УДК 519.65.652

Р. Н. Квєтний, д-р. техн. наук, проф.;
В. Ю. Дементьєв, асп.

МОДИФІКОВАНІ ЕРМІТОВІ СПЛАЙНИ

Запропоновано модифіковані тригонометричні ермітові сплайни, які дозволяють отримати точніший результат інтерполювання в порівнянні з існуючими методами для квазіперіодичних функцій та функцій вібраційного резонансу. В роботі визначаються основні галузі застосування розробленого методу інтерполяції. Для перевірки адекватності розроблених сплайнів автори наводять порівняльну таблицю відхилень інтерпольованих тестових функцій, використовуючи розроблений та відомі методи сплайн-інтерполяції.

Вступ

Постійний розвиток апаратного забезпечення в сучасному технологічному та інформаційному світі вимагає створення та впровадження нових ефективних методів та моделей оброки і представлення даних. Ця робота покликана вдосконалити та розширити застосування інтерполяції сплайнами. В роботі пропонується новий метод інтерполяції тригонометричними сплайнами для обробки дискретних даних, застосування якого для майже періодичних та квазіперіодичних функцій дозволить отримати точніші результати в порівнянні з аналогічними методами.

Одне з цікавих явищ в прикладній та теоретичній фізиці, що відносно нещодавно почалось досліджуватися, — це вібраційний резонанс (ВР). ВР — квазіперіодичний рух (функція), що представляється як зміна динамічної системи і характеризується кінцевою кількістю (два чи більше) несумісних сигналів. Під несумісністю автори розуміють періодичні сигнали, що кардинально відрізняються за амплітудою та частотою. ВР виникає у випадку подачі на вхід нелінійної системи двох різних періодичних сигналів (потужний та слабкий). В цьому випадку слабкий сигнал з низькою частотою може бути підсилений потужним високочастотним сигналом. ВР подібний до стохастичного резонансу, в якому високочастотний сигнал замінюють шумом [1]. Потрібно відмітити, що системи з сигналами двох різних частот зустрічаються в таких галузях, як зв'язок, акустика [2], нейробіологія [3] та лазерна фізика [4]. Тому задача точної обробки та представлення квазіперіодичних функції є актуальною [5].

Огляд методів інтерполяції сплайнами

Інтерполяція — процес розрахунку проміжних значень невідомої функції, яка задана сіткою дискретних значень. Інтерполяція сплайнами — один з методів інтерполяції, який полягає в представленні невідомої функції між сусідніми точками дискретної сітки поліномом цілого степеня [6]. З-поміж сучасних видів інтерполяції сплайнами можна виділити такі:

— сплайни з автоматичною зміною коефіцієнтів напруженості (Auto-Tensioning spline) [7];
— сплайни Ерміта;
— В-сплайни (Basic splines) [8];
— NURBS-сплайни (Non-Uniform Rational Basis Spline) [9];
— сплайни п'ятого порядку (Quintic Spline) [10];
— Х-сплайни (X-Spline) [11].

Оскільки майже періодичні та квазіперіодичні функції формуються на основі суми періодичних сигналів, то природно перейти від поліноміальної форми запису сплайна до тригонометричної. Наведемо найцікавіші та помітніші публікації, де використовуються тригонометричні сплайни.

— розклад функції в ряд Фур'є [12]. Основна область звстосування таких сплайнів — це періодичні функції;

— представлення сплайнів з використанням тригонометричних функцій, що наведено в [13]. Основний недолік — значення першої похідної інтерполювальної функції біля точок основної сітки рівні нулю.

— Сплайни, запропоновані Робертом Кауфманом (Robert F. Kauffmann), що розраховуються на основі чотирьох базових точок [14].

— Інтерполяція з використанням модифікованих ермітових сплайнів [15]. Поліном ермітового сплайна на кожному відрізку інтерполяції пропонується замінити на емпірично виведені тригонометричні вирази.

Проведений огляд моделей тригонометричних сплайнів розкриває їх загальні недоліки: низьку точність, вузьку спеціалізацію методів та в деяких випадках складність алгоритмізації.

Основна задача цього дослідження — удосконалення процесу інтерполяції сплайнами, критерії досягнення якого полягають в підвищенні точності та швидкості отримання результатів для майже періодичних та квазіперіодичних функцій.

Основна мета дослідження — розробка нової моделі інтерполяції тригонометричним сплайнами, яка дозволить отримати точніший результат в порівнянні з аналогами для майже періодичних та квазіперіодичних функцій без ускладнення обчислень.

Модель модифікованих тригонометричних ермітових сплайнів

Нехай відомі значення функції $f(x)$ в заданих точках $f(x_i) = y_i,\ i = \overline{1,n}$, $A = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = B$ та значення перших похідних в крайніх точках $f'(x_1) = R_1,\ f'(x_n) = R_n$. Для побудови модифікованого тригонометричного сплайна візьмемо вираз

$$S(t) = a + bt + c\cdot\cos(t) + d\cdot\sin(t),\quad t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\cdot\frac{\pi}{2},\quad t \in \left[0; \pi/2\right]. \tag{1}$$

Змінна x між точками інтерполяційної сітки $[x_i;\ x_{i+1}]$ нормується до змінної t. Знайдемо невідомі коефіцієнти a, b, c, d, виразивши їх через значення функції та її похідні R_i і R_{i+1} на інтервалі інтерполяції $[x_i;\ x_{i+1}]$. Розрахуємо $S(t)$ та $S'(t) = b - c\cdot\sin(t) + d\cdot\cos(t)$ для $t = 0;\ t = \pi/2$. Результат запишемо у матричній формі

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \pi/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(0) \\ S\left(\pi/2\right) \\ S'(0) \\ S'\left(\pi/2\right) \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad A\cdot K = S. \tag{2}$$

Перетворимо попереднє рівняння до вигляду $A^{-1}\cdot S = K$. Невідомі коефіцієнти a, b, c, d в матричному вигляді запишуться як

$$\frac{1}{(\pi - 4)}\cdot\begin{bmatrix} \pi-2 & -2 & 2 & \pi-2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -(\pi-2) \\ 2 & -2 & \pi-2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} S(0) \\ S\left(\pi/2\right) \\ S'(0) \\ S'\left(\pi/2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Підставимо отримані значення a, b, c, d до загального виразу сплайна $S(t)$

$$\begin{aligned} S_i(t) = {} & \frac{-2t + 2\sin(t) + (\pi-2) - 2\cos(t)}{\pi - 4} S(t_i) + \frac{-2 + 2t + 2\cos(t) - 2\sin(t)}{\pi - 4} S\left(t_{i+1}\right) + \\ & + \frac{-2\cos(t) + 2 - 2t + \sin(t)\cdot(\pi-2)}{\pi - 4} S'(t_i) + \frac{-2t + (\pi-2) - \cos(t)\cdot(\pi-2) + 2\sin(t)}{\pi - 4} S'\left(t_{i+1}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Отриманий вираз і є модифікованим тригонометричним сплайном. Розглянемо його особливості. Замість кубічного полінома в тригонометричних сплайнах використовуються функції $\sin(x)$ та $\cos(x)$. Комбінацією базових функцій з різними коефіцієнтами досягається необхідна форма результуючої інтерполяційної кривої.

В модифікованих тригонометричних сплайнах умова рівності перших похідних для попереднього та наступного сплайнів в точках інтерполяційної сітки виконується автоматично.

