УДК 37.022.32 : 681.3

З. В. Бондаренко, канд. пед. наук

НЕОБХІДНІСТЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ В ПРОЦЕСІ ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМ КОМПЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ МАЙБУТНІМИ ІНЖЕНЕРАМИ

Розглянуто питання використання систем комп'ютерної математики (СКМ) майбутніми інженерами на заняттях з вищої математики. На конкретних прикладах показано, що успішне розв'язання математичних задач з використанням СКМ неможливе без відповідної теоретичної математичної підготовки.

В модернізації системи вищої технічної освіти зацікавлене не тільки суспільство в цілому, але й кожен її учасник, перш за все — студент. Дійсно, існування конкурентних відносин у сфері виробництва зумовлює дію фактора конкуренції на ринку праці, який, у свою чергу, підвищує вимоги до професійної підготовки випускників. Практика показує, що якщо випускник володіє сучасними знаннями, що включають знання і навички використання передових технологій, то це різко підвищує його конкурентоспроможність і затребуваність на ринку праці.

Крім того безперервне технічне переоснащення виробництва вимагає від фахівця не лише якісних знань, але й високої професійної мобільності. На реалізацію цілей і завдань вищої технічної освіти впливає кожна дисципліна вищого навчального закладу. Особлива роль у цьому процесі належить фундаментальним загальноосвітнім дисциплінам, і в першу чергу, курсу математики. Роль математики як універсальної мови для опису і вивчення явищ навколишнього світу, як методу пізнання, доведено досвідом, накопиченим в результаті розвитку природознавства. Не менш важливою є роль математики для формування мислення майбутніх фахівців у створенні і застосуванні техніки і технологій.

Питання використання інформаційних технологій в навчальному процесі були предметом досліджень як вітчизняних, так і зарубіжних вчених. Можливості застосування інформаційних технологій досліджені в працях А. А. Андрєєва, В. Ю. Бикова, М. І. Жалдака, В. М. Кухаренко, Н. В. Морзе, В. В. Олійника, Є. С. Полат, С. А. Ракова та інших вчених. Питаннями розробки та застосування засобів на основі інформаційних технологій та створенням методичної підтримки щодо їх використання займалися такі науковці, як Т. Л. Архіпова, Л. І. Білоусова, В. В. Биков, А. Ф. Верлань, О. М. Гончарова, А. М. Гуржій, Ю. О. Жук, В. І. Клочко та ін. Практично всі дослідники зазначали високу ефективність використання інформаційних технологій у навчальному процесі.

В останні роки отримав широкий розвиток новий науковий напрям — математична інформатика. При цьому програмування залишається і надалі доволі складним для студентів інженерних спеціальностей. Простішими та доступнішими для них є системи комп'ютерної математики (надалі СКМ).

СКМ широко використовують для розв'язання наукових, інженерних, навчальних задач, наочної візуалізації даних і результатів обчислень, а також як зручні й повні довідники з математичних обчислень. Завдяки потужній графіці, засобам візуального програмування й використання техніки мультимедіа їх роль виходить далеко за межі тільки математичних розрахунків. Вони використовуються в освіті як потужні інструментальні засоби для підготовки електронних уроків, курсів лекцій та електронних книг з динамічними прикладами. Використання СКМ дає змогу значною мірою підсилити інтелектуальну діяльність, надає можливість автоматизувати виконання не тільки числових, а й аналітичних (символьних) обчислень та графічних побудов.

Наявність різноманітних СКМ аж ніяк не означає, що можна успішно розв'язувати математичні задачі без відповідної теоретичної математичної підготовки. Отже, СКМ є потужним засобом комп'ютерної підтримки діяльності студентів, але ефективність і методична цінність такого засобу залежить від умінь застосовувати його. Тому проблема розробки методик навчання математичних дисциплін з використанням СКМ, гармонійне поєднання традиційних методичних систем навчання з сучасними комп'ютерними технологіями залишається актуальною.

Поява сучасних систем комп'ютерної математики надає можливість, не відмовляючись від принципів фундаментальності класичної освіти, якісно змінити підходи і методи викладу матеріалу, зробити його наочнішим і доступнішим, а отже, цікавішим та привабливішим для майбутніх інженерів.

Творчий інженер не обмежується «кнопковими алгоритмами». Він повинен знати, як це робиться. В іншому випадку він перестає бути інженером і стане заручником комп'ютера.

Зазвичай, починаючи працювати з будь-якою із систем символьних обчислень, студент досить легко розв'язує невеликі і нескладні приклади і задачі з підручника. Однак, приступаючи до розв'язання складніших задач, він стикається з низкою проблем: то комп'ютер занадто довго обчислює, то не вистачає пам'яті, то у відповіді отримується формула на 5—10 сторінок, а то і взагалі видається некоректна відповідь. Бездумне застосування студентом систем комп'ютерної математики несе в собі великі проблеми.

Наприклад, обчислюючи невизначний інтеграл $\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx$ за допомогою Mathcad, відповідь може бути зрозумілою студентам фізико-математичних спеціальностей, але для інженера дістати інформацію з такої відповіді доволі складно (рис. 1).

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} \to x-\frac{3}{2}(\ln(\exp(\frac{1}{6}x)-1i)+\frac{3}{2}1i(\ln(\exp(\frac{1}{6}x)-1i)-\frac{3}{2}(\ln(\exp(\frac{1}{6}x)+1i)-$$
$$-\frac{3}{2}1i(\ln(\exp(\frac{1}{6}x)+1i)-3(\ln(\exp(\frac{1}{6}x)+1)$$

Рис. 1

Результат роботи Maple для інженера також залишається «прихованим» (рис. 2).

```
> int(1/(1+e^(x/2)+e^(x/3)+e^(x/6)),x);
```

$$\frac{x}{2}-\frac{3\ln\left(e^{\left(\frac{x}{6}\right)}+1\right)}{\ln(e)}$$

Рис. 2

Але, якщо виконати заміну змінної, відповідь програма Mathcad видає одразу (рис. 3).

$$\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx = \int \frac{6}{t(1+t)+\left(1+t^2\right)}dt$$
$$\int \frac{6}{t(1+t)+\left(1+t^2\right)}dt \to 6\ln t-3\ln(t+1)-\frac{3}{2}\ln\left(1+t^2\right)-3\alpha\tan t+C$$

Рис. 3

Для того, щоб отримувати результати у зрозумілому вигляді, необхідно «підготувати» задачу до розв'язання. Тоді розв'язок буде записуватися у вигляді елементарних функцій.

Можна сказати, що має бути баланс між використанням програмного забезпечення й обчисленнями вручну. Для багатьох спеціальностей інженерного напрямку метод Ейлера не використовується на практиці для розв’язання диференціального рівняння, але виконання кількох кроків на простому прикладі надасть можливість студенту зрозуміти характер числових обчислень.

Використовувати СКМ доцільно, коли маємо складну задачу, яка потребує часу для обчислень вручну (наприклад, розв’язування великої кількості систем рівнянь). Важливо, щоб студенти вивчали не тільки команди (root, solve…), а вміли знаходити можливі помилки програмного забезпечення, зумовлені його недосконалістю.

Розглянемо функцію, площа під кривою якої дорівнює 1.

Специфіка такої функції полягає в тому, що її значення швидко зменшується зі збільшенням x (рис. 4).

$$f(x) := x \cdot e^{-x}.$$

Наприклад, на інтервалі зміни x від 0 до 10000 кривої функції вже просто не видно на графіку (точніше вона збігається з віссю x) (рис. 5).

