

УДК 621.7:519.85

В. М. Михалевич, д-р техн. наук, проф.;

Ю. В. Добранюк, асп.

## МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ МАТЕРІАЛУ НА ВІЛЬНІЙ ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЗРАЗКІВ ПІД ЧАС ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО ОСАДЖЕННЯ. ЧАСТИНА 1. АПРОКСИМАЦІЯ ДЕФОРМАЦІЙ

*Детально розглянуто задачу апроксимації експериментальних даних, необхідних для визначення накопиченої деформації за умов складного деформування, що має місце на вільній бічній поверхні під час вісесиметричного осадження циліндричних зразків за різних умов тертя на торцях. Виконано детальний аналіз і вдосконалення відомої методики апроксимації деформацій на основі диференціального рівняння, та на її основі розроблені інформаційні технології визначення залежностей між деформаціями на вільній бічній поверхні циліндричного зразка під час осадження.*

### Вступ

Вісесиметричне осадження циліндричних зразків є не тільки поширеною технологічною операцією, але і одним із видів лабораторних досліджень для визначення найважливіших технологічних властивостей матеріалів. Як відомо [1—4], під час осадження циліндричних зразків із малопластичних матеріалів на бічній поверхні утворюються тріщини. Причому ступінь осадження, з яким з'являються тріщини, залежить від інтенсивності бочкоутворення на бічній поверхні. У свою чергу інтенсивність бочкоутворення визначається умовами тертя на торцях заготовки [2, 4]. У роботі [1] розроблена експериментально-аналітична методика визначення напружено-деформованого стану на бічній поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження між плоскими плитами. Окремі частини цієї методики використовувалися і удосконалювалися в багатьох роботах, перш за все в [2—4]. При цьому розвиваючи і удосконалюючи, насамперед експериментальну частину методики, а також застосовуючи складніші моделі руйнування, автори прагнули спростити розрахункову частину, що було, в деякій мірі, виправдано рівнем обчислювальних засобів того часу. В результаті, на думку авторів, аналітична частина методики визначення напружено-деформованого стану яка становить науковий і практичний інтерес, залишилася фактично непоміченою. Більш того, в новому виданні [5] ця методика взагалі не висвітлюється. Таким чином, до теперішнього часу утворився значний розрив між сучасними можливостями інформаційних технологій та існуючими методиками визначення напружено-деформованого стану і граничних пластичних деформацій матеріалу під час нестационарних процесів, які мають місце на вільній бічній поверхні циліндричного зразка, що осаджується між плоскими плитами. Подібна ситуація призводить, як до невиправданих інтелектуальних і часових витрат дослідників та інженерів під час розв'язання вказаних задач, так і до появи в кінцевих результатах похибки невизначеної величини, яка породжується суб'єктивізмом конкретного фахівця.

*Метою роботи є детальний аналіз та удосконалення відомої методики [1], а також розробка інформаційних технологій визначення залежностей між деформаціями матеріалу на вільній бічній поверхні циліндричного зразка під час осадження між плоскими плитами.*

### Опис методики

На бічну поверхню циліндричного зразка у середній по висоті зоні наноситься сітка. Сітка наноситься друкарським способом [1] або за допомогою алмазних відбитків, виконаних на твердомірі «Віккерс» [2]. За наслідками вимірювань спотвореної ділильної сітки на проміжних стадіях деформування встановлюється залежність між осьовою  $\varepsilon_z$  і коловою  $\varepsilon_\phi$  деформаціями у вигляді таблично заданої функції. Деформації  $\varepsilon_z$  та  $\varepsilon_\phi$  визначаються як натуральні логарифми відношення поточних розмірів до початкових [1].

$$\varepsilon_z = f(\varepsilon_\phi). \quad (1)$$

У роботі [1] запропонована апроксимація залежності (1) у вигляді розв'язку диференціального рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2}{\varepsilon_\phi^2 + m^2}, \quad (2)$$

де  $m > 0$  — константа, яка визначається експериментально. Рівняння (2) відображає дві важливі граничні умови. У початковий момент, при  $\varepsilon_\phi = 0$  має місце простий стиск

