УДК 517.518.949

А. Т. Дудикевич, канд. фіз.-мат. наук, доц.;
А. І. Кардаш, канд. фіз.-мат. наук, доц.;
С. М. Левицька

ПРО СПОСІБ АПРОКСИМАЦІЇ ГРАНИЧНИХ УМОВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Методом скінченних різниць у випадку задачі Діріхле для рівняння Пуассона на неортогональних шаблонах побудовано різницеву схему четвертого порядку апроксимації. Інтерполяційними методами Ньютона отримано апроксимацію в пригараничних вузлах прямокутної області. Система лінійних алгебричних рівнянь розв'язується різними ітераційними методами.

Вступ

Фізичні процеси задач теплопровідності, дифузії, електростатики, магнітостатики, теорії фільтрації та інші приводять до диференціальних рівнянь в частинних похідних. Точні розв'язки таких задач отримати важко, тому застосовуємо різні наближені методи [4]. В цій роботі розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона шукаємо різницевим методом, згідно з яким бажано мати різницеву схему високого порядку точності на мінімальному шаблоні.

Запропоновано метод побудови різницевої апроксимації оператора Пуассона, оснований на зведенні похідних за змінними до похідних за введеними напрямками. Застосування класичних шаблонів (п'ятиточкового і дев'ятиточкового) — не єдина можливість апроксимації цього оператора. Суть запропонованого методу полягає в тому, що на прямокутній сітці задаються певні напрямки, кількість яких більша за кількість осей координат. Диференціальний оператор Лапласа у похідних за змінними зводиться до певного оператора у похідних за введеними напрямками [1]. За допомогою інтегральних операторів усереднення за кожним з напрямків будується різницевий оператор Лапласа. Для зменшення кількості напрямків розглядаються лише неортогональні шаблони [2] — відсутній один з напрямків, що збігається з осями координат.

Постановка задачі

Нехай область $\Omega = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\ \}$ — прямокутник зі сторонами, які паралельні осям координат. Розглянемо у цій області оператор Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1,\ x_2); \quad (x_1,\ x_2) \in \Omega; \tag{1}$$

$$u(x_1,\ x_2) = g(x_1,\ x_2); \quad (x_1,\ x_2) \in \partial\Omega, \tag{2}$$

де $f(x_1, x_2)$ та $g(x_1, x_2)$ — задані функції.

Для побудови різницевої апроксимації оператора (1) задамо на області $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ прямокутну сітку

$$\overline{\omega} = \left\{ x_{1,j_1} = j_1 h_1, \quad x_{2,j_2} = j_2 h_2, \quad j_\alpha = \overline{0, N_\alpha},\ h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha},\ \alpha = 1,2 \right\}. \tag{3}$$

Введемо в області Ω $(2n+2)$ напрямки за лініями

$$s_{i1} : x_1 = k_i h_1 t_{i1}, \quad x_2 = p_i h_2 t_{i1};$$

$$s_{i2} : x_1 = -k_i h_1 t_{i2}, \quad x_2 = p_i h_2 t_{i2};$$

$$s_{01} : x_1 = k_0 h_1 t_{01}, \quad s_{02} : x_2 = p_0 h_2 t_{02}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Скориставшись формулою

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}, \tag{4}$$

зведемо похідні за змінними в операторі (1) до похідних за введеними напрямками. Для цього запишемо лінійну комбінацію [1]

$$\Delta_{(t)}u = \sum_{i=1}^{n} A_i\left(\frac{d^2u}{dt_{i1}^2} + \frac{d^2u}{dt_{i2}^2}\right) + B_1\frac{d^2u}{dt_{01}^2} + B_2\frac{d^2u}{dt_{02}^2}. \tag{5}$$

Якщо коефіцієнти $A_i, i = \overline{1,n}$ та B_1, B_2 знаходяться з системи

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2A_i k_i^2 + B_1 k_0^2 = \dfrac{1}{h_1^2}; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2A_i p_i^2 + B_2 p_0^2 = \dfrac{1}{h_2^2}, \end{cases} \tag{6}$$

то можна стверджувати, що $\Delta u = \Delta_{(t)}u$.

