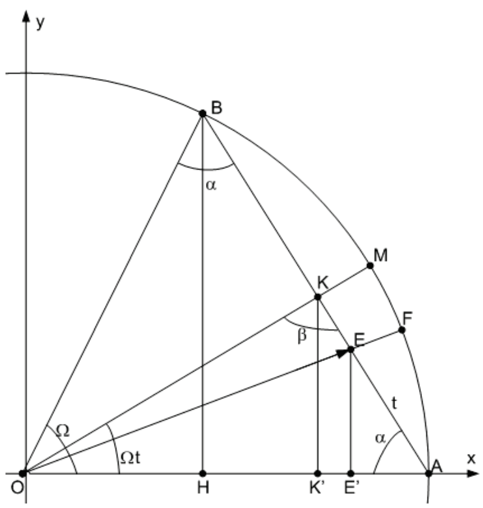

Рис. 1. Зведення лінійної інтерполяції до сферичної лінійної

Якщо нормалізувати біжучий вектор $OE(t)$ у момент часу *t*, то ми отримаємо біжучу точку $F(t)$, яка є проекцією звичайної лінійної інтерполяції, і задаватиме сферичну інтерполяцію. Але зрозуміло, що така сферична інтерполяція не буде лінійною, оскільки зміна кута, не постійна у часі. Для сферичної лінійної інтерполяції в момент часу *t*, ми матимемо точку *M* (відмінну від *F*) та її проекцію *K* на відрізок *AB*. K' та E' — відповідні проекції точок *K* та *E* на вісь абсцис. Для встановлення залежності між лінійною інтерполяцією та сферичною лінійною інтерполяцією нам потрібно знайти зміну параметра *t* для будь-якої позиції вектора *OE* по відношенню до точки *K*, яка є проекцією сферичної лінійної інтерполяції на *AB*.

Виходячи з цього, знайдемо функцію, яка задає відставання лінійної інтерполяції від сферичної.

$$\delta(t) = \frac{AK - AE}{AB} = \frac{AK' - AE'}{AH} = \frac{\sin(\Omega t)\cos\frac{\pi - \Omega}{2}}{\sin\left(\frac{\pi + \Omega}{2} - \Omega t\right)\left(1 - \cos\Omega\right)} - t. \quad (1)$$

Використовуючи тригонометричні тотожності, вираз (1) зводиться до простішого:

$$\delta(t) = \frac{\sin(\Omega t)\sin\frac{\Omega}{2}}{\cos\left(\frac{\Omega}{2} - \Omega t\right)\left(1 - \cos\Omega\right)} - t. \quad (2)$$

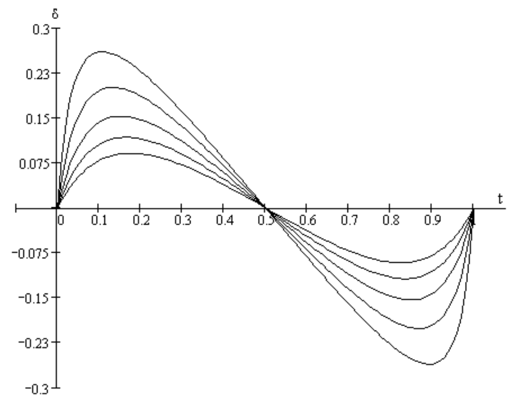

Рис. 2. Сімейство графіків функції δ(*t*)

На рисунку 2 зображено сімейство функцій $\delta(t)$ для різних значень кута Ω.

Наведемо властивості функції $\delta(t)$:

1) функція $\delta(t)$ має центр симетрії у точці (0,5, 0);

2) лінійна інтерполяція відстає від сферичної на першій половині шляху, а потім навпаки випереджає її. Чим більший кут тим більшим є зазначене відставання (випередження);

3) максимальне значення кута між векторами Ω, наближається до π;

4) чим більше значення кута Ω, тим більший розмах значень функції, тим більше максимальне значення функції наближається до 0,5 при *t* = 0:

а) $\lim\limits_{\Omega\to 0}\delta(t) = 0$ для всіх значень *t*; б) — $\lim\limits_{t\to 0,\Omega\to\pi}\delta(t) = 0,5$ — максимальне значення функції ($\lim\limits_{t\to 1,\Omega\to\pi}\delta(t) = -0,5$ — мінімальне значення функції).

За допомогою цієї функції легко здійснюється сферична лінійна інтерполяція (*SLERP* — spherical linear interpolation) по сфері будь-якого порядку, з використанням лінійної інтерполяції для простору того ж порядку:

$$SLERP(A, B, t) = NORMALIZE\big(LINEAR(A, B, t + \delta(t))\big), \quad (3)$$

де *A*, *B* — вектори, що задають точки між якими проводиться інтерполяція, *t* — параметр інтерполяції, приймає значення [0...1], *LINEAR* (*A, B*, *t*) — вектор значення лінійної інтерполяція між точками *A* та *B* для значення параметра *t*,

$$LINEAR(A, B, t) = A(1 - t) + Bt. \quad (4)$$

NORMALIZE(*X*), — процедура зведення вектора *X* до одиничної довжини

$$NORMALIZE(x) = \frac{1}{|x|}x; \qquad |NORMALIZE(x)| = 1, \quad (5)$$

де $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ — норма вектора *x*.

Для розрахунку значення функції $\delta(t)$ потрібне значення кута Ω між векторами *A* та *B*, яке може бути легко отримане із скалярного добутку цих векторів, враховуючи одиничну довжину векторів *A* та *B*:

$$A \bullet B = |A| \cdot |B| \cdot \cos\Omega = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n;$$

$$\cos\Omega = \frac{A \bullet B}{|A| \cdot |B|} = A \bullet B. \quad (6)$$

Для сферичної лінійної інтерполяції використовують формулу (7), яка також придатна для інтерполяції у просторі будь-якого порядку.

$$SLERP(A, B, t) = \frac{A\sin\left(\Omega[1-t]\right) + B\sin(\Omega t)}{\sin(\Omega)}. \tag{7}$$

Від точки A до точки B є два шляхи проходження по колу за годинниковою стрілкою та проти годинникової стрілки. Враховуючи таку неоднозначність, слід відмітити, що сферична лінійна інтерполяція завжди проходить по коротшій дузі, тобто по дузі центральний кут якої менший і не дає розв'язку для двох протилежних векторів.

При лінеаризації значеннями відносної похибки для інтерполяції виступатимуть максимальні значення функції $\delta(t)$ для відповідного значення кута. Розглянемо функцію похибки $\varepsilon(\Omega)$

$$\varepsilon(\Omega) = \max\left(\delta(t)\right). \tag{8}$$

Значення, яких набуває похибка для великих кутів між вузлами інтерполяції є дуже значними, отже застосування такої лінеаризації не є прийнятним.

Оцінивши характер нелінійності функції похибки, тобто характер наростання значення похибки в залежності від кута (рис. 3), можна зробити висновок, що для великих кутів доцільно використовувати розбиття на менші, тобто, іншими словами збільшити кількість вузлів інтерполяції. Розбивши великий кут навпіл, можна суттєво покращити точність системи за рахунок зменшення похибки інтерполяції.

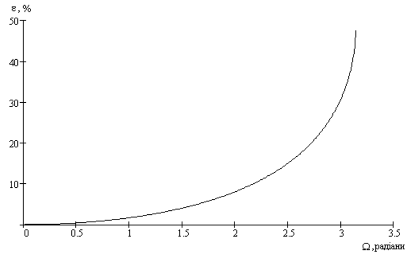

Рис. 3. Залежність похибки від кута між векторами

Розглянемо приклад: розбивши кут 120° однією додатковою проміжною точкою на два по 60°, ми отримаємо зменшення найбільшої похибки (9 %) в 4,5 рази. Таке розбиття можна здійснити за допомогою формули

$$MID(A, B) = NORMALIZE\left(\frac{A+B}{2}\right). \tag{9}$$

Використовуючи таку методику збільшення кількості вузлів інтерполяції, ми отримаємо значне покращення швидкодії за рахунок лінеаризації сферичної інтерполяції за параметром часу. Ця методика потребує попередніх розрахунків додаткових вузлів інтерполяції, яка проводиться за критерієм максимальної похибки. Після цього при проведені інтерполяції попарно між точками

$$SLERP(A, B, t) = NORMALIZE(LINEAR(A, B, t)). \tag{10}$$

похибка буде досить незначною, а кількість обчислювальних операції, які потребуватиме така інтерполяція значно зменшиться порівняно із сферичною лінійною інтерполяцією за (7).

Результати дослідження взаємозв'язку лінійної та сферичної лінійної інтерполяції показали, що при заміні сферичної лінійної інтерполяції нормалізованою лінійною для невеликих кутів між векторами, максимальна відносна похибка досить низька (при Ω = 30° — $\varepsilon \approx$ 0,5 %), а для досить великих кутів похибка стає суттєвою (для Ω = 120° — $\varepsilon \approx$ 9 %). Запропонований автором метод лінеаризації сферичної лінійної інтерполяції за параметром часу, який суттєво зменшує складність обчислювальних операцій при проведені сферичної лінійної інтерполяції, в комплексі з розробленою і обґрунтованою методикою збільшення кількості вузлів інтерполяції дає змогу дотриматись заданого значення похибки при застосуванні лінеаризації сферичної інтерполяції за параметром часу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Норель М. П. Вращение и кватернионы. Сборник рецептов. — 2003 // http://www.gamedev.ru/articles/?id=30129&page=4
2. Dam E. B., Koch M., Lillholm M. Quaternions, interpolation and animation. — Denmark: University of Copenhagen. — 1998. — 98 p.
3. Shoemake K. Quaternions. — 2001. — Philadelphia: University of Pennsylvania. — 12 p.
4. Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. — М.: МЦНМО. — 2002. — 199 с.

Матеріали статті рекомендовані до опублікування оргкомітетом XIII Міжнародної конференції з автоматичного управління (Автоматика-2006, 25—28.09.2006 р.)

Надійшла до редакції 23.11.06
Рекомендована до друку 12.12.06

Юдін Олег Олександрович — аспірант кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки
Вінницький національний технічний університет