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} = -2. \quad (3)$$

Зі збільшенням  $\varepsilon_\phi$ , у зв'язку з розвитком бочкоутворення бічної поверхні, відношення приростів осрової та колової деформацій збільшується (за абсолютною величиною зменшується), але на будь-якій стадії осадження, у тому числі і при необмеженому збільшенні деформації, має місце вираз

$$\lim_{\varepsilon_\phi \rightarrow \infty} \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} = -\frac{1}{2}. \quad (4)$$

Таким чином, протягом процесу осадження на вільній бічній поверхні повинні виконуватися умови

$$-2 \leq \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} < -\frac{1}{2}, \quad (5)$$

причому значення похідної  $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi}$  монотонно збільшується зі зростанням деформацій, що є наслідком поступового збільшення бочкоутворення бічної поверхні в процесі осадження циліндричного зразка.

Розв'язуючи диференціальне рівняння (2), з урахуванням початкової умови

$$\varepsilon_z|_{\varepsilon_\phi=0} = 0, \quad (6)$$

отримаємо:

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2}\varepsilon_\phi - \frac{3}{2}m \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_\phi}{m}\right). \quad (7)$$

Таким чином, зберігаючи незмінними умови тертя на торцях під час осадження певного циліндричного зразка між плоскопаралельними плитами, але змінюючи ці умови для різних зразків, будемо експериментально отримувати залежності, які можуть бути апроксимовані співвідношенням (7) з відповідним підбором значення константи  $m$ . Тут важливо, що константа  $m$ , у найпростішому випадку, вважається незмінною під час опису результатів досліджень певного зразка. Графіки, що ілюструють поведінку відповідних функцій з різними значеннями параметра апроксимації  $m$  показані на рис. 1.

Під час визначення числового значення параметра  $m$  на підставі експериментальних даних постають декілька принципів питань.

На рис. 2 показані результати експериментальних даних та їх апроксимація як співвідношенням (2) так і співвідношенням (7). Слід звернути увагу на те, що мова йде не про різні апроксимації, а про різні форми представлення однієї і тієї ж залежності.

На кожному етапі деформування, використовуючи результати вимірювання висоти та ширини ділильної сітки, визначаються значення логарифмічних деформацій. Ординати експериментальних то-

чок, вказаних на рис. 2а, визначалися як відношення  $\frac{((\varepsilon_z)_i - (\varepsilon_z)_{i-1})}{((\varepsilon_\phi)_i - (\varepsilon_\phi)_{i-1})}$ ; абсциси визначалися як  $(\varepsilon_\phi)_i$

для точок, позначених квадратиками (крива 1), та  $0,5((\varepsilon_\phi)_i - (\varepsilon_\phi)_{i-1})$  — крива 2.

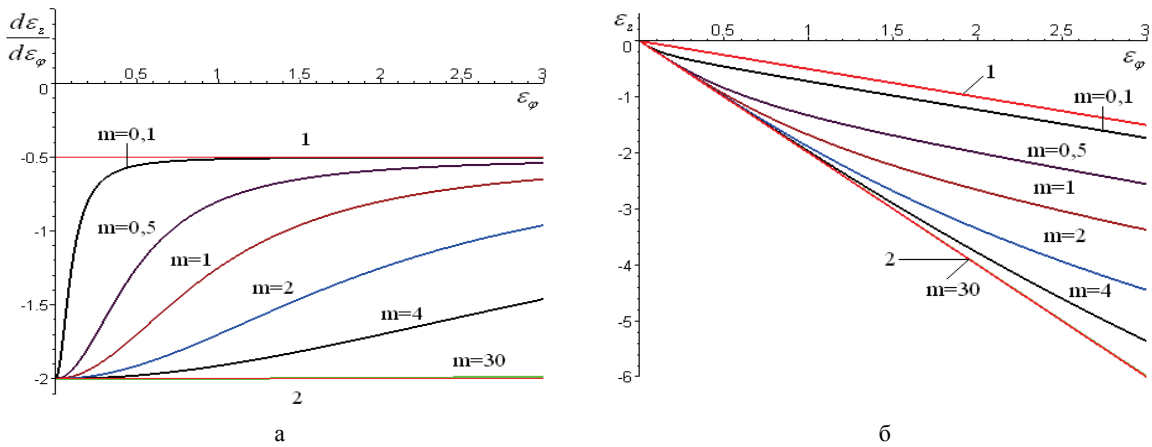


Рис. 1. Графіки залежності осьової деформації від колової деформації та похідної від цієї залежності при різних значеннях параметра  $m$ : а — розрахунок за співвідношенням (2); б — розрахунок за співвідношенням (7);

