УДК 519.816

Н. К. Тимофієва, д-р техн. наук, с. н. с.

ПРО СПОСОБИ ЗВЕДЕННЯ НЕРОЗВ'ЯЗНИХ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗНИХ

Показано, що для виділення підкласів розв'язних задач із класів нерозв'язних необхідно визначити їхню складність. За цією ознакою проведено класифікацію розв'язних задач, які виділяються за вибраною мірою подібності і способом моделювання цільової функції, за структурою вхідних даних і за структурою аргументу. На прикладі деяких нерозв'язних класів задач комбінаторної оптимізації описано способи їхнього зведення до розв'язних.

Вступ

Значна частина класів задач комбінаторної оптимізації є нерозв'язними з точки зору їхньої обчислювальної складності або згідно з поняттям стійкості відносно вхідних даних. Як правило, за обчислювальною складністю їх розділяють на клас P, які можна розв'язати певним поліноміальним алгоритмом, і клас NP — повні задачі, які не піддаються ефективному алгоритмічному розв'язанню. Але в літературі для деяких класів задач комбінаторної оптимізації (задача про призначення, задача розміщення, задача комівояжера) описано підкласи, що мають певну структуру вхідної інформації, для яких відомий спосіб аналітичного знаходження глобального розв'язку. Ці підкласи задач називають розв'язними [1—3].

Для задач з чіткою структурою вхідних даних математичні моделі розроблено досить ґрунтовно і за змодельованою цільовою функцією можна визначити глобальний розв'язок повним перебором, тобто одержаний розв'язок збігається з метою дослідження. В задачах з нечіткими вхідними даними (задача розпізнавання, задача кластеризації) крім кількості операцій, затрачених на знаходження глобального розв'язку, необхідно враховувати і міри подібності, які тут відіграють основну роль і від вибору яких в значній мірі залежить сам розв'язок. До того ж, отриманий за змодельованою цільовою функцією глобальний розв'язок у цих задачах не завжди збігається з метою дослідження. Нижче, за певними ознаками проведемо класифікацію підкласів розв'язних задач із класів задач комбінаторної оптимізації та способи їхнього виділення.

Отже, складність розв'язання задач комбінаторної оптимізації оцінюється як за кількістю затрачених на знаходження глобального розв'язку операцій, так і за способом моделювання цільової функції та визначенням мір подібності між елементами. За складністю розв'язання задач виділимо такі класи: розв'язні аналітично, для яких відомий аналітичний спосіб знаходження глобального розв'язку. Розмірність задачі для них необмежена; розв'язні алгоритмічно, для яких існують поліноміальні алгоритми знаходження глобального розв'язку. Для них розмірнісь задачі може бути обмежена ресурсами ЕОМ; задачі нерозв'язні, у яких для змодельованої цільової функції не існує жодного розв'язку, який збігався б з метою дослідження. В цьому випадку постає проблема зведення нерозв'язних задач комбінаторної оптимізації до розв'язних. Підкласи розв'язних задач із класів нерозв'язних виділяємо за такими ознаками: а) за вибраною мірою подібності і способом моделювання цільової функції; б) за структурою вхідних даних; в) за структурою аргументу.

Виділення підкласів розв'язних задач за структурою вхідних даних

Для розв'язання задач комбінаторної оптимізації відомі такі основні підходи: а) методи та алгоритми, що ґрунтуються на частковому переборі варіантів [4—7]; б) методи і алгоритми, що ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації. До другого підходу відносяться роботи із знаходження підкласів розв'язних задач та розроблення алгоритмів розпізнавання відповідно до цих підкласів структури вхідної інформації [1—3].

Розглянемо виділення підкласів розв'язних задач комбінаторної оптимізації з чіткою структурою вхідних даних. З цією метою використаємо метод моделювання структури вхідних даних функціями натурального аргументу. Подамо математичну постановку задачі комбінаторної оптимізації, у якій вхідні дані задано матрицями.