Побудова різницевої схеми

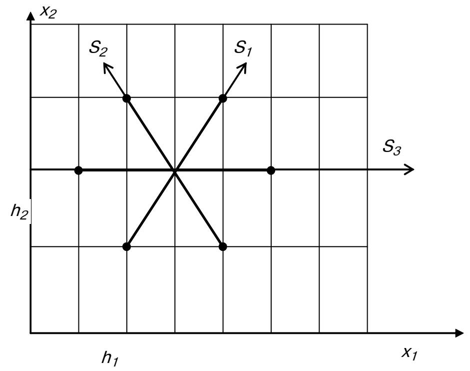

Рис. 1. Три неортогональні напрямки

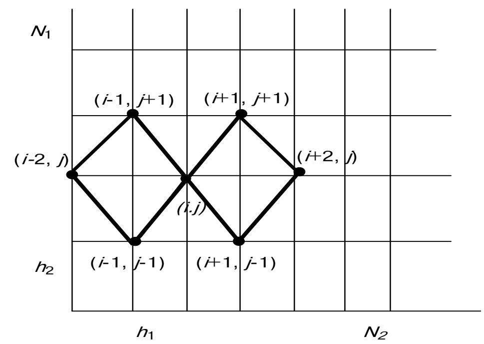

Рис. 2. Семиточковий неортогональний шаблон

В області Ω проведемо три напрямки за лініями:

$$s_1 : x_1 = h_1 t; \quad s_2 : x_1 = -h_1 t; \quad s_3 : x_1 = 2h_1 t;$$
$$x_2 = h_2 t; \quad x_2 = h_2 t; \quad x_2 = 0.$$

Скориставшись формулою похідної за напрямком, зведемо похідні за змінними в операторі Лапласа до похідних за напрямками s_1, s_2, s_3. Отримаємо:

$$\Delta_s u = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2}\right) + \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial s_3^2}. \tag{7}$$

Використовуючи поняття усереднення та повторного усереднення операторів, визначимо різницеві похідні за напрямками [2]. Для оператора (1) побудуємо різницеву апроксимацію четвертого порядку за напрямками в індексній формі

$$\begin{aligned} \Lambda y_{i,j} = \left(\frac{1}{4h_1^2} - \frac{1}{4h_2^2}\right)\left(y_{i+2,j} - 2y_{i,j} + y_{i-2,j}\right) + \\ + \frac{1}{2h_2^2}\left(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j+1} + y_{i-1,j-1} - 4y_{i,j}\right) = -f_{i,j}. \end{aligned} \tag{8}$$

Неважко переконатися, що оператор (7) апроксимує диференціальний оператор Пуассона з четвертим порядком апроксимації на семиточковому шаблоні прямокутної сітки:

$$\Psi = \Lambda u - \Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\left[\frac{4h_1^4}{12}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right) + \frac{h_1^4}{12h_2^2}\right] + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\left(\frac{h_2^2}{12}\right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\left(\frac{6h_1^2}{12}\right) + O\left(h_1^4 + h_2^4\right).$$

Таким чином, отримаємо симетричний і за $h_1 < h_2$ додатно визначений різницевий оператор Лапласа з четвертим порядком апроксимації.

Отримання розв'язку в приграничних вузлах

Для отримання розв'язку в приграничних вузлах $\left(x = x_1;\ x = x_{N_1-1}\right)$ скористаємося інтерполяційними багаточленами Ньютона інтерполювання вперед і назад [3].

У випадку $x = x_1$ застосовуємо інтерполяційний багаточлен Ньютона інтерполювання вперед

$$\begin{aligned} P(x) = f(x_0) + (x - x_0) f\left(x_0, x_2\right) + (x - x_0)(x - x_2) f(x_0, x_2, x_3) + \\ + (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) f(x_0, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \tag{9}$$

Далі знаходимо поділені різниці

$$f(x_0, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{y_{2,j} - y_{0,j}}{2h};$$

$$f(x_0, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_0, x_2)}{x_3 - x_0} = \frac{2y_{3,j} - 3y_{2,j} + y_{0,j}}{6h^2};$$

$$f(x_0, x_2, x_3, x_4) = \frac{f(x_2, x_3, x_4) - f(x_0, x_2, x_3)}{x_4 - x_0} = \frac{3y_{4,j} - 8y_{3,j} + 6y_{2,j} - y_{0,j}}{24h^3}.$$

В результаті отримаємо такий багаточлен:

$$\begin{aligned} P(x) = P(x_1) \approx y_{1,j} = y_{0,j} + (x - x_0)\left(\frac{y_{2,j} - y_{0,j}}{2h}\right) + (x - x_0)(x - x_2)\left(\frac{2y_{3,j} - 3y_{2,j} + y_{0,j}}{6h^2}\right) + \\ + (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\frac{3y_{4,j} - 8y_{3,j} + 6y_{2,j} - y_{0,j}}{24h^3} = \frac{1}{4}y_{0,j} + \frac{3}{2}y_{2,j} - y_{3,j} + \frac{1}{4}y_{4,j}. \end{aligned} \tag{10}$$

Аналогічно записуємо з іншого боку області у вузлах $x_n,\ x_{n-2},\ x_{n-3},\ x_{n-4}$, використовуючи інтерполяційний багаточлен Ньютона інтерполювання назад. У нашому випадку $x = x_{n-1}$.

$$\begin{aligned} P(x) = f(x_n) + (x - x_n) f\left(x_n, x_{n-2}\right) + (x - x_n)(x - x_{n-2}) f(x_n,\ x_{n-2},\ x_{n-3}) + \\ + (x - x_n)(x - x_{n-2})(x - x_{n-3}) f(x_n,\ x_{n-2},\ x_{n-3},\ x_{n-4}). \end{aligned}$$

Знаходимо поділені різниці і отримаємо формулу, аналогічну (10):

$$\begin{aligned} P(x) = P(x_{n-1}) \approx y_{n-1,j} = y_{n,j} + (x - x_n)\left(\frac{y_{n-2,j} - y_{n,j}}{2h}\right) + \\ + (x - x_n)(x - x_{n-2})\left(\frac{2y_{n-3,j} - 3y_{n-2,j} + y_{n,j}}{6h^2}\right) + \\ + (x - x_n)(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})\frac{3y_{n-4,j} - 8y_{n-3,j} + 6y_{n-2,j} - y_{n,j}}{24h^3} = \\ = \frac{1}{4}y_{n,j} + \frac{3}{2}y_{n-2,j} - y_{n-3,j} + \frac{1}{4}y_{n-4,j}, \end{aligned}$$

де $n = N_1$.

Таким чином, отримали такі апроксимації в приграничних точках $x = x_1;\ x = x_{N_1-1}$:

$$\begin{aligned} y_{1,j} = \frac{1}{4}y_{0,j} + \frac{3}{2}y_{2,j} - y_{3,j} + \frac{1}{4}y_{4,j}; \\ y_{N_1-1,j} = \frac{1}{4}y_{N_1,j} + \frac{3}{2}y_{N_1-2,j} - y_{N_1-3,j} + \frac{1}{4}y_{N_1-4,j}. \end{aligned} \tag{11}$$

Побудова ітераційних процесів для систем різницевих рівнянь

Для задачі (1)—(2) запишемо різницеву схему у вигляді

$$\begin{cases} y_{1,j} = \frac{1}{4} y_{0,j} + \frac{3}{2} y_{2,j} - y_{3,j} + \frac{1}{4} y_{4,j} - f_{1,j}\,; \\ \left(\frac{1}{4h_1^2} - \frac{1}{4h_2^2}\right)\left(y_{i+2,j} - 2y_{i,j} + y_{i-2,j}\right) + \frac{1}{2h_2^2}\left(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j+1} + y_{i-1,j-1} - 4y_{i,j}\right) = -f_{ij}\,; \\ y_{N_1-1,j} = \frac{1}{4} y_{N_1,j} + \frac{3}{2} y_{N_1-2,j} - y_{N_1-3,j} + \frac{1}{4} y_{N_1-4,j} - f_{N_1,j}\,, \quad \left(i = \overline{1, N_1-1};\;\; j = \overline{1, N_2-1}\right). \end{cases} \tag{12}$$

