УДК 519.642:624.044:624.15

А. С. Моргун, д-р. техн. наук, проф.;
С. О. Краєвський, студ.;
О. В. Стрельцов, студ.

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В СТЕРЖНЕВИХ ЕЛЕМЕНТАХ НАЗЕМНОЇ ЧАСТИНИ БУДІВЛІ ЗА МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Запропоновано методику розрахунку за числовим методом граничних елементів конструктивного елемента балки. Методика дає можливість отримання достовірної картини напружено-деформованого стану.

Вступ

Підвищення вимог до розрахункової обґрунтованості прийняття проектних рішень в сучасній будівельній галузі потребує постійного удосконалення методів міцністних розрахунків елементів конструкцій та висотних будівель в цілому. Метод граничних елементів (МГЕ) зарекомендував себе як конкурентоспроможний, ефективний засіб розв’язання задач статики, динаміки, стійкості стержневих систем. Незважаючи на складність і глибину методу, розрахунковий апарат МГЕ, застосований в статті, відрізняється ясністю сприйняття і простотою, зберігає чіткий фізичний зміст задачі.

Постановка задачі, визначальні співвідношення

Багато задач механіки пружного стержня зводиться до розв’язання лінійних неоднорідних диференційних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y(x) = q(x), \tag{1}$$

які задовольняють задані початкові умови

$$y(0) = y_0;\ y'(0) = y_0';\ \ldots\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Як відомо, такі задачі знаходження часткового значення рівняння (1), яке б задовольняло початкові умови (2), називають задачею Коші. Інтегрування диференційного рівняння зігнутої осі стержня (закону Гука при згинанні)

$$\frac{1}{\rho(x)} = y''(x) = -\frac{M(x)}{EI} \tag{3}$$

приводить до системи рівнянь [1]:

$$\begin{cases} EIy(x) = EIy(0) + EI\varphi(0)x - \dfrac{M(0)}{2}x^2 - \dfrac{Q(0)}{6}x^3 - \int\limits_0^x\int\limits_0^x\int\limits_0^x\int\limits_0^x q\,dxdxdxdx; \\ EI\varphi(x) = EI\varphi(0) - M(0)x - \dfrac{Q(0)x^2}{2} - \int\limits_0^x\int\limits_0^x\int\limits_0^x q\,dxdxdx; \\ M(x) = M(0) + Q(0)x + \int\limits_0^x\int\limits_0^x q\,dxdx; \\ Q(x) = Q(0) + \int\limits_0^x q\,dx, \end{cases} \tag{4}$$

де $y(x)$, $\varphi(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ — відповідно прогин, кут повертання, згинальний момент, поперечна сила на відстані x від початку координат стержня: $y(0)$, $\varphi(0)$, $M(0)$, $Q(0)$ — ті ж параметри згину на початку координат (про $x = 0$), які прийнято називати початковими параметрами.

Система рівнянь (4) в матричному поданні (розрахункові співвідношення МГЕ):

$$Y = AX(0) + B, \tag{5}$$

де Y — матриця зусиль і переміщень в довільному перетині — матриця шуканих параметрів згину; $X(0)$ — матриця зусиль і переміщень на початку координат — матриця початкових параметрів. Знаходяться із граничних умов опирання стержня і рівнянь рівноваги; A — матриця коефіцієнтів системи рівнянь згину — матриця фундаментальних ортонормованих функцій.

Для отримання часткового рішення диференційного рівняння зігнутої осі стержня (3) безпосередньо через задане навантаження найзручнішою формою його запису для застосування у механіці [2] є вираз

$$y*(x) = \int_0^x G(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

де $G(x,\xi)$ — функція впливу Гріна для крайових задач, ξ — точка прикладання навантаження, x — точка спостереження. В цьому випадку система фундаментальних функцій $y*(x)$ буде ортонормованою системою в точці $x = 0$, тобто найефективнішою системою фундаментальних функцій серед інших систем. B — матриця зовнішнього навантаження. Формується за допомогою методу початкових параметрів з використанням функції-перериватча Хевісайда та дельта-функції Дірака, які легко програмуються на будь-якій алгоритмічній мові.