Нехай задано одну A або кілька множин, наприклад, A і B. Вагою назвемо величину, яка визначає залежність (зв'язки), що існує між елементами $a_s \in A$ і $b_l \in B$ або між елементами однієї і тієї ж множини, $s \in \{1,\ldots,n\}$, $l \in \{1,\ldots,\tilde{n}\}$, n — кількість елементів множини A; $\tilde{n}$ — кількість елементів множини B. Нехай $n = \tilde{n}$. Значення ваг між елементами множин A і B задамо однією або двома симетричними чи несиметричними матрицями C і $Q(w^k)$, де $Q(w^k)$ — комбінаторна матриця; $w^k \in W$ — аргумент цільової функції (комбінаторна конфігурація); k — порядковий номер w^k у їхній множині W. Якщо значення ваг описуються однією матрицею C, то для визначення наявності зв'язків між елементами заданих множин для k-го варіанта розв'язку задачі введемо симетричну або несиметричну

(0,1)-матрицю $Q(w^k)$. Елемент $g_{sl}(w^k) = 1$, якщо між $a_s \in A$ і $b_l \in B$ або $a_s \in A$ і $a_l \in A$ для варіанта w^k існує зв'язок, і $g_{sl}(w^k) = 0$ в іншому разі; $g_{sl}(w^k) \in Q(w^k)$.

Змоделюємо структуру вхідних даних функціями натурального аргументу. Подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta\left(f(j), w^k\right)\big|_1^m = \left(\beta_1\left(f(1), w^k\right), \ldots, \beta_m\left(f(m), w^k\right)\right)$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C — функцією натурального аргументу $\phi(j)\,\big|_1^m = (\phi(1),\ldots,\phi(m))$, де $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ — кількість елементів h наддіагоналей матриць C і $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Якщо матриці $Q(w^k)$ і C — несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)\big|_1^m$ і $\phi(j)\big|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\tilde{n}$). Цільова функція $F(w^k)$ набуде вигляду

$$F\left(w^k\right) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j\left(f(j), w^k\right)\phi(j). \qquad (1)$$

В задачах комбінаторної оптимізації закономірність зміни значень цільової функції (1) залежить від упорядкування комбінаторних конфігурацій (аргументу), від структури вхідних даних, а в кластеризації — і від типів розбиття n-елементної множини на підмножини [3, 8, 9]. На підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій вона змінюється як для задач, аргументом яких є перестановка (ізоморфні комбінаторні конфігурації містять однакову кількість елементів або блоків). Використовуючи цю властивість, виділимо із множини перестановок (або підмножини ізоморфних комбінаторних конфігурацій) підмножини з урахуванням незалежних від вхідних даних параметрів. Вважатимемо, що множина перестановок (підмножина ізоморфних комбінаторних конфігурацій) упорядкована підмножинами $K_1, K_2, \ldots, K_{\tilde{q}}$, для яких варіанти розв'язку задачі містять елементи матриці C, починаючи відповідно з адреси $1, 2, \ldots, \tilde{q}$, де $\tilde{q}$ — кількість таких підмножин (варіант розв'язку задачі — послідовність величин добутку значень числової і комбінаторної функцій). Для заданого упорядкування отриманих підмножин для певної структури вхідних даних установлюється закономірність зміни значень цільової функції (1). Такий підхід зменшує залежність результату розв'язання задач від вхідних даних і дозволяє, враховуючи їхню структуру, знаходити ті підмножини, які містять глобальний розв'язок.

Знаючи правила утворення варіантів розв'язку задачі, для різної структури вхідних даних (числова і комбінаторна функції змінюються як лінійні, монотонні, періодичні з різними довжинами періодів) для задач комівояжера, розміщення, задачі про призначення, кластеризації знайдено аргумент (перестановка або розбиття n-елементної множини на підмножини), для якого цільова функція (1) набуває глобального значення, а також виділено підмножини його знаходження.

Виділення підкласів розв'язних задач за структурою вхідних даних і знаходження для них глобального розв'язку проводиться методом структурно-алфавітного пошуку, який полягає в такому [3, 10]. Для описаного вище упорядкування комбінаторних конфігурацій знаходження оптимального розв'язку проводиться без перебору варіантів і ґрунтується на розпізнаванні структури вхідних даних та заданому упорядкуванні комбінаторних конфігурацій (аргументу цільової функції).

Оскільки в цьому підході множина комбінаторних конфігурацій за розробленими правилами упорядкована так, як слова у словнику, то він названий методом структурно-алфавітного пошуку. Знаходження глобального розв'язку методом структурно-алфавітного пошуку для підкласів розв'язних задач досягається упорядкуванням за зростанням (або спаданням) значень двох скінченних послідовностей (функцій натурального аргументу), якими задаються вхідні дані. За розробленими правилами поліноміальним алгоритмом знаходиться деяка послідовність локальних екстремумів, значення яких з черговою ітерацією зменшуються (або збільшуються) і наближаються до глобального оптимуму (мінімуму або максимуму).

Теорема. *Для підкласів розв'язних задач метод структурно-алфавітного пошуку побудовою не більше, як* $n^2/2$ *перестановок, забезпечує знаходження упорядкованої послідовності локальних екстремумів* $F=\left(F\left(w^1\right),\ldots,F\left(w^{k^*}\right),\ldots,F\left(w^q\right)\right)$, *таких, що* $F\left(w^{k^*}\right)=glob\ \underset{w^k\in W}{extr}\ F\left(w^k\right)$; $k^*,\ q\in\{1,\ldots,n^2/2\}$, $k\in\{1,\ldots n!\}$, q *— кількість локальних екстремумів.*

В задачі кластеризації закономірність зміни значень цільової функції залежить від упорядкування аргументу, від структури вхідних даних та від типів розбиття n-елементної множини на підмножини. Для кластеризації досить складно змоделювати цільову функцію таку, щоб глобальний розв'язок задовольняв дійсну мету дослідження. Для моделювання в ній цільової функції необхідно: а) врахувати множину ознак заданих елементів; б) для визначення подібності елементів ввести міру подібності; в) визначити спосіб оцінки кластера. Оскільки реальна структура вхідних даних в цьому випадку невідома, то необхідно вводити кілька цільових функцій, які моделюються залежно від способу визначення кластера.

Якщо за заданими функціями отримуються дуже відмінні кластери, то структура даних не зовсім чітка. Якщо кластери за усіма вибраними цільовими функціями однакові, то ймовірно, знайдено реальний розв'язок. Для такої структури вхідних даних задача кластеризації є розв'язною.

Виділення підкласів розв'язних задач за мірою подібності

У задачах з чіткими вхідними даними, в яких оптимальний розв'язок знаходиться на множині перестановок, кінцева мета, як правило, збігається з результатами, отриманими за змодельованою цільовою функцією (1). В задачах з нечіткою вхідною інформацією отримані за змодельованою цільовою функцією результати не завжди відповідають меті дослідження. Це пов'язано з тим, що для оцінки оптимального розв'язку необхідно вводити міру подібності між елементами, яка є суб'єктивною оцінкою. До того ж в деяких задачах (кластеризація, задача клінічної діагностики тощо) необхідно вводити кілька цільових функцій.

Позначимо $u^+\left(a_l,a_r\right)=1$ міру подібності, за допомогою якої отримуємо глобальний розв'язок. Якщо $u^-\left(a_l,\ a_r\right)=0$, то за вибраною мірою подібності не знаходимо жодного розв'язку. Якщо $u\left(a_l,\ a_r\right)\in\{\delta,\ldots,1\}$, то вибрана міра подібності дозволяє знайти допустимий розв'язок, де δ — найменша величина міри подібності, для якої існує допустимий розв'язок. Таким чином, якщо для певної задачі $u^+\left(a_l,\ a_r\right)=1$, то вона є розв'язною за ознакою подібності.

Розглянемо виділення підкласів розв'язних задач за певною мірою подібності на прикладі задачі клінічної діагностики. Позначимо $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ множину захворювань, описання яких знаходиться в бібліотеці і яку в подальшому назвемо множиною еталонів, де елемент $a_t,\ t\in\{1,\ldots,n\}$ відповідає певному захворюванню, якому поставлено у відповідність характерні ознаки. Позначимо ознаки t-го захворювання упорядкованою множиною $V^{(t)}=\left(v_1^{(t)},\ v_2^{(t)},\ldots,\ v_{q_t}^{(t)}\right)$, де q_t — кількість ознак t-го захворювання. Вхідною інформацією в задачі клінічної діагностики є множина ознак $\tilde{V}=\left(\tilde{v}_1,\ \tilde{v}_2,\ldots,\ \tilde{v}_{\tilde{q}}\right)$, що описує одне або кілька захворювань. Позначимо їх $B=\{b_1,\ldots,b_{\tilde{n}}\}$, де b_j — захворювання, яке потрібно визначити; $\tilde{n}$ — кількість можливих захворювань, а $q_t\neq\tilde{q}$ або $q_t=\tilde{q}$. Ознаки $\tilde{v}_r\in\tilde{V}$ вхідної інформації мають той самий зміст, що і описані в еталоні ознаки $v_s^{(t)}\in V^{(t)}$, $r\in\{1,\ldots,\tilde{q}\}$, $s\in\{1,\ldots,q_t\}$. Назвемо однотипними такі ознаки, які характеризують один і той же параметр в еталоні і вхідних даних, наприклад, значення температури, тиску, пульсу тощо.

Задача полягає у знаходженні для B із множиною ознак $\tilde{V}$ найбільш правдоподібного одного або кількох еталонів із множини $A = \{a_1, \ldots, a_n)$, тобто за вхідними ознаками встановлюється одне або кілька захворювань b. Ознаки в цій задачі відіграють роль критеріїв, за якими оцінюється її розв'язок.

Позначимо $u_l\left(v_s^{(t)}, \tilde{v}_r\right)$ елементарну міру подібності між елементами множин $\tilde{V}$ і $V^{(t)}$. Оскільки ці ознаки мають різні шкали вимірювань, то виберемо такі міри подібності, щоб одержані оцінки зводилися до однієї шкали, а цільову функцію на етапі порівняння вхідних даних і еталона вважатимемо однокритеріальною. Нехай міри подібності $u_l\left(v_s^{(t)}, \tilde{v}_r\right)$ набувають значень $\{0, \ldots, 1\}$, $r \in \{1, \ldots, \tilde{q}\}$, $s \in \{1, \ldots, q_t\}$. Якщо для однотипних елементів $v_s^{(t)}$ і $\tilde{v}_r$ $u_l\left(v_s^{(t)}, \tilde{v}_r\right) \in \{\delta, \ldots, 1\}$, вважатимемо, що вони однакові, де δ — найменша величина міри подібності, для якої існує допустимий розв'язок. Однотипні елементи $v_s^{(t)}$, $\tilde{v}_r$, для яких $u_l\left(v_s^{(t)}, \tilde{v}_r\right) < \delta$, вважатимемо різними. Якщо множини $\tilde{V} \cap V^{(t)} = \varnothing$, то вони не містять жодних однакових елементів $v_s^{(t)}$ і $\tilde{v}_r$. Якщо $\tilde{V} \cap V^{(t)} \neq \varnothing$, то множини $\tilde{V}$ і $V^{(t)}$ містять однакові елементи. Їх може бути один і більше.

Виникають такі ситуації:

1. Якщо $\tilde{q} = q_t$ і для будь-якого $\tilde{v}_r \in \tilde{V}$ існує в $V^{(t)}$ однаковий елемент $v_s^{(t)}$, $r = \overline{1, \tilde{q}}$, $s \in \{1, \ldots, q_t\}$, а в бібліотеці не існує іншого аналогічного еталона, то задача клінічної діагностики є розв'язною;

2. Якщо $\tilde{q} \le q_t$ і для будь-якого $\tilde{v}_r \in \tilde{V}$ існує в $V^{(t)}$ однаковий елемент $v_s^{(t)}$, а в бібліотеці знаходяться еталони, для яких значення цільової функції однакове, то під час розв'язання задачі клінічної діагностики виникає ситуація невизначеності, яку необхідно розв'язувати диференціальним діагнозом з урахуванням додаткових критеріїв;

3. Якщо $\tilde{q} > q_t$, то вхідні дані описують кілька захворювань або вони містять дані, які не занесено в бібліотеку. В цьому випадку необхідно забезпечити автоматичне внесення нової інформації, тобто на етапі розробки програм необхідно забезпечити процес самонавчання системи.

Як видно з постановки задачі перебору еталонів, пошук еталона, подібного до вхідного $\tilde{V}$, потребує повного перебору. Цю задачу можна звести до розв'язної шляхом структуризації бібліотеки еталонів за певними ознаками, наприклад, за типом захворювання. Кожне захворювання повинне описуватися множиною ознак, які задають клінічні форми і стадії. Окремо варто виділити захворювання, які характеризуються однаковими ознаками, а також визначити однакові для групи захворювань ознаки, що дозволить звужувати область оптимального пошуку.

Виділення підкласів розв'язних задач за структурою аргументу

Виділення підкласів розв'язних задач за структурою аргументу цільової функції розглянемо на прикладі задачі розпаралелювання обчислень. Для розв'язання цієї проблеми математичну модель задачі певного класу розробляють так, щоб вона природно розділялася на незалежні підзадачі, які можна розв'язувати незалежно одна від однієї. Якщо це можливо, то задача розпаралелювання є розв'язною.

Як було обумовлено вище, в задачах комбінаторної оптимізації цільова функція задана на скінченній множині комбінаторного характеру W, тому закономірність зміни її значень в них залежить від упорядкування комбінаторних конфігурацій у W.

Комбінаторна множина W складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій W_η, а за способом утворення варіантів розв'язку задачі множина W_η (відповідно і множина перестановок) також розділяється на незалежні підмножини. Генерування комбінаторних конфігурацій (аргументу цільової функції) у виділених підмножинах проводиться незалежними процедурами. Відповідно множина значень цільової функції також розділяється на незалежні підмножини, в кожній з яких оптимальне значення цільової функції знаходиться в паралельному режимі відомим або спеціально розробленим методом. Таким чином, розпаралелювання обчислень в задачах комбінаторної оптимізації за структурою аргументу також зводиться до розв'язної задачі.

Висновок

З вищевикладеного випливає, що виділення підкласів розв'язних задач із класів нерозв'язних проводиться в залежності від складності їхнього розв'язання. Якщо складність визначається за кількістю затрачених на її розв'язок операцій, то виділення підкласів розв'язних задач проводиться за структурою вхідних даних. З цією метою використовується метод моделювання структури вхідних даних функціями натурального аргументу. Виділення підкласів розв'язних задач за мірою подібності проводиться шляхом моделювання цільової функції таким чином, щоб отриманий за її допомогою розв'язок збігався з метою дослідження. Якщо вибрані міри подібності для певних задач дозволяють знайти за поліноміальну часову складність глобальний розв'язок, то такий підклас задач є розв'язним. Для виділення підкласів розв'язних задач за структурою аргументу використовуються властивості комбінаторних множин, які розділяються на незалежні підмножини, комбінаторні конфігурації в кожній з яких генеруються незалежними процедурами. Цю властивість можна використати для розпаралелювання обчислень у комбінаторній оптимізації, тим самим зводити нерозв'язні задачі до розв'язних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дейнеко В. Г. Розв'язність в комбінаторній оптимізації. Розв'язні випадки проблеми комівояжера та евристичні алгоритми : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. фіз.мат.. наук: 01.05.01 / В. Г. Дейнеко. — Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. — К., 1995. — 48 с.

2. Демиденко В. М. Об экстремальных задачах на подстановках : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / В. М. Демиденко. — Ин-т математики АН БССР. — Минск, 1980. — 14 с.

3. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. техн. наук / Н. К. Тимофієва. — Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ. — 2007. — 32 с.

4. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц ; пер. с англ. — М. : Мир, 1985. — 510 с.

5. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. — К. : Наук. думка, 1981. — 281 с.

6. Корбут А. А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. — М. : Наука, 1969. — 368 с.

7. Михалевич В. С. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования / В. С. Михалевич, В. А. Трубин, Н. З. Шор. — М. : Наука, 1986. — 264 с.

8. Тимофеева Н. К. О некоторых свойствах разбиений множества на подмножества / Н. К. Тимофеева // УСиМ. — 2002. — № 5. — С. 6—23.

9. Тимофеева Н. К. Зависимость целевой функции задач комбинаторной оптимизации от упорядочения комбинаторных конфигураций / Н. К. Тимофеева // Компьютерная математика : сб. науч. тр. — 2005. — № 2. — С. 135—146.

10. Тимофієва Н. К. Метод структурно-алфавітного пошуку та підкласи розв'язних задач із класу задачі комівояжера / Н. К. Тимофієва // УСиМ — 2008. — № 4 — С. 20—36.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління

Стаття надійшла до редакції 11.02.11
Рекомендована до друку 28.02.11

Тимофієва Надія Костянтинівна — науковий співробітник відділу комплексних досліджень інформаційних технологій.

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, Київ

Рекомендована кафедрою

Стаття надійшла до редакції
Рекомендована до друку