Для практичної перевірки розроблених сплайнів використовувались наближений та точний методи розрахунку значень похідних функції в базових точках. Для розрахунку похідних точним методом використовувалась умова рівності другої похідної сусідніх сплайнів в спільній базової сітки. В результаті отримали тридіагональну матрицю, для якої розроблені прості, швидкі та ефективні методи розв'язання.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \pi-2 & 4 & \pi-2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi-2 & 4 & \pi-2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \pi-2 & 4 & \pi-2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1' \\ S_2' \\ S_3' \\ \dots \\ S_{n-1}' \\ S_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 2S(t_3)-2S(t_1) \\ 2S(t_4)-2S(t_2) \\ \dots \\ 2S(t_n)-2S(t_{n-2}) \\ R_n \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

де R_1, R_n — це крайові умови, значення першої похідної функції в першій та останній точці інтерполювання, відповідно.

Перевірка розроблених модифікованих тригонометричних сплайнів

Для тестування та порівняння результатів роботи з іншими методами інтерполяції запропоновані тригонометричні сплайни були реалізовані в математичному програмному пакеті Matlab. Розрахунок похідних $S'(t_i)$ та $S'(t_{i+1})$ для формули (4) виконувався точним методом. Для цього формувалась система рівнянь, отримана з умов неперервності другої похідної в спільних точках двох сусідніх сплайнів.

Результати сплайн-інтерполювання тестових функцій трьома методами

#	Test function	Range [-4, 4] Base point step: 0.8			Range [-1, 4] Base point step: 1			Range [-1, 8] Base point step: 1.5		
		Trigonomic spline	Hermit spline	Cubic spline	Trigonomic spline	Hermit spline	Cubic spline	Trigonomic spline	Hermit spline	Cubic spline
1	X*X-1;	0.2046	0.2503	0.0000	0.1879	0.1785	0.0000	0.0423	0.4834	0.0000
2	0.5*X*X-2*X+5;	0.1023	0.1267	0.0000	0.0940	0.0892	0.0000	0.0197	0.2304	0.0000
3	X^3+X^2+X-1;	1.2622	0.8164	0.0000	0.4503	1.0809	0.0000	1.0793	5.6380	0.0000
4	sin(X);	0.0166	0.0547	0.0004	0.0213	0.0807	0.0017	0.0015	0.1306	0.0164
5	sin(X-5)/(X-5);	0.0052	0.0133	0.0001	0.0085	0.0200	0.0006	0.2106	0.1919	0.2512
6	5*sin(2*(X-5))/(2*(X-5));	0.0088	0.0859	0.0210	0.0757	0.1275	0.0983	1.1452	1.2725	1.3286
7	cos(X + pi*sin(X));	0.0910	0.0767	0.0978	0.1812	0.1986	0.3667	0.5816	0.4872	0.5845
8	X*X+6*X*sin(2.35*X)-X;	1.2789	2.1681	0.9252	0.8722	2.6891	1.8888	7.8886	10.6902	16.0174
9	exp(-X)*X-4*sin(X)+X*fX	3.6537	1.7549	0.1794	0.2180	0.5029	0.0251	0.0621	0.7292	0.1060
10	X^3+X^2+X-1-0.1*X^4;	1.2622	0.8017	0.0054	0.6073	0.7448	0.0244	0.0791	1.9092	0.0975
11	Theta(X);	20.2603	16.5029	17.2130	51.6280	51.9296	51.9296	30.4656	29.8112	26.3949
12	X-X^3+cos(0.3*X)+10*cos(3*X);	1.6702	2.5697	2.2968	1.3421	1.7829	3.5551	7.4312	7.8747	8.3363

Примітки: 1. В таблиці наведено середні відхилення від тестових функцій;

2. Відмічені комірки — кращий результат інтерполювання.

В роботі виконано порівняння результатів інтерполяції тестових функцій (див. табл.) розробленими тригонометричними, кубічними ермітовими та кубічними сплайнами. Критерієм точності вибрано середнє відхилення від заданої функції. Для тестування сплайн-методів було вибрано такі типи функцій:

— багаточлени;

— тригонометричні функції;

— дробово-раціональні функції;

— квазіперіодичні функції [16];

— квазіперіодичні функції вібраційного резонансу.

Висновок

Оскільки всі процеси в природі зводяться до періодичного характеру, розробка та реалізація методів обробки (інтерполяції) періодичних та псевдоперіодичних дискретних даних є актуальною та необхідною. В роботі наведено огляд сучасних напрямків розвитку інтерполяції сплайнами взагалі та розроблені методи інтерполяції тригонометричними сплайнами зокрема. Автори в роботі пропонують нову модель тригонометричних сплайнів на основі підходу побудови сплайнів Ерміта. Для практичної реалізації розроблених сплайнів пропонується два методи розрахунку невідомих коефіцієнтів.

В роботі наведено результати інтерполяції сплайнами тестових функцій як відомими, так і розробленим методами. Окрім поліноміальних та тригонометричних тестових функцій використовувалися квазіперіодичні функції та функції вібраційного резонансу.

В результаті обробки отриманих даних зроблено висновок, що розроблені тригонометричні ермітові сплайни мають кращі інтерполяційні характеристики для періодичних, квазіперіодичних та функцій вібраційного резонансу в порівнянні з існуючими методами для базових точок з порівняно великими проміжками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Benzi R. The mechanism of stochastic resonance / R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani // Journal of Physics A : Mathematical and General. — 1981. — Vol 14. — № 8.
2. Maksimov A. O. On the subharmonic emission of gas bubbles under two-frequency excitation / A. O. Maksimov // Ultrasonics. — 1997. — Vol 34. — P. 79—86.
3. Victor J. D. Two-frequency analysis of interactions elicited by Vernier stimuli / J. D. Victor, M. M. Conte // Visual Neuroscience. — 2000. — № 17.
4. Su D. C. Simple two-frequency laser / D. C. Su, M. H. Chiu, C. D. Chen //Precision Engineering. — 1996. — Vol 18.
5. Vibrational resonance in a noise-induced structure /[A. A. Zaikin, L. López, J. P. Baltanás, and other] // Phys. Rev. — 2002. — E66.
6. Квєтний Р. Н. Основи моделювання та обчислювальних методів / Р. Н. Квєтний. — Вінниця : ВНТУ. — 2007. — 150 с.
7. Renka R. J. Interpolatory tension splines with automatic selection of tension factors / R. J. Renka // SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing. — 1987. — Vol 8. — P. 393—415.
8. Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design / G. Farin. — San Diego : Academic Press. — 1993.
9. Farin G. NURB Curves and Surfaces : From Projective Geometry to Practical Use / G. Farin. — PetersPress, 1995.
10. Herriot J. G. Procedures for Quintic Natural Spline Interpolation / J. G. Herriot, C. H. Reinsch // Association for Computing Machinery, Transactions on Mathematical Software. — 1976. — Vol. 2. — № 3.
11. Blanc C. X-Splines : A Spline Model Designed for the End-User / C. Blanc, C. Schlick // Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique.
12. Restrepo J. Introduction to scientific computing / J. Restrepo // Numerical Analysis & Scientific Computing. — 2001. — № 1. — P. 128—137.
13. Bourke P. Interpolation methods / Bourke P. // Miscellaneous : projection, modelling, rendering. — 1999. — № 1.
14. Kauffmann R. F. Implementing Uniform Trigonometric Spline Curves / R. F. Kauffmann // Dobbs Portal. Architecture&Design. — 2007. — № 1. — P. 1—9.
15. Квєтний Р. Н. Тригонометрична інтерполяція сплайнами / Р. Н. Квєтний, В. Ю. Дементьєв // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2008. — № 5. — С. 67—68.
16. Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях / Д. Мамфорд. — М. : Мир. — 1988. — 448 с.

Рекомендована кафедрою автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки

Стаття надійшла до редакції 12.04.11
Рекомендована до друку 12.04.11

Квєтний Роман Наумович — завідувач кафедри, ***Дементьєв Віктор Юрійович*** — аспірант.

Кафедра автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця