

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНІКА

УДК 681.325.2

Н. І. Заболотна, к. т. н., доц.,

О. В. Дроненко, асп.

ПРОСТОРОВО-ЧАСОВА МАТРИЧНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОРГАНІЗАЦІЇ ПРОЦЕСУ ОБЕРНЕННЯ МАТРИЦЬ В ПАРАЛЕЛЬНОМУ ОПТОЕЛЕКТРОННОМУ СПЕЦПРОЦЕСОРІ

Розроблено математичну модель паралельного методу обернення великорозмірних матриць. Для цього існуючу методику відображення математичних моделей матричних операцій було розширено введенням нових операторів, що дозволило відобразити специфічні особливості блочного методу. Розроблено нову структурну модель паралельного оптоелектронного розрядно-зрізового спецпроцесора для обернення матриць за блочним методом, який характеризується підвищенням продуктивності та розширеними функціональними можливостями.

Матрична обробка інформації займає центральне місце в багатьох практично важливих задачах науки і техніки [1]. Тому одним із сучасних напрямків розробки обчислювальних систем, особливо систем спеціального призначення, є орієнтація на виконання матричних операцій, застосування ефективних методів інформаційної обробки і їх реалізацію в обчислювальних блоках.

Зокрема, часто виникає необхідність багаторазового обернення великорозмірних матриць. Наприклад, це має місце в автоматизації розпізнавання образів [2] в багатьох прикладних алгоритмах аналізування і оброблення зображень супутникових знімків чи генерації зображень на основі даних, отриманих від радарів із синтезованою апертурою, під час оброблення сигналів адаптивних антенних решіток та ін.

На сьогодні відомі структурні рішення спеціалізованих оптоелектронних спецпроцесорів для виконання окремих матричних операцій, зокрема обернення матриць, що не мають теоретичних обмежень на розмірність $N \times N$. Але існують обмеження практичної реалізації, що пов'язані з технологічними проблемами виготовлення багатовимірних вузлів з паралельним введенням-виведенням. Як показав аналіз існуючої перспективної оптоелектронної елементної бази, розроблені теоретичні структурні рішення у їх практичній реалізації можуть бути орієнтовані на застосування в якості базових елементів двовимірних просторово-часових модуляторів світла (ПЧМС) на квантово-розмірних ямах SEED з розмірністю 256×256 елементів з частотою перемикання одного пікселя 20 ГГц [3]. Це дозволяє досягти рівня реальної продуктивності $6,2 \cdot 10^6$. В роботах [2, 3] дається оцінка продуктивності, яка може бути отримана з орієнтацією реалізації спецпроцесора на ПЧМС типу SEED з розмірністю $10^3 \times 10^3$ елементів з часом перемикання 1 нс, що становить $9,5 \cdot 10^7$ [3]. Лабораторні умови для реалізації такого спецпроцесора створені, тому таку продуктивність можна вважати теоретично досяжною.

Метою статті є отримання математичної моделі та структурної організації розрядно-зрізового оптоелектронного спецпроцесора для множення матриць, що дозволить оцінити підвищення продуктивності спецпроцесора за рахунок збільшення розмірності вхідних даних шляхом застосування паралельного блочного методу обробки матриць на основі оптичних цифрових обчислень.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

1) модифікувати прямий паралельний метод обернення великорозмірних матриць на основі використання блочної організації оптичних цифрових обчислень;

2) розробити структурну організацію цифрового розрядно-зрізового оптоелектронного спецпроцесора для паралельного обернення великорозмірних матриць модифікованим блочним методом;

3) оцінити продуктивність запропонованої структури паралельної обробки великорозмірних матриць.

Для обернення матриць початкові дані подають в вигляді розширеної матриці $[A|E]$, де A — квадратна неособлива матриця коефіцієнтів розмірністю $MN \times NM$ елементів, E — квадратна одинична матриця розмірністю $MN \times NM$ елементів.

