УДК 519.65.652

Р. Н. Квєтний, д. т. н., проф.;
В. Ю. Дементьєв, асп.

ТРИГОНОМЕТРИЧНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СПЛАЙНАМИ

Запропоновано модифіковану математичну модель кубічних сплайнів Ерміта, яка дозволяє покращити інтерполювальні властивості ермітових сплайнів. Розроблену модель інтерполяції варто застосовувати для наборів базових точок, які описують плавні, наближені до періодичних графіки. Розрахунок невідомих коефіцієнтів сплайну виконано наближено, що зумовлює підвищення швидкодії та зменшення точності інтерполювання, в порівнянні зі сплайнами Ерміта.

Вступ

У математиці та її практичному застосуванні постійно доводиться мати справу з наближеними представленнями функцій. Класичним апаратом таких представлень є багаточлени і раціональні дроби. Теорія наближення функцій багаточленами була розроблена в багатьох наукових працях. Багаточлени і раціональні дроби мають ряд недоліків. Основний їх недолік полягає в тому, що поведінка в околі будь-якої точки визначає їх характер вцілому. Тому пропонуються для застосування інші апарати наближення, вільні від зазначеного недоліку. Одним з таких апаратів, що достойно зарекомендував себе як в теоретичних так і практичних дослідженнях є сплайни [1].

Нині майже всі документи, ескізи, малюнки, рисунки, проекти, зображення, замальовки та ідеї створюються та обробляються на комп'ютері. На перший план виступають проблеми швидкості та якості побудови плавних ліній. Аналогічні задачі постають в графіці комп'ютерних ігор. Одним з варіантів вирішення цієї проблеми є використання сплайнів.

Метою роботи є розробка математичної моделі інтерполяції сплайнами з поліпшеними інтерполяційними властивостями, порівняно з математичною моделлю Ермітового кубічного сплайна.

Розробка математичної моделі тригонометричної інтерполяції (ТІ)

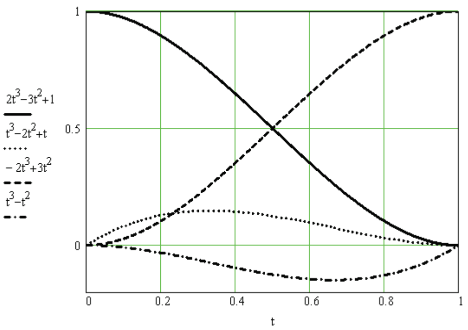

Рис. 1. Базові функції ермітового кубічного сплайна

Розглянемо одну з форм представлення інтерполяційного кубічного сплайна Ерміта, для якої характерна рівність перших похідних сплайнів в спільних точках дотику заданої сітки [2]. Для сітки вузлових значень аргумента та функції $x_k,\ y_k,\ \ k=1,\ldots,n,\ k\in N,$ інтерполяція виконується на підінтервалі $[x_k, x_{k+1}]$, який нормалізується до змінної $t_k = \dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k},\quad t\in[0,1]$. Нехай $y'_k = m_k$.

На кожному нормалізованому інтервалі в початковій точці $x_i,\ t_i = 0$, в кінцевій точці $x_{i+1},\ t_i = 1$. Кубічний сплайн Ерміта матиме вигляд

$$S_i(t_i) = (2t_i^3 - 3t_i^2 + 1)y_i + (t_i^3 - 2t_i^2 + t_i)m_i + (-2t_i^3 + 3t_i^2)y_{i+1} + (t_i^3 - t_i^2)m_{i+1},\quad t_i\in[0,1]. \qquad (1)$$

Розглянувши графіки виразів (рис. 1) біля кожного із коефіцієнтів y_i, y_{i+1}, m_i, m_{i+1} по нормалізованій змінній $t_i\in[0,1]$, припустимо можливість їх заміни на вирази з використанням тригонометричних функцій. Отримаємо тригонометричний сплайн вигляду:

$$S_i(t) = y_i \cos(t_i)^2 + m_{i+1} 0,096225\left(\cos(3t_i) - \cos(t_i)\right) + \\ + y_{i+1} \sin(t_i)^2 + m_i 0,096225\left(\sin(3t_i) + \sin(t_i)\right), \; t_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{2}$$

Невідомі коефіцієнти m_i та m_{i+1} у виразі (2) розраховуються наближено з формули

$$m_i = 0,5\left(\left(y_i - y_{i-1}\right)/\left(x_i - x_{i-1}\right) + \left(y_{i+1} - y_i\right)/\left(x_{i+1} - x_i\right)\right).$$

Для виразу (2) застосовувалась нормалізація вигляду $t_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\frac{\pi}{2}$, $t_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Числові коефіцієнти виразу (2) біля m_i та m_{i+1} отримані розрахунково. Як і для (1), перші похідні в вузлових точках інтерполяції для (2) рівні. Коефіцієнти m_i та m_{i+1} визначаються за формулами наближеного розрахунку похідних.

Для перевірки розробленої моделі тригонометричної інтерполяції розглянемо практичні результати інтерполювання. Візьмемо функцію $y = \frac{\sin(x)}{x}$, значення $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Підставивши аргумент в функцію, отримаємо набір базових точок, які проінтерполюємо сплайнами Ерміта та розробленою модифікованою моделлю. В таблиці наведені відхилення побудованих сплайнів від дійсної функції. Виконуючи подальшу перевірку та співставлення результатів роботи моделей на конкретних прикладах помічено, що розроблена тригонометрична інтерполяція має кращі інтерполяційні характеристики, в порівнянні зі сплайнами Ерміта, для наборів вхідних даних, які утворюють плавні, наближені до періодичних графіки.

Перевірка адекватності моделі ТІ на прикладі

	Тригонометрична інтерполяція	Інтерполяція сплайнами Ерміта
Максимальне відхилення	1,9249	1,9260
Середнє відхилення	0,5916	0,5918

Висновки

Розроблена математична модель тригонометричної інтерполяції, яка дозволяє отримати кращі результати, порівняно з ермітовою інтерполяцією для окремих наборів базових точок, зокрема для плавних, наближених до періодичних графіків. Подібний факт пояснюється застосуванням тригонометричних функцій у представленні тригонометричного сплайна.

Модифіковану математичну модель сплайна (2) доцільно використовувати у інженерних задачах і комп'ютерній графіці, де швидкість розрахунку кривої важливіша за точність.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Завьялов Ю. С. Сплайны в инженерной геометрии / Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелова В. А. — М.: Машиностроение, 1985. — 221 с.
2. Стечкин С. Б. Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. — М.: Наука, 1976. — 248 с.

Рекомендована кафедрою автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки.

Надійшла до редакції 11.12.07
Рекомендована до друку 24.12.07

Квєтний Роман Наумович — завідувач кафедри, ***Дементьєв Віктор Юрійович*** — аспірант.

Кафедра автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки, Вінницький національний технічний університет