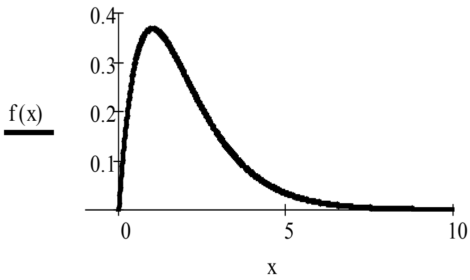

Рис. 4. Графік функції $f(x) = xe^{x}$

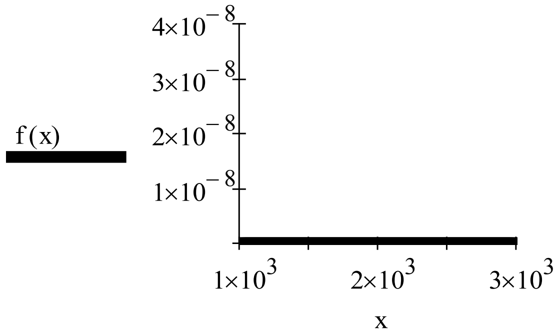

Рис. 5. Графік функції $f(x) = xe^{x}$ на інтервалі зміни x від 0 до 10000

Цікаво, що обчислення визначеного інтегралу від вищевказаної функції системою Mathcad на проміжках, що суттєво відрізняються верхньою межею інтегрування, мають різний результат, хоча відомо, що площа під такою кривою дорівнює одиниці (рис. 6).

$$\int_0^{100} x e^{-x}\,dx = 1 \qquad \int_0^{10000} x e^{-x}\,dx = 1$$

$$\int_0^{100000} x e^{-x}\,dx = 0 \qquad \int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx = 1$$

Рис. 6

Система Maple пропонує обчислювати границю вищевказаної функції (рис. 7).

```
> int(x*e^(-x),x=0..infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} -\frac{e^{(-x)} + x\,e^{(-x)}\ln(e) - 1}{\ln(e)^2}$$