$$1 - \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_\phi}{2}; \quad 2 - \varepsilon_z = -2\varepsilon_\phi$$

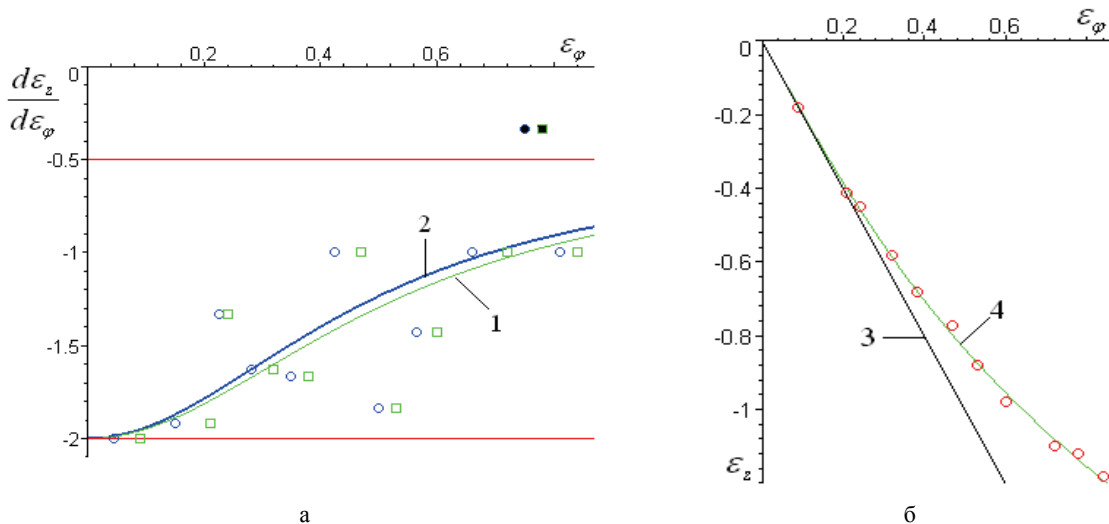


Рис. 2. Визначення параметра  $m$  методом найменших квадратів:

а — співвідношення (2); б — співвідношення (7); 1, □ —  $m = 0,53$ ; 2, ○ —  $m = 0,49$ ;  
3 —  $\varepsilon_z = -2\varepsilon_\phi$ ; 4, ○ —  $m = 0,49$

Як впливає із графіка на рис. 2а одна точка виходить за межі можливих значень (позначена через ● або ■). Цю точку логічно прийняти за викид. Після її вилучення на підставі залежності (6) методом найменших квадратів отримали значення параметра  $m = 0,5$ . Зазначимо, що визначення параметра  $m$  методом найменших квадратів як для співвідношення (2), так і для співвідношення (7) приводить до необхідності розв’язування трансцендентного рівняння складної структури. Тому значення параметра  $m$  знаходили безпосередньою мінімізацією суми квадратів відхилень за допомогою стандартної команди додаткового пакета Optimization системи Maple і перевіряли отримане значення за допомогою надбудови Microsoft Excel Solver.

Зазначимо, що в розглядуваних випадках (за необхідності числового диференціювання) зазвичай поступають таким чином [6, с. 70, с. 83]: методом найменших квадратів будують апроксимуючу функцію, що допускає аналітичне визначення похідних. Іншими словами мінімізують суму квадратів відхилень для співвідношення (1), а не для співвідношення типу (2). Пошук вдалого виду апроксимації (1) в нашому випадку розпочатий конструюванням співвідношення (2) тільки у зв’язку з наявністю умов (3)—(5), врахування яких, природно, приводить до повнішого і точнішого опису шуканої залежності при мінімальній кількості параметрів апроксимації. Дійсно, якщо піти

по стандартному шляху без урахування специфіки розглядуваного процесу, то в якості шуканої апроксимації (1) можна запропонувати замість (7) одну з найпоширеніших двопараметричних нелінійних функцій

$$\varepsilon_z = a \left( e^{-b \cdot \varepsilon_\phi} - 1 \right). \tag{8}$$

Ця апроксимація строго враховує лише умову (6). Результати визначення методом найменших квадратів параметрів  $a$  і  $b$  зведені в таблицю.

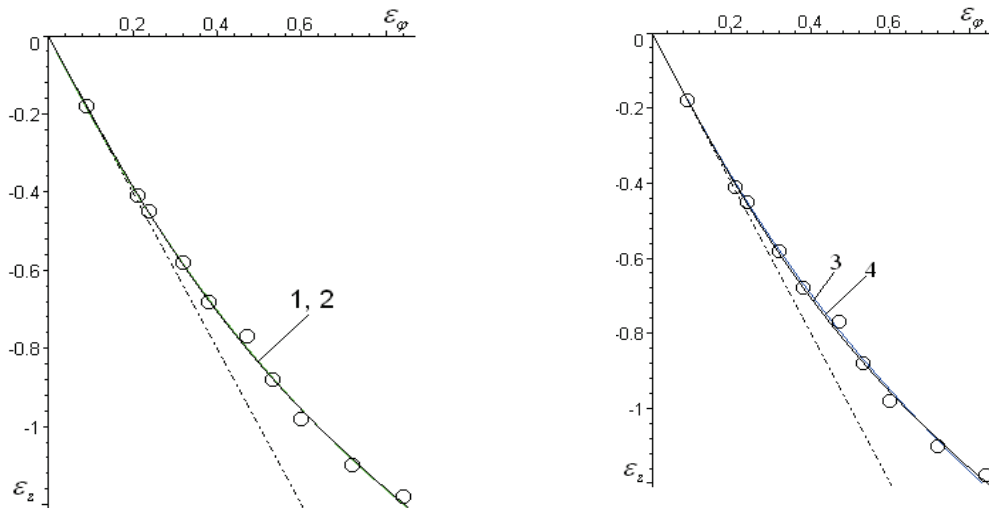


Рис. 3. Залежність між осьюовою  $\varepsilon_z$  та коловою  $\varepsilon_\phi$  деформаціями:

- 1, 2 — розрахунок за (7) ( $m = 0,5$ ) та (8) ( $a = 2,036; b = 1,057$ );
- 3, 4 — розрахунок за (7) ( $m = 0,5$ ) та (11) ( $p = 0,857$ );
- $-\varepsilon_z = -2\varepsilon_\phi$ ; o — експеримент (сталь 10)

З даних таблиці та з рис. 3, випливає, що апроксимації (7), (8) дають практично однакову точність. Звичайно, безперечно перевагу при цьому має апроксимація з меншою кількістю параметрів, тобто залежність (7). Крім того, апроксимація (8) має недоліки, що виявляються при диференціюванні отриманої залежності. На підставі (8), із урахуванням знайдених значень параметрів  $a$  і  $b$ , дістанемо

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} = -2,15 \cdot e^{-1,057 \cdot \varepsilon_\phi}, \tag{9}$$

звідки при  $\varepsilon_\phi = 0$  випливає  $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} = -2,15 \neq -2$ . Це означає, що спотворюється початкова ділянка

траєкторії деформування в координатах:  $\eta - \varepsilon_u$  (показник напруженого стану  $\eta$  дорівнює відношенню першого інваріанта тензора напружень до інтенсивності напружень [1—5, 7, 8],  $\varepsilon_u$  — накопичена пластична деформація). Ще більш значущий недолік виявляється при спробі екстраполяції апроксимації (8). Так, при  $\varepsilon_\phi > 1,38 \rightarrow \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} > -0,5$ , що суперечить механіці процесу деформування.

Ще один суб'єктивний чинник у разі побудови залежності типу (2) полягає у виборі параметра, що характеризує стадію процесу осадження. У співвідношенні (2) як параметр вибрана колова деформація. Запишемо співвідношення, аналогічне співвідношенню (2), але в якому як параметр процесу вибрана осьова деформація

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{p^2}{\varepsilon_z^2 + p^2}, \quad p > 0. \tag{10}$$

В даному випадку параметр апроксимації  $p$ , аналогічний параметру  $m$  в (2).

Розв'язком диференціального рівняння (10), із урахуванням початкової умови (6), дістанемо

$$\varepsilon_\phi = -2\varepsilon_z + 3p \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_z}{2p}\right). \quad (11)$$

Результат визначення методом найменших квадратів параметра  $p$  залежності (11) показано в табл. 1. Очевидно і це співвідношення має ту ж точність, що і апроксимація (7), проте на графіку ці апроксимації, на відміну від зіставлення (7), (8), все-таки помітні. Тим більше, насамперед нас цікавить зіставлення не самих апроксимацій, а похідних від цих апроксимацій, а ще точніше: траєкторій деформацій в координатах  $\eta - \varepsilon_u$ , що породжуються здобутими апроксимаціями.

На рис. 4 показані ці траєкторії та розрахункові значення граничної накопиченої деформації згідно з лінійним принципом накопичення пошкоджень [9]. Докладне викладення методики визначення напруженого стану та граничних деформацій планується у подальших публікаціях. Наведені в роботі результати важливі для демонстрації та аналізу зв'язку початкових і кінцевих результатів. Як впливає з порівняння наведених даних, траєкторії деформацій відрізняються помітно, причому додатковий аналіз показує, що відбувається це за рахунок значень показника напруженого стану. Проте розрахункові значення граничних деформацій по цих траєкторіях практично не відрізняються. Із цього випливають два важливі висновки. Основний результат — розрахункові значення граничної деформації мало чутливі до розкиду експериментальних даних визначення деформацій.

Траєкторії деформацій не можуть бути відновлені однозначно за наявності розглянутих похибок експериментальних даних. У той же час виявлена відмінність в траєкторіях деформацій не має принципового значення з точки зору визначення граничних деформацій.

Як ще одна альтернатива виразу (2) авторами запропонована така апроксимація

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-m \cdot \varepsilon_\phi}, \quad m > 0, \quad (12)$$

яка задовольняє умовам (3)—(5) та умові монотонного збільшення похідної  $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\phi}$  зі зростанням деформацій.

Розв'язком диференціального рівняння (12), з урахуванням початкової умови (6), дістанемо

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2} \varepsilon_\phi + \frac{3}{2m} \left( e^{-m\varepsilon_\phi} - 1 \right). \quad (13)$$

Результат визначення параметра  $m$  в (13) методом найменших квадратів, показано в таблиці. Як видно, на розглянутих експериментальних даних запропонована апроксимація дає більшу похибку, проте має важливу перевагу, що розглядатиметься нижче. До того ж набір різних апроксимацій, що задовольняють граничним умовам механіки процесу осадження, необхідний для підбору найбільш наближеної залежності під час розгляду ширшого кола матеріалів та умов тертя на торцях зразка в процесі деформування.

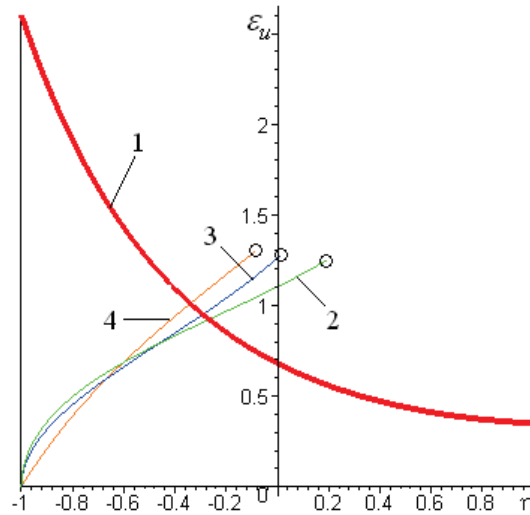


Рис. 4. Траєкторії деформацій та граничні деформації;

1 — крива граничних деформацій під час стаціонарного деформування; 2, 3, 4 — траєкторії деформацій розраховані на основі (7) ( $m = 0,5$ ), (11) ( $p = 0,857$ ), (13) ( $m = 1,154$ ) відповідно;  $\circ$  — розрахункові значення граничної накопиченої деформації по відповідних траєкторіях

**Результати знаходження параметрів апроксимації (7), (8), (11), (13) методом найменших квадратів**

Вид апроксимації $\varepsilon_z = f(\varepsilon_\phi)Z$ (№ формули)	Значення параметрів	Сума квадратів відхилень розрахункових та експериментальних даних $S = \sum_i [\varepsilon_z]_i - f([\varepsilon_\phi]_i)]^2$ для (7), (8), (13) $S = \sum_i [[\varepsilon_\phi]_i - \phi([\varepsilon_z]_i)]^2$ для (11)
(7)	$m = 0,5$	0,001081
(8)	$a = 2,036;$ $b = 1,057$	0,001025
(11)	$p = 0,857$	0,001080
(13)	$m = 1,154$	0,002874

Як видно з результатів, які показані на рис. 4, в розглянутому випадку підтверджується висновок про малий вплив розкиду експериментальних даних на розрахункове значення граничної деформації.

Автори не вважають питання чіткого математичного обґрунтування всіх етапів запропонованої методики повністю вичерпаними. Однак вважають за доцільне розробку подібних єдиних правил. Дану методику можна та потрібно удосконалювати, проте будь-які зміни повинні бути чітко обґрунтовані. Інакше обробкою одних і тих самих експериментальних даних різні дослідники отримуватимуть різні кінцеві результати. Така ситуація ускладнить пошук закономірностей пластичного деформування, притаманних даному процесу.

На закінчення питання про побудову апроксимуючої залежності (2) зазначимо, що в даному випадку фактично ми маємо справу з некоректною задачею. Цілком можливо, що вдосконалення викладеної методики, в результаті більш строгого її математичного обґрунтування, можна досягти на основі залучення регуляризації по А. Н. Тихонову [6, с. 61].

**Висновок**

Математичний апарат, наведений в цій роботі, є основою для визначення наружено-деформованого стану. Розроблені інформаційні технології дозволяють вибрати найкращу апроксимацію із запропонованих.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Инженерные методы расчета операций пластической обработки материалов / Г. А. Смирнов-Аляев. — М.–Л. : Машгиз, 1961. — 463 с.
2. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении / В. А. Огородников. — К. : УМК ВО, 1989. — 152 с.
3. Колмогоров В. Л. Напряжения, деформации, разрушение / В. Л. Колмогоров. — М. : Металлургия, 1970. — 230 с.
4. Пластичность и разрушение; под ред. В. Л. Колмогорова. М. : Металлургия, 1977. — 336 с.
5. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Инженерные расчеты процессов конечного формоизменения материалов / Г. А. Смирнов-Аляев. — Л. : Машиностроение, 1978. — 368 с.
6. Калиткин Н. Н. Численные методы / Калиткин Н. Н. — М. : Наука, 1978. — 512 с.
7. Лебедев А. А. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов / А. А. Лебедев, В. М. Михалевич. // Пробл. прочности. — 2003. — № 3. — С. 5—14.
8. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич — Вінниця: «УНІВЕРСУМ–Вінниця», 1998. — 195 с. — ISBN 966-7199-20-7.
9. Михалевич В. М. Побудова ефективних обчислювальних схем у Maple під час розв’язання задачі визначення граничних деформацій за умов складного деформування [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, О. В. Михалевич // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. — № 2. — Київ : Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського. — 2009. — 7 с.  
— Режим доступу до журн. : [http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009\\_2/2009-2.htm](http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009_2/2009-2.htm).

Рекомендована кафедрою прикладної математики

Надійшла до редакції 23.09.09  
Рекомендована до друку 3.10.09

**Михалевич Володимир Маркусович** — завідувач кафедри, **Добранюк Юрій Володимирович** — аспірант. Кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет