УДК 681.5.015+62-83:629.433

Б. І. Мокін, д. т. н., проф.;
О. Б. Мокін , к. т. н.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ БАГАТОМАСОВИХ РОЗПОДІЛЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ (ЧАСТИНА 1)

Запропоновано математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем класу багатовагонних потягів з електричною тягою, придатні для задач оптимізації режимів їх тягових електроприводів.

Вихідні умови та постановка задачі

Задача оптимізації режимів тягових електроприводів багатовагонних потягів за критерієм мінімуму витрат електричної енергії була, є і буде актуальною, оскільки довжина електрифікованих залізничних колій з кожним роком зростає, а вартість електричної енергії невпинно збільшується. Загальновідомо, що при розв'язанні цього класу задач оптимізації необхідно враховувати рівняння динаміки електропотяга, яке для руху одного вагона по горизонтальній прямолінійній ділянці залізничної колії, наприклад, трамвая можна записати у вигляді [1, 2]

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_{\text{Т}} - M_{\Gamma}, \tag{1}$$

де ω — кутова швидкість обертання ротора тягового електродвигуна, J — момент інерції вагона, приведений до осі ротора тягового електродвигуна, $M_{\text{Т}}$ — тяговий обертальний момент, створюваний цим електродвигуном, M_{Γ} — гальмівний момент, створюваний навантаженням на вал електродвигуна.

Але навіть при здійсненні руху по горизонтальній прямолінійній ділянці залізничної колії електропотяга з кількох вагонів рівняння (1) при розв'язанні задачі оптимізації режиму роботи електропривода за визначеним вище критерієм використаним бути не може, оскільки не існує способу приведення до вала ротора тягового електродвигуна моментів інерції зчеплених з електровозом вагонів.

Виходячи з цього корисніше застосовувати і в задачах оптимізації тягових електроприводів електропотягів аналог рівняння (1) у класичній формі другого закону Ньютона [3], яке для одного вагона масою m матиме вигляд

$$m\frac{dV}{dt} = F_{\text{Т}} - F_{\Gamma}, \tag{2}$$

де V — лінійна швидкість руху вагона, $F_{\text{Т}}$ — сила тяги, що діє на вагон, а F_{Γ} — гальмівна сила.

Очевидно, що при русі по горизонтальній прямолінійній ділянці залізничної колії потяга із кількох вагонів рівняння (2) легко узагальнюється до вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dV}{dt} = F_{\text{Т}} - \sum_{i=1}^{n} F_{\Gamma i}, \tag{3}$$

де m_i — маса i-го вагона, n — кількість вагонів з електровозом включно, а $F_{\Gamma i}$ — гальмівна сила, створювана кожним вагоном потяга.

Саме у вигляді (3) рівняння динаміки електропотяга найчастіше використовується при розв'язанні задач оптимізації режимів роботи тягового електропривода.

Але для залізничних колій характерним є те, що між їх горизонтальними прямолінійними відрізками лежать закруглення, як це показано, наприклад, на рис. 1, де між горизонтальними відрізками Aa, c_1c_2, bB лежать закруглення з дугами ac_1, c_2b радіусів R_1 та R_2.

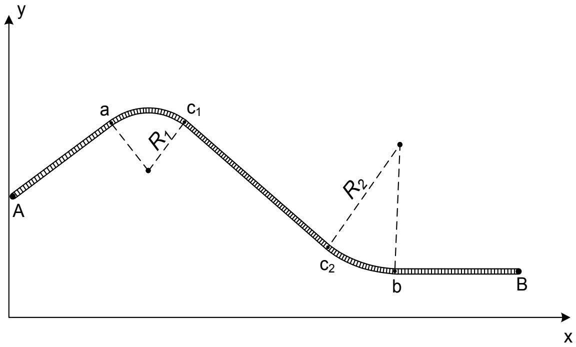

Рис. 1. Вигляд відрізка залізничної колії, що з'єднує пункти *A* і *B*, в проекції на горизонтальну площину (*x*, *y*)

І при виїзді хоча б одного вагона потяга з прямолінійного відрізка колії на закруглення скалярне рівняння динаміки руху уже не буде вірним оскільки з'являється доцентрова складова прискорення, яка відхиляє напрям дії як тягової так і гальмівних сил від напряму вектора швидкості кожного вагона [3].

Складнішими у цьому випадку стають і залежності, за допомогою яких здійснюється обчислення цих сил.

Побудові математичних моделей динаміки багатовагонних електропотягів по горизонтальним ділянкам залізничної колії, які містять не лише прямолінійні відрізки, але і закруглення, причому моделей, придатних для розв'язання задач оптимізації електроприводів цих електропотягів, і присвячено дану статтю.

Побудова математичних моделей

Процес побудови математичних моделей багатомасових розподілених динамічних систем (далі — БМРДС) класу багатовагонних потягів з електричною тягою (далі — БВПЕТ), розпочнемо з вибору системи координат на горизонтальній площині, на якій прокладена залізнична колія.

В класичній механіці [3] для аналізу динаміки рухомих об'єктів, як правило, застосовують одночасно дві системи координат — рухому, прив'язану до центра маси рухомого об'єкта, в координатах якої виражають рух точок цього об'єкта відносно її координатних осей, і нерухому, в координатах якої виражають рух центра маси цього об'єкта, або, що одне і те ж саме, рух координатних осей рухомої системи відносно координатних осей нерухомої.

Такий підхід є абсолютно необхідним і єдино можливим при розгляді динаміки об'єкта в просторі трьох змінних і виправданим в багатьох задачах при розгляді динаміки об'єкта на площині, тобто в просторі двох змінних, оскільки дає можливість адекватно передати механіку руху об'єкта. Але двосистемнокоординатні моделі динаміки БМРДС класу БВПЕТ є незручними для розв'язання задач оптимізації режимів їх тягових електроприводів, оскільки аналітичні методи оптимізації пристосовані до задавання обмежень руху об'єкта, що оптимізується, в одній системі координат.

Тож для адаптації моделей БМРДС класу БВПЕТ до вимог методології оптимізації будемо будувати ці моделі в одній системі координат (рис. 2), вісь абсцис в якій проходить через сусідні пункти зупинки, а вісь ординат проходить через пункт початку руху.

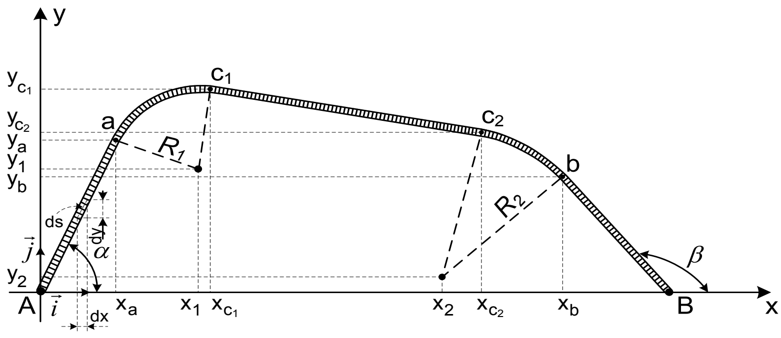

Рис. 2. Система координат (*x*, *y*), накладена на відрізок залізничної колії між пунктами зупинки *A* та *B* за умови, що електропотяг рухається від пункту *A* до пункту *B*

Цілком очевидно, що для електропотягів, які рухаються від пункту зупинки B до пункту A при нашому підході вісь ординат буде проходити через пункт B, а вісь абсцис матиме напрямок, протилежний вказаному на рис. 2.

При виконанні поставленої умови кожну точку середньої лінії пари рейок залізничної колії можна задати парою координат x, y, зв'язаних між собою наступною, складеною з відрізків прямих і дуг кіл, залежністю

$$y=\begin{cases} k_a x, \quad x\in[x_A, x_a]; \\ y_1+\sqrt{R_1^2-(x-x_1)^2}, \quad x\in\left[x_a, x_{c_1}\right]; \\ k_{c_1}\left(x-x_{c_1}\right)+y_{c_1}, \quad x\in\left[x_{c_1}, x_{c_2}\right]; \\ y_2+\sqrt{R_2^2-(x-x_2)^2}, \quad x\in\left[x_{c_2}, x_b\right]; \\ k_b(x-x_b)+y_b, \quad x\in[x_b, x_B], \end{cases} \tag{4}$$

в якій

$$\begin{cases} k_a=\operatorname{tg}\alpha; \\ k_b=\operatorname{tg}\beta, \end{cases} \tag{5}$$

а зміст усіх інших складових легко читається з рис. 2.

Зв'язавши між собою координати x, y кожної точки середньої лінії залізничної колії, ми тепер можемо для l-го вагона масою m_l електропотяга, який разом з електровозом налічує n вагонів, задати векторний аналог рівняння (2) у вигляді

$$m_l\frac{d\vec{V}_l}{dt}=\vec{F}_{\text{Т}l}(x,y)-\vec{F}_{\Gamma l}(x,y), \quad l=\overline{1,n}, \tag{6}$$

а динаміку усього електропотяга описати системою рівнянь

$$\begin{cases} m_1\dfrac{d\vec{V}_1}{dt}=\vec{F}_{\text{Т}1}(x,y)-\vec{F}_{\Gamma 1}(x,y); \\ m_2\dfrac{d\vec{V}_2}{dt}=\vec{F}_{\text{Т}2}(x,y)-\vec{F}_{\Gamma 2}(x,y); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_l\dfrac{d\vec{V}_l}{dt}=\vec{F}_{\text{Т}l}(x,y)-\vec{F}_{\Gamma l}(x,y); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n\dfrac{d\vec{V}_n}{dt}=\vec{F}_{\text{Т}n}(x,y)-\vec{F}_{\Gamma n}(x,y), \end{cases} \tag{7}$$

в якій перше рівняння описує динаміку електровоза електропотяга, а останнє рівняння описує динаміку останнього вагона, що передбачає нумерацію вагонів з «голови» потяга.

Оскільки вектори прискорень і вектори сил на координатній площині (x,y) з ортами координатних осей $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ на кожному прямолінійному відрізку чи закругленні залізничної колії для кожного l-го вагона електропотяга можна задати їх проекціями на координатні осі у вигляді

$$\frac{d\vec{V}_l}{dt}=\vec{i}\,\frac{dV_l^x}{dt}+\vec{j}\,\frac{dV_l^y}{dt}, \quad l=\overline{1,n}; \tag{8}$$

$$\vec{F}_{\text{Т}l}(x,y)=\vec{i}F_{\text{Т}l}^x(x,y)+\vec{j}F_{\text{Т}l}^y(x,y), \quad l=\overline{1,n}; \tag{9}$$

$$\vec{F}_{\Gamma l}(x,y)=\vec{i}F_{\Gamma l}^x(x,y)+\vec{j}F_{\Gamma l}^y(x,y), \quad l=\overline{1,n}, \tag{10}$$

то системі n векторних рівнянь (7) можна поставити у відповідність дві n-вимірні системи скалярних рівнянь, що мають вигляд

$$m_l\frac{dV_l^x}{dt}=F_{\text{Т}l}^x(x,y)-F_{\Gamma l}^x(x,y), \quad l=\overline{1,n}; \tag{11}$$

$$m_l\frac{dV_l^y}{dt}=F_{\text{Т}l}^y(x,y)-F_{\Gamma l}^y(x,y), \quad l=\overline{1,n}. \tag{12}$$

Очевидно, що перша з цих скалярних систем — система (11) описує динаміку руху електропотяга вздовж осі x, а друга — система (12) — вздовж осі y.

Але перш ніж переходити до розв'язку систем рівнянь (11), (12) при заданих силах необхідно задати залежність координат x, y від t, оскільки без наявності такої залежності не вдасться виразити сили як функції часу в цих системах рівнянь.

На наш погляд функцію $x(t)$ для довільного вагона можна задати у вигляді

$$x(t) = x_0 f(t), \tag{13}$$

де

$$f(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3. \tag{14}$$

Як загальновідомо з механіки: швидкість — це похідна від шляху, прискорення — похідна від швидкості, а ривок — похідна від прискорення. На ривок в усіх транспортних засобах, що перевозять людей, накладається обмеження. А щоб задати обмеження на $\dddot{x}(t)$, необхідно, щоб існувала третя похідна від $f(t)$ при представленні $x(t)$ у вигляді (13). Із цього випливає, що задаючи $f(t)$ у вигляді полінома, цей поліном повинен бути не нижче 3-го порядку, як і у (14). Задавати ж вищий ніж третій порядок полінома $f(t)$ немає сенсу, оскільки більш високий порядок $f(t)$, ускладнюючи обчислювальні процедури, не вноситиме нічого нового у фізику процесу, що характеризується пройденим шляхом, швидкістю на маршруті, прискоренням при переході від одного значення швидкості руху до іншого та ривком, що характеризує швидкість наростання прискорення.

Цілком очевидно, що для того, щоб задати координату y як функцію часу на кожному відрізку залізничної колії, необхідно значення $x(t)$ у вигляді (13) з урахуванням (14) підставити у модель (4).

Для того, щоб отримані моделі використовувати в якості обмежень при розв'язанні задач оптимізації, необхідно розкрити структуру і побудувати моделі усіх сил, які діють на кожний вагон потяга. Але побудовою моделей сил в необхідній формі ми займемося вже у наступній статті.

Висновки

Запропонована така прив'язка системи координат на площині, яка дає можливість побудувати математичну модель середньої лінії залізничної колії у вигляді, найбільш зручному для подальшого аналізу динаміки багатовагонного потяга. Побудована математична модель динаміки багатовагонного потяга у вигляді системи $2n$ диференціальних рівнянь 1-го порядку, придатних для використання при розв'язанні задач оптимізації за критерієм мінімуму витрат електроенергії під час руху від однієї зупинки до наступної. Вибрана і обґрунтована параметрична модель, що характеризує зміну координат центра мас кожного вагона у часі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Петров Ю. П. Вариационные методы оптимального управления / Ю. П. Петров. — Л.: Энергия. Ленингр. отделение, 1965. — 220 с.

2. Мокін Б. І. Ідентифікація параметрів моделей та оптимізація режимів системи електропривода трамвая з тяговими електродвигунами постійного струму: [монографія] / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. — 92 с.

3. Стрелков С. П. Механика / С. П. Стрелков. — М.: Наука, 1965. — 528 с.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління

Надійшла до редакції 21.10.08
Рекомендована до друку 20.11.08

Мокін Борис Іванович — професор, ***Мокін Олександр Борисович*** — доцент.

Кафедра електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті, Вінницький національний технічний університет