Застосуємо блочний метод модифікованого методу виключення Гаусса [2]. Для цього розіб'ємо вхідні матриці A та E на квадратні матриці нижчих порядків — блоки, розмірність яких $N \times N$, відповідно кількість блоків, що будуть формувати вхідні матриці A та B — $M \times M$. Тоді матрицю A можна розглядати як складну матрицю, елементами якої є блоки

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} & \dots & A_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{iM} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{Mj} & \dots & A_{MM} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, M}$.

Кожний блок має такий вигляд:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pr} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де $p = \overline{1, N}$, $r = \overline{1, N}$.

А відповідно матрицю E

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1j} & \dots & E_{1M} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2j} & \dots & E_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{i1} & E_{i2} & \dots & E_{ij} & \dots & E_{iM} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{M1} & E_{M2} & \dots & E_{Mj} & \dots & E_{MM} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

діагональними блоками якої є одиничні матриці:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, M}$, $p = \overline{1, N}$, $r = \overline{1, N}$.

Всі інші блоки матриці E є нульовими матрицями. Таким чином, вхідними даними та результатом є матриці розмірністю $MN \times MN$. Розширену матрицю проміжних результатів позначимо як $R[1:NM; 1:2NM]$, а матрицю кінцевого результату — як $X[1:NM; 1:NM]$.

Для нульового кроку обчислень, маємо:

$$A^{t=0} = A, \quad E^{t=0} = E, \quad R^{t=0} = 0, \quad X^{t=0} = 0, \quad (5)$$

де t — номер кроку обчислень.

За відомим алгоритмом Гаусса обернення виконується у два етапи:

— прямий хід: матриця A подається в вигляді LU -розкладання;

— зворотній хід: обчислюється матриця результату $X = A^{-1}$ розмірністю $MN \times MN$.

Перетворення формул для організації прямого ходу обчислень дало можливість на основі зовнішнього добутку векторів отримати їх паралельну форму [2]. Нехай на першому кроці $t = 1$ обе-

ремо елемент $a[1;1;1;1] \neq 0$. Тоді розділивши елементи перших рядків першого рядка блоків розширеної матриці $[A|E]$, на $a[1; 1; 1; 1]$, отримаємо вектор-рядок $\mathbf{d}[1:2M; 1:2N]$.

Приймаючи для зручності за обраний елемент на будь-якому t -му кроці обчислень $a^{(t)}[1;1;1;1]$, формування вектор-рядка $\mathbf{d}^{(t)}$ матиме вигляд

$$\mathbf{d}_{1,j,1r}^{(t)} = \frac{A_{1,j,1r}^{(t-1)}}{a_{11,11}^{(t-1)}}, \quad j = \overline{1, M}, r = \overline{1, N}, t = \overline{1, NM};$$

$$\mathbf{d}_{1,j,1r}^{(t)} = \frac{E_{1(j-M),1(r-N)}^{t-1}}{a_{11,11}^{(t-1)}}, \quad j = \overline{(M+1), 2M}, r = \overline{(N+1), 2N}, t = \overline{1, NM}.$$

Визначивши вектор-рядок $\mathbf{d}^{(t)}$ за (6), можна записати наступний рядок проміжного результату в матрицю $\mathbf{R}^{(t)}$ під час виконання паралельного зсуву згідно з таким виразом:

$$\mathbf{R}^{(t)} = \varphi^{\uparrow 1}(\mathbf{R}^{(t)}) \cdot \mathbf{d}^{(t)},$$

де $\varphi^{\uparrow 1}(\mathbf{R}^{(t)}) \cdot \mathbf{d}^{(t)}$ — оператор паралельного зсуву [2] інформації, записаної в масиві блоків \mathbf{R} , вгору на один елемент з паралельним записом на вільне місце вектор-рядка \mathbf{d} .

Сформуємо зовнішній добуток (\otimes) вектор-рядка $\mathbf{d}^{(t)}$ і вектор-стовпця $v_{i,1p}^{(t)}$, виділеного як перший стовпець в кожному з блоків першого стовпця матриці $\mathbf{A}^{(t-1)}$,

$$v_{i,1p}^{(t)} = a_{i,1p}^{(t-1)}, \quad i = \overline{1, M}, p = \overline{1, N},$$

у вигляді матриці $\mathbf{P}^{(t)}$ за формулою

$$\mathbf{P}^{(t)} = \mathbf{v}^{(t)} \otimes \mathbf{d}^{(t)}.$$

Тоді процес чергового виключення змінної x_t на кожному t -му кроці прямого ходу обчислень може бути визначений в результаті таких перетворень для $t = \overline{1, NM}$:

$$\mathbf{A}^{(t)} = \varphi^{\leftarrow 1} \left(\varphi^{\uparrow 1} \left(\mathbf{A}^{(t-1)} - \mathbf{P}^{(t)} [1:M; 1:M; 1:N; 1:N] \right) \right),$$

$$\mathbf{B}^{(t)} = \varphi^{\uparrow 1} \left(\mathbf{B}^{(t-1)} - \mathbf{P}^{(t)} [1:N; (N+1):2N] \right),$$

де $\varphi^{\leftarrow 1}$, $\varphi^{\uparrow 1}$ — оператори паралельного зсуву [2] відповідно вліво і вгору на один елемент із записом нулів у вивільнені відповідно стовпець і рядок.

Таким чином, здійснюючи MN кроків прямого ходу алгоритму Гаусса обчислення за формулами (6)—(11) і з урахуванням початкових умов (7), отримаємо на $t = NM$ -му кроці проміжний результат. Після виконання NM кроків прямого ходу алгоритму Гаусса в матрицях \mathbf{A} і \mathbf{B} будуть записані самі нулі. Отже, можна поновлювати процес введення інформаційних даних нової матриці. На цьому ж етапі для забезпечення можливості організації незалежних обчислень на прямому та зворотному етапах алгоритму в режимі неперервної потокової обробки даних доцільно переписати отримані проміжні результати \mathbf{R} в масиви $\mathbf{X1}$ і $\mathbf{X2}$ таким чином:

$$\mathbf{X1}^{(t=NM)} [1: M; 1: M; 1: N; 1: N] = \mathbf{R}^{(t=NM)} [1: M; 1: M; 1: N; 1: N];$$

$$\mathbf{X2}^{(t=NM)} [1: M; 1: M; 1: N; 1: N] = \mathbf{R}^{(t=NM)} [1: M; (M+1):2M; 1: N; (N+1):2N].$$

Оскільки на останньому $t = NM$ -му кроці прямого ходу алгоритму отримано значення вектор-рядка $r[N, N+1], r[N, N+2], \dots, r[N, 2N]$, то для організації зворотного ходу перетворення вхідних даних на основі зовнішнього добутку векторів дозволить отримати їх паралельну форму.

Визначимо на кожному $t = (NM + w)$ -му кроці обчислень (w -номер кроку зворотного ходу, $w = \overline{1, (M-1)}$) матрицю \mathbf{PX} як зовнішній добуток (\otimes) векторів

$$\mathbf{PX}^{(t)} [1:M; 1:M; 1:N; 1:N] = \mathbf{dx}^{(t)} [1:M; 1; 1:N; 1] \otimes \mathbf{vx}^{(t)} [1; 1:M; 1; 1:N],$$

де вектор-рядок $\mathbf{vx}^{(t)} [1; 1:M; 1; 1:N]$ визначимо як $(NM-w)$ -й рядок матриці блоків $\mathbf{X2}^{(t)}$

$$\mathbf{vx}^{(t)} [1; 1:M; 1; 1:N] = \mathbf{X2}^{(t)} [(M-w); 1:M; (N-w); 1:N];$$

а вектор-стовпець $\mathbf{dx}^{(t)} [1: M; 1; 1: N; 1]$ утворимо за елементами неголовної діагоналі перетворе-

ної матриці блоків $\mathbf{X}\mathbf{M}^{(t)}[1:M; 1:M; 1:N; 1:N]$:

$$d\mathbf{x}^{(t)}[f; 1; k; 1] = \mathbf{X}\mathbf{M}^{(t)}[f; (M-f+1); k; (N-k+1)], \quad (f = \overline{1, M}, k = \overline{1, N}). \quad (15)$$

Матриця блоків $\mathbf{X}\mathbf{M}^{(t)}$ буде сформована в результаті логічного множення (\wedge) матриці блоків $\mathbf{X}\mathbf{1}^{(t)}$ і специфічної матриці блоків $\mathbf{M}[1:N; 1:N]$ за такою формулою:

$$\mathbf{X}\mathbf{M}^{(t)}[1:M; 1:M; 1:N; 1:N] = \mathbf{X}\mathbf{1}[1:M; 1:M; 1:N; 1:N] \wedge \mathbf{M}[1:M; 1:M; 1:N; 1:N],$$

де $m_{ij,pr} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } j = 1; r = 1; \\ 1, & \text{якщо } j = \overline{2:M}, r = \overline{2:N}. \end{cases} \quad i = \overline{1:M}, p = \overline{1:M}. \quad (16)$

Тоді значення матриці блоків проміжного результату на $t = 1$ ($NM + w$)-му кроці обчислень формуватиметься за формулою

$$\mathbf{X}\mathbf{2}^{(t = NM + w)} = \mathbf{X}\mathbf{2}^{(t-1)} - \mathbf{P}\mathbf{X}^{(t)}, \quad (17)$$

і на останньому $t = 2NM - 1$ кроці обчислень набудатиме значень шуканої матриці блоків невідомих \mathbf{X}

$$\mathbf{X}[1:N; 1:N] = \mathbf{X}\mathbf{2}^{(t = 2NM - 1)}[1:N; 1:N]. \quad (18)$$

При цьому

$$\mathbf{X}\mathbf{1}^{(t)} = \varphi^{-1}(\mathbf{X}\mathbf{1}^{(t-1)}) \cdot \mathbf{0} \quad (t = \overline{NM, (2NM - 1)}). \quad (19)$$

На базі моделі (1)—(19), враховуючи особливості структурної організації паралельного СП, зроблено паралельну обчислювальну структуру, подану в вигляді паралельного блоку організації обчислень прямого ходу алгоритму Гаусса (рис. 1) і паралельного блоку організації обчислень зворотного ходу алгоритму Гаусса (рис. 2).

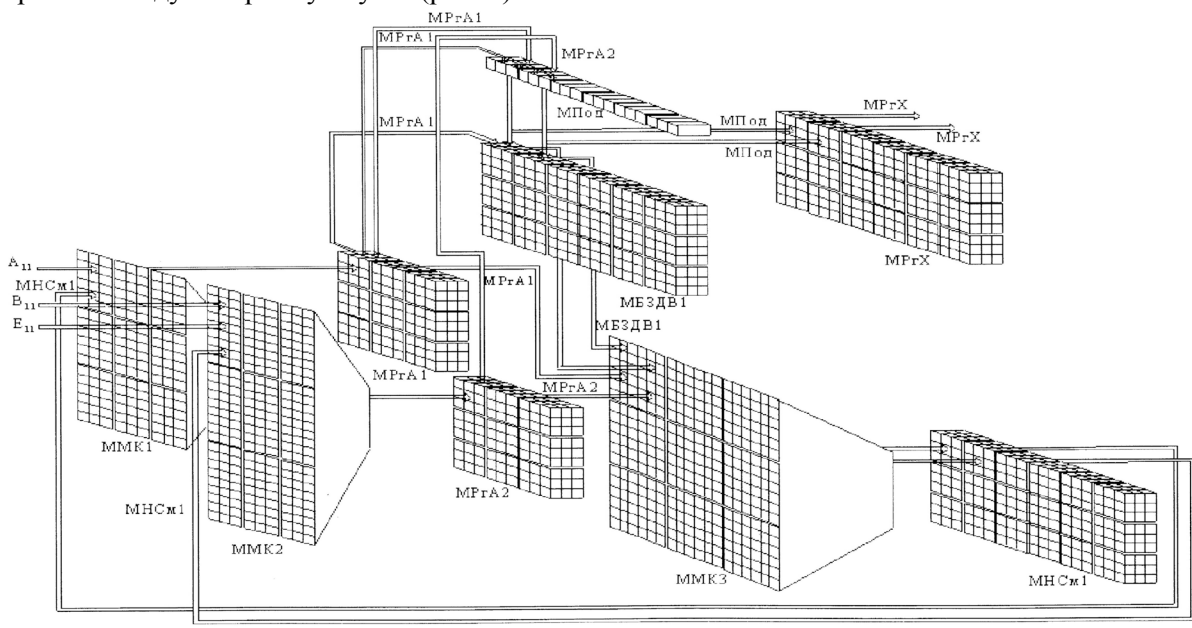


Рис. 1. Структурна схема блоку організації прямого ходу спецпроцесора для обернення матриць за блочним методом

В зв'язку з наявністю дуже великої кількості зв'язків, які неможливо помістити на рисунку і зберегти їх інформативність, на схемі показано зв'язки лише для одного блоку.

Паралельний блок організації прямого ходу обчислень має таку структурну організацію (див. рис. 1). Для організації паралельного запису і збереження початкової розширеної матриці блоків $[A|E]$ великої розмірності, поданої в вигляді наборів $P3$, структура блоку СП містить дві паралельних багатовимірних матриці регістрів $MPrA1$ і $MPrA2$, кожна з матриць регістрів складається з $M \times M$ регістрів. Інформація з матриць регістрів $MPrA1$ і $MPrA2$ в початковий момент часу $t = 1$ без змін переписується в матрицю паралельних цифрових матричних накопичувальних суматорів

МНСм1, яка надалі реалізує операцію алгебраїчного додавання знакозмінних матриць, поданих в формі з плаваючою комою. Для реалізації процесів виділення вектор-рядка $d^{(i)}$ з подальшим обчисленням його зовнішнього добутку з вектор-стовпцем структура паралельного СП містить матрицю паралельних поділювачів (МПОД) вектора на число в формі з плаваючою комою і матрицю паралельних цифрових блоків зовнішнього добутку векторів (МБЗДВ1) в формі з плаваючою комою. Також схема містить матриці матричних комутаторів ММК1, ММК2 і ММК3. Здійснивши NM кроків обчислень прямого ходу за описаним алгоритмом на перших S та других S двовимірних $MN \times NM$ виходах матриці регістрів МРгХ буде сформована матриця у вигляді специфічного LU -розкладання із видозміненою верхньотрикутною матрицею $X1$ ліворуч, перший стовпець якої містить одиничні значення, і нижньотрикутною матрицею $X2$ згідно з виразом (17).

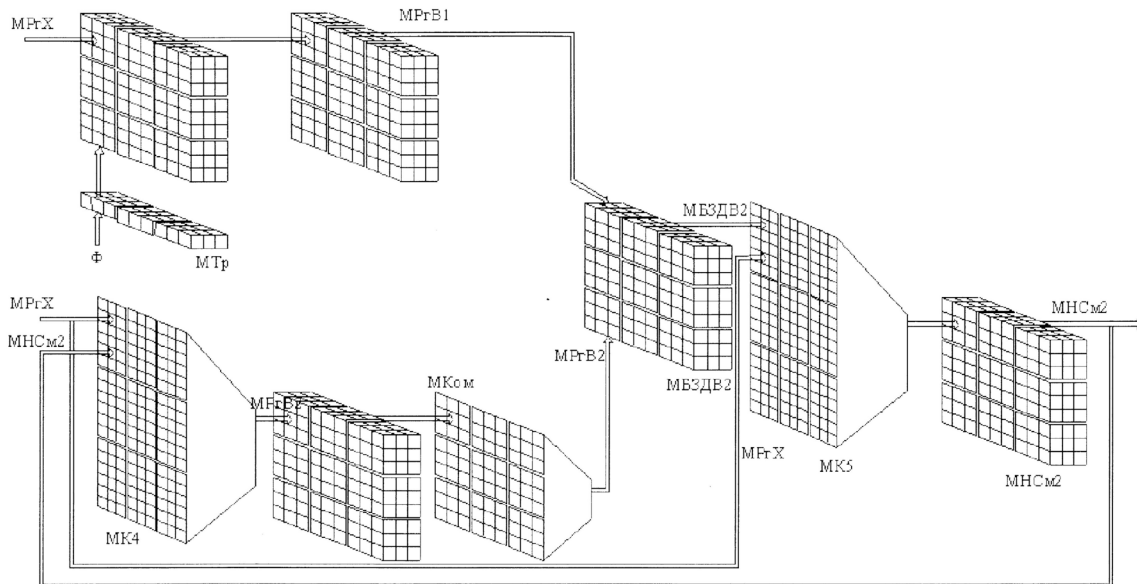


Рис. 2. Структурна схема блоку організації зворотного ходу спецпроцесора для обернення матриць

Паралельний блок організації зворотного ходу обчислень має таку структурну організацію (див. рис. 2). Для знаходження оберненої матриці в поточному режимі роботи необхідно перезаписати результат прямого ходу обчислень, який зберігається в МРгХ, в пам'ять паралельного блоку зворотного ходу обчислень, вивільнивши тим самим МРгХ для сприйняття нової інформації. Запис інформації з матриці регістрів МРгХ здійснюється у відповідні паралельні регістри матриць-регістрів МРгВ1 і МРгВ2, кожний з яких містить S двовимірних $N \times N$ входи. Також блок організації зворотного ходу містить: матрицю матричних елементів логічного множення I , що складається з $M \times M$ блоків — матричних елементів логічного множення, матриці тригерів МТ, в кожному з яких попередньо записана специфічна бінарна маска M відповідно до (16), матриці матричних комутаторів ММК4, ММК5, матрицю паралельних цифрових матричних накопичувальних суматорів МНСм2, кожний з яких має S двовимірних $N \times N$ входів і S двовимірних $N \times N$ виходів, матриці паралельних блоків зовнішніх добутків векторів МБЗДВ2, матрицю матричних комутаторів МКом.

Результат, поданий у вигляді числової матриці в формі з плаваючою комою за набором із S розрядних зрізів, буде сформований в момент часу $T = 2MN - 1$, якщо $k = 1, f = 1$ на S двовимірних $MN \times NM$ виходах МНСм2.

Час структурного оброблення матричного розрядно-зрізового спецпроцесора з плаваючою комою для обернення матриць за блочним методом на основі методу Гауса становить в однозадачному режимі

$$T_{\text{ГБ}} = 8(2N_M - 1)(2M_S^2 + M_S P_S + 14M_S + 8P_S + 29)\tau, \tag{20}$$

де M_S, P_S — розрядність відповідно мантиси та порядку.

Встановивши зв'язок між параметрами N, M, M_S, P_S і τ , за окремий критерій структурної ефективності для порівняння як відомих, так і нових паралельних спецпроцесорів, доцільно обрати

значення продуктивності $V^{\text{відн}}$, віднесеної до величини затримки розповсюдження сигналів τ використаної елементної бази

$$V^{\text{відн}} = \frac{V}{\tau}, \left[\frac{MFLOP}{\tau} \right]. \quad (21)$$

Проаналізуємо показник віднесеної швидкодії для варіанта структури розрядно-зрізового СП за блочним методом на основі методу Гаусса

$$V_{\text{ГБ}}^{\text{відн}} = \frac{2NM(M_S^2 + 7M_S + 2P_S + 12) + 3N^2M^2(M_S^2 + 3M_S + 2P_S + 3) + 3N^2M^2}{4M_S + M_S P_S + 4P_S + 11} \cdot \frac{1}{16(2M_S^2 + M_S P_S + 14M_S + 8P_S + 29)\tau}. \quad (22)$$

На рис. 3 показано залежність продуктивності спецпроцесора від розмірності матриці блоків з фіксованою розмірністю блоків $N = 10^3$, розрядністю мантиси та порядку $M_S = 48$, $P_S = 16$ та часу затримки розповсюдження сигналу $\tau = 10^{-6}$ с, що відповідає характеристикам SEED-приладів, про які йшлося вище.

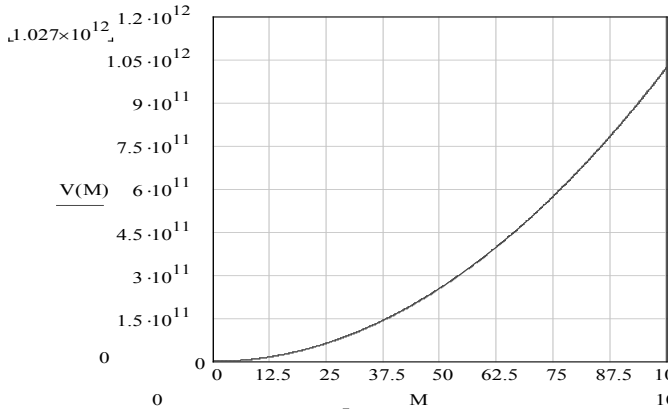


Рис. 3. Залежність продуктивності спецпроцесора від розмірності матриці блоків

Отримано модифіковану просторово-часову матричну математичну модель паралельного методу обернення великорозмірних матриць, для чого існуючу методику відображення математичних моделей матричних операції було розширено введенням нових операторів, що дало можливість ви-

Висновки

Отримано модифіковану просторово-часову матричну математичну модель паралельного методу обернення великорозмірних матриць, для чого існуючу методику відображення математичних моделей матричних операції було розширено введенням нових операторів, що дало можливість ви-

добразити специфічні особливості блочного методу.

Вперше розроблено структурну модель паралельного оптоелектронного розрядно-зрізового пристрою обернення матриць за блочним методом, який характеризується підвищенням продуктивності та розширеними функціональними можливостями. Нова апаратно-орієнтована паралельна модель для обернення матриць дає можливість їх практично реалізувати на наявній на даний час елементній базі, зокрема на квантово-розмірних структурах типу SEED (Self Electro-optic Effect Device), забезпечуючи при цьому оброблення великорозмірних вхідних даних. В порівнянні з відомими аналогами продуктивність таких процесорів зростає в M разів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кожем'яко В., Заболотна Н., Шолота В. Паралельні обчислювальні структури для розв'язку систем лінійних рівнянь та обернення матриць // Пр. 3 Всеукраїнської конф. «Обробка сигналів і зображень та розпізнавання образів». — Київ: Українська асоціація з оброблення інформації та розпізнавання образів. — 1996. — С. 233—234.
2. Шолота В. В. Концепції та підходи до синтезу обчислювальних структур високопродуктивних процесорів для паралельного обернення матриць та розв'язання систем лінійних рівнянь // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах (Технологічний університет Поділля, м. Хмельницький). — 1998. — № 2. — С. 84—90.
3. Miller D. A. B. Quantum-Well-Self-Electro-Optic-Effect Devices // Optical and Quantum Electronics. 1990. Vol. 22. P. 61—98.

Матеріали статті рекомендовані до опублікування оргкомітетом III Міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми радіоелектроніки, телекомунікацій та приладобудування (СПРТГ-2007)» (31.05—2.06.2007 р.)

Надійшла до редакції 30.09.07
Рекомендована до друку 04.10.07

Заболотна Наталія Іванівна — доцент; **Дроненко Олена Василівна** — аспірант.

Кафедра лазерної та оптоелектронної техніки, Вінницький національний технічний університет