```
int(x*e^(-x),x=0..100);
```

$$\frac{e^{100} - 1 - 100\ln(e)}{e^{100}\ln(e)^2}$$

Рис. 7

Ця обставина досить підступна. Багато методів інтегрування основані на обчисленні кінцевого числа відліків функції $f(x)$. Проте в подібній ситуації всі відліки можуть бути «нульовими» з позицій обмеженої точності обчислення дуже малих чисел.

Потужність комп’ютерів зростає, але й задачі, які розв’язують науковці, стають більш складними і потребують складніших обчислювальних методів. Проблеми, які математики досліджували кілька десятиліть тому, нині знаходяться в межах можливостей студента. З одного боку, немає сенсу витрачати час на опанування методу прямокутників, чи методу трапецій, тому що їх не використовують на практиці; з іншого боку, використання комерційних програм підтримки математики приховує небезпеку, бо їх часто використовують як «чорні скрині»: ввів умову — отримав відповідь.

Щоб краще зрозуміти виникнення вищезгаданої помилки, розглянемо обчислення інтеграла $\int_0^{10} xe^{-x}dx$ методом прямокутників (рис. 8):

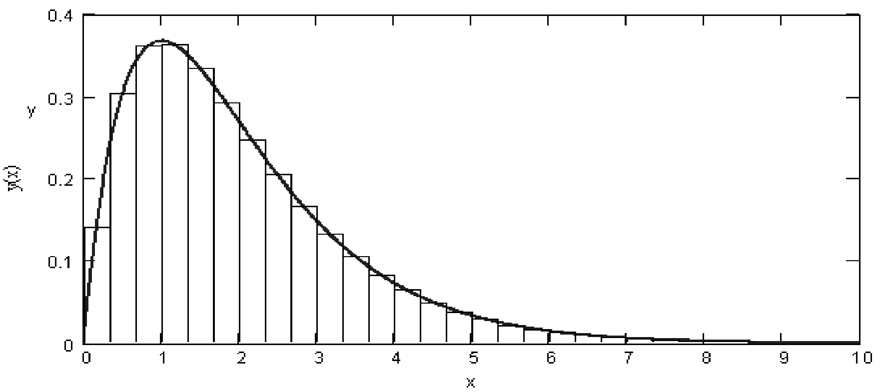

Рис. 8. Обчислення визначеного інтеграла $\int_0^{10} xe^{-x}dx$ методом прямокутників

$$y(x) = xe^{x}; \quad m = 30;\ a = 0;\ b = 10;\ dx = (b-a)/m;$$

$$\int_a^b y(x)dx = 0{,}999501.$$

Результат певною мірою близький до 1. Але тепер збережемо число прямокутників $m = 30$, а змінимо межу інтегрування b на 100000:

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} y(x)dx = 5{,}075958897550 \cdot 10^{-429}.$$

Замість очікуваного наближення до 1 отримуємо «несподіваний» результат — значення інтеграла близьке до нуля. Причина цього вже вказувалася — відліки потрапляють на проміжки функції y (x), де її значення дуже малі. А перший відлік потрапляє на нуль функції. Сума майже або рівних нулю відліків дає близьке до 0 значення.

Система Mathematica має ускладнений алгоритм обчислення інтегралів, який, у міру можливості, аналізує поведінку y (x) і намагається виключити описану ситуацію.

Якщо в технічних науках створюється, обґрунтовується і досліджується набір методів розв’язання інженерних задач, то головним показником інженерного мистецтва є вибір такого математичного опису і такої точності проведених розрахунків, які були б адекватними поставленій задачі. Цей вибір і оцінка результатів розв’язків повинні ґрунтуватися на розумінні припущень, що лежать у їх основі, на вмінні фізично інтерпретувати складні формалізовані рішення. Причому те, що складні інженерні задачі з математичної точки зору відносно легко розв’язуються за допомогою сучасної обчислювальної техніки, не применшує, а, навпаки, посилює необхідність глибокого розуміння інженером фізики явищ, фізичного змісту математичних формул і сенсу обчислювальних операцій.

Розглянемо розв’язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь в Mathcad (рис. 9), яка широко використовується в розв’язанні інженерних задач, з такими початковими умовами:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0{,}01, \qquad \text{де } \xi := 0{,}05,\ T := 5 \text{ с, кругова частота } \omega := 10 \text{ рад/с.}$$

Given

$$y''(t) = -2\cdot\xi\cdot\omega\cdot y'(t) - \omega^2\cdot y(t) \qquad y'(0) = 0.01 \qquad y(0) = 0$$

$$y1 := \mathrm{Odesolve}(t, T)$$

Рис. 9