СЛАР (12) розв'язується методами простих ітерацій (МПІ), Зейделя (МЗ), верхньої релаксації за точками (МВРТ) та за лініями (МВРЛ). Наведемо ітераційні формули МВРТ та МВРЛ:

$$y_{i,j}^{(k+1)} = \omega_{t+1} \hat{y}_{i,j}^{(k+1)} + \left(1 - \omega_{t+1}\right) y_{i,j}^{(k)}, \tag{13}$$

де а) МВРТ:

$$\begin{cases} \hat{y}_{1,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} y_{0,j}^{(k+1)} + \frac{3}{2} y_{2,j}^{(k)} - y_{3,j}^{(k)} + \frac{1}{4} y_{4,j}^{(k)} - f_{1,j}; \\ \hat{y}_{i,j}^{(k+1)} = \left[\left(\frac{1}{4h_1^2} - \frac{1}{4h_2^2}\right)\left(y_{i-2,j}^{(k+1)} + y_{i+2,j}^{(k)}\right) + \frac{1}{2h_2^2}\left(y_{i-1,j+1}^{(k)} + y_{i+1,j+1}^{(k)} + y_{i-1,j-1}^{(k+1)} + y_{i+1,j-1}^{(k+1)}\right)\right] \Big/ \\ \qquad \Big/ \left(\frac{1}{2h_1^2} + \frac{3}{2h_2^2}\right) - f_{ij} * \left(\frac{1}{2h_1^2} + \frac{3}{2h_2^2}\right); \\ \hat{y}_{N_1-1,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} y_{N_1,j}^{(k+1)} + \frac{3}{2} y_{N_1-2,j}^{(k+1)} - y_{N_1-3,j}^{(k+1)} + \frac{1}{4} y_{N_1-4,j}^{(k+1)} - f_{N_1-1,j}, \end{cases} \tag{14}$$

де k — номер ітерацій, а оптимальний параметр ω_{t+1} визначаємо згідно з методикою [4].

б) МВРЛ:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} \hat{y}_{0,j}^{(k+1)} + \hat{y}_{1,j}^{(k+1)} - \frac{3}{2} y_{2,j}^{(k+1)} = -y_{3,j}^{(k)} + \frac{1}{4} y_{4,j}^{(k)} - f_{1,j}; \\ -\left(\frac{1}{4h_1^2} - \frac{1}{4h_2^2}\right) \hat{y}_{i-2,j}^{(k+1)} + \left(\frac{1}{2h_1^2} + \frac{3}{2h_2^2}\right) \hat{y}_{i,j}^{(k+1)} - \left(\frac{1}{4h_1^2} - \frac{1}{4h_2^2}\right) \hat{y}_{i+2,j}^{(k+1)} = \\ \qquad = \frac{1}{2h_2^2}\left(y_{i-1,j+1}^{(k)} + y_{i+1,j+1}^{(k)} + y_{i-1,j-1}^{(k+1)} + y_{i+1,j-1}^{(k+1)}\right) - f_{ij} * \left(\frac{1}{2h_1^2} + \frac{3}{2h_2^2}\right); \\ -\frac{3}{2} \hat{y}_{N_1-2,j}^{(k+1)} + \hat{y}_{N_1-1,j}^{(k+1)} - \frac{1}{4} \hat{y}_{N_1,j}^{(k+1)} = -y_{N_1-3,j}^{(k)} + \frac{1}{4} y_{N_1-4,j}^{(k)} - f_{N_1-1,j}. \end{cases} \tag{15}$$

Тридіагональна СЛАР (15) розв'язується методом прогонки [3].