Система МГЕ (5) має свої особливості, які суттєво відрізняються від параметрів подібних систем класичних методів визначення напружено-деформованого стану (НДС) — методу сил, методу переміщень та числового методу скінчених елементів (МСЕ). Матриця A — сильно розріджена, цей фактор суттєво покращує стійкість числових операцій і забезпечує точність результатів. МГЕ не потребує зведення навантаження до еквівалентного вузлового, як це робиться в МСЕ.

Для прикладу розрахунку взято стержневий елемент — балку, вихідна розрахункова схема якої показана на рис. 1.

Вихідні данні розрахунку: $l = 9$ м, $F = 100$ kH, $M = 90$ kH·м, $q = 40$ kH/м, $a_F = 4$ м, $a_M = 8$ м.

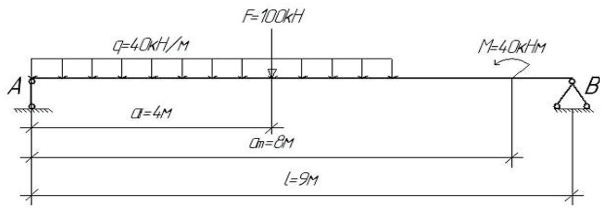

Рис. 1. Розрахункова схема балки

Вищевказані матриці (5) мають вигляд

$$Y = \begin{vmatrix} EIy(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{vmatrix};\; A = \begin{vmatrix} 1 & x & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} \\ & 1 & -x & -\frac{x^2}{2} \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{vmatrix};\; x(0) = \begin{vmatrix} EIy(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{vmatrix};\; B = \begin{vmatrix} B_{11}(x) \\ B_{21}(x) \\ -B_{13}(x) \\ -B_{41}(x) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Вирази для визначення вектора B — складові від зовнішнього навантаження:

$$B_{11} = H(x-8)40\frac{(x-8)^2}{2} + H(x-4)100\frac{(x-4)^3}{6} + H(x-0)40\frac{(x-0)^4}{24} - H(x-6)40\frac{(x-6)^4}{24};$$

$$B_{21} = H(x-8)40(x-8) + H(x-4)100\frac{(x-4)^2}{2} + H(x-0)40\frac{(x-0)^3}{6} - H(x-6)40\frac{(x-6)^3}{6};$$

$$B_{31} = H(x-8)40 + H(x-4)100(x-4) + H(x-0)40\frac{(x-0)^2}{2} - H(x-6)40\frac{(x-6)^2}{2};$$

$$B_{11} = H(x-4)100 + H(x-0)40(x-0) - H(x-6)40(x-6);$$

де $H(x-a)$ — функція Хевісайда, $H(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1, & x \ge a. \end{cases}$

Параметри згину визначались в семи характерних перетинах балки (рис. 1), в яких x набував значення:

№ перетину	1	2	3	4	5	6	7
Значення x, м	0	4	4	6	8	8	9

З умов опирання і умов рівноваги балки знаходиться вектор початкових параметрів $X(0)$.

$EIy(0)=0$, $M(0)=0$, $Q(0)=V_A=220$ kH.

Невідомий у векторі $X(0)$ кут повороту знаходиться з рівнянь (9) методу початкових параметрів:

$$y(x)=y(0)+\varphi(0)x+\frac{1}{EI}\left[\begin{array}{c}M(0)\dfrac{x^2}{2!}+Q(0)\dfrac{x^3}{3!}-q\dfrac{(x-0)^4}{4!}-\dfrac{F(x-4)^3}{3!}+\\+q\dfrac{(x-6)^4}{4!}-M\dfrac{(x-8)^2}{2!}\end{array}\right]. \tag{9}$$

Підставляючи у рівняння (9) $x=9$ м, отримаємо:

$$y(l=9)=y(0)+\varphi(0)\cdot 9+\frac{1}{EI}\left[0\frac{9^2}{2!}+220\frac{9^3}{3!}-40\frac{9^4}{4!}-100\frac{5^3}{3!}+40\frac{3^4}{4!}-40\frac{1}{2}\right].$$

Звідки $\varphi(0)=-\dfrac{1536,3}{EI}$.

Для точки $x=0$ система (5) матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\ \dfrac{-1536,3}{EI}\\0\\220\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\ \dfrac{-1536,3}{EI}\\0\\220\end{vmatrix};$$

для точок $x=4$ м (зліва; справа):

$$\begin{vmatrix}1&4&-8&10,67\\0&1&-4&-8\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\ \dfrac{-1536,3}{EI}\\0\\220\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-426,67\\-426,67\\-320\\-160\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{-4225,2}{EI}\\ \dfrac{-202,9}{EI}\\560\\60\end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix}1&4&-8&10,67\\0&1&-4&-8\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\ \dfrac{-1536,3}{EI}\\0\\220\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-426,67\\-426,67\\-320\\-260\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{-4225,2}{EI}\\ \dfrac{-202,9}{EI}\\560\\-40\end{vmatrix};$$

для точки $x=6$ м:

$$\begin{vmatrix}1&6&-18&-36\\0&1&-6&-18\\0&0&1&6\\0&0&0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\ \dfrac{-1536,3}{EI}\\0\\220\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2293,33\\-1640\\-920\\-340\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{-3591,1}{EI}\\ \dfrac{783,7}{EI}\\400\\-120\end{vmatrix};$$

для точки $x = 8$ м (зліва; справа): $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -32 & 85,33 \\ 0 & 1 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{-1536,3}{EI} \\ 0 \\ 220 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7866,67 \\ 4160 \\ -1600 \\ -340 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-1383,74}{EI} \\ \dfrac{1343,7}{EI} \\ 160 \\ -120 \end{vmatrix}$;

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -32 & 85,33 \\ 0 & 1 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{-1536,3}{EI} \\ 0 \\ 220 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7866,67 \\ 4160 \\ -1640 \\ -340 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-1383,74}{EI} \\ \dfrac{1343,7}{EI} \\ 120 \\ -120 \end{vmatrix};$$

для точки $x = 9$ м: $\begin{vmatrix} 1 & 9 & -40,5 & -121,5 \\ 0 & 1 & -9 & -40,5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{-1536,3}{EI} \\ 0 \\ 220 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -12903,33 \\ -5970 \\ -1980 \\ -340 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{1403,7}{EI} \\ 0 \\ -120 \end{vmatrix}$.

Епюри зусиль і переміщень за результатами розрахунку зображені на рис. 2.

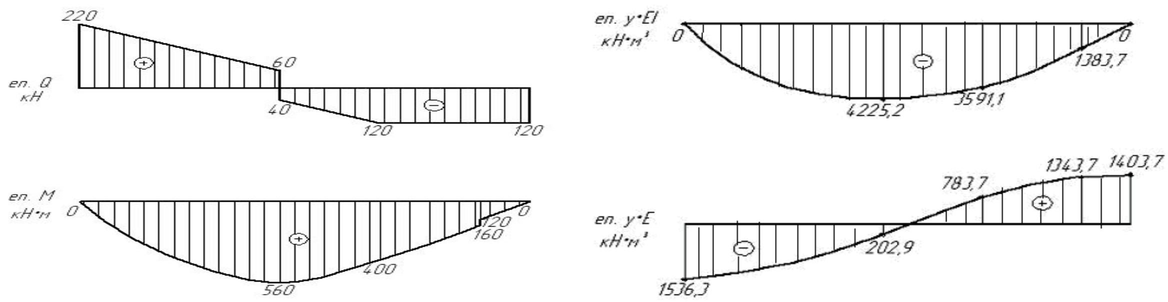

Рис. 2. Епюри зовнішніх зусиль

Висновки

1. Дані числового експерименту дослідження параметрів згину балки за МГЕ повністю співпадають з даними аналітичних розрахунків.

2. За умови наявності фундаментальних функцій МГЕ дає можливість достовірного розрахунку НДС будівельних конструкцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов / [В. А.Баженов, А. Ф. Дащенко, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей]. — Одесса : Астропринт, 2001. — 288 с. — ISBN 966-96331-2-5.

2. Бенерджи П. К. Методы граничных элементов в прикладных науках; под редакцией Гольдштейна Р. О. / П. К. Бенерджи, В. М. Баттерфилд. — Мир, 1984. — 494 с.

Рекомендована кафедрою промислового та цивільного будівництва

Надійшла до редакції 5.03.09
Рекомендована до друку 16.03.09

Моргун Алла Серафимівна — завідувач кафедри промислового та цивільного будівництва;

Краєвський Станіслав Олександрович, ***Стрельцов Олександр Валерійович*** — студенти Інституту будівництва теплоенергетики і газопостачання.

Вінницький національний технічний університет