Збільшимо кругову частоту в три рази $\omega := 30$ рад/с. Розв’яжемо ту ж задачу.

Подамо отримані розв’язки на одному графіку (рис. 10).

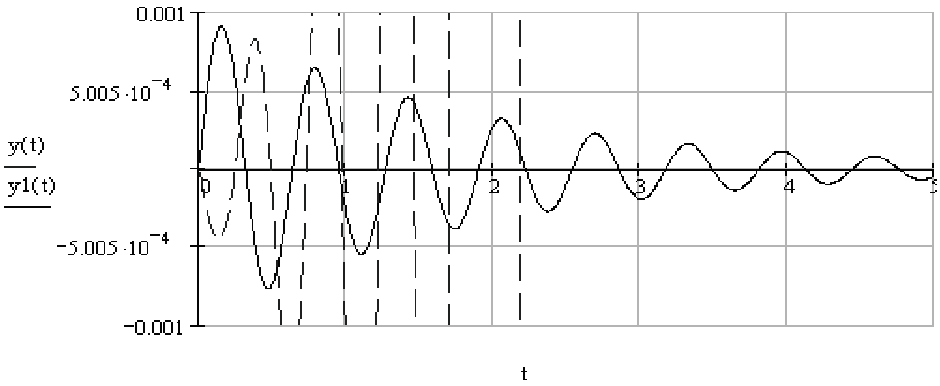

Рис. 10. Розв’язки задачі Коші з круговою частотою $\omega := 10$ рад/с і $\omega := 30$ рад/с без урахування жорсткості

Видно, що в другому випадку розв’язок нестійкий.

Причина нестійкості полягає в тому, що в команді Odesolve реалізована явна схема не враховує «жорсткості».

Розглядаючи стійкішу різницеву схему можна переконатися, що розв’язок цілком коректний (рис. 11).

$$D(t, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ -2\cdot\xi\cdot\omega\cdot X_1 - \omega^2\cdot X_0 \end{pmatrix} \qquad S2 := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix}, 0, T, 1000, D\right]$$

$$\tau := S2^{\langle 0\rangle} \qquad Y := S2^{\langle 1\rangle} \qquad i := 0..\mathrm{last}\left(S2^{\langle 0\rangle}\right)$$

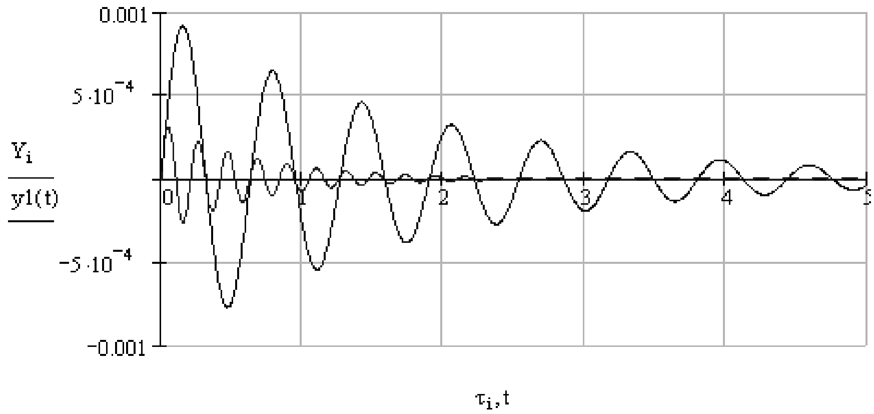

Рис. 11. Розв’язки задачі Коші з круговою частотою $\omega := 10$ рад/с і $\omega := 30$ рад/с з урахуванням жорсткості

Висновки

Основні проблеми, що виникають під час використання студентами СКМ такі:

а) програма дає відповідь не у вигляді елементарних функцій, а у вигляді спеціальних функцій;

б) у деяких випадках програма «відмовляється» давати відповідь, хоча розв'язок задачі існує;

в) іноді неможливо скористатися отриманим результатом через його громіздкість;

г) програма розв'язує задачу не повністю;

д) отримані розв'язки вимагають додаткового дослідження.

Використання СКМ звільняє студента від рутинної роботи, але не може звільнити його від додаткового аналізу як під час постановки задачі, так і під час отримання будь-яких результатів. Для того, щоб вирішити ці проблеми, необхідно використовувати «сильні» і «слабкі» сторони програми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко З. В. Методика навчання інформаційних технологій розв'язування диференціальних рівнянь у технічних університетах : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. пед. наук: спец: 13.00.02 «Теорія та методика навчання (інформатика)» / З. В. Бондаренко. — Київ, 2010. — 20 с.

2. Клочко В. І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі : дис. д-ра. … пед. наук: спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання інформатики» / Віталій Іванович Клочко. — Вінниця, 1998. — 396 с.

3. Кобильник Т. П. Системи комп'ютерної математики: Maple, Mathematica, Maxima / Тарас Петрович Кобильник. — Дрогобич : Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2008. — 316 с.

4. Поршнев С. В. Численные методы на базе MathCad. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 464 с.

5. Романовский І. В. Замечания о стиле программирования [Электронный ресурс] // Компьютерные инструменты в образовании. — 2005. — № 1 // І. В. Романовский. — Режим доступа : http://www.jpo.spb.ru/journal/2005/01.

6. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : моног. / Ю. В. Триус. — Черкаси : Брама–Україна, 2005. — 400 с.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Стаття надійшла до редакції 26.04.11
Рекомендована до друку 23.05.11

Бондаренко Злата Василівна — старший викладач кафедри вищої математики.
Вінницький національний технічний університет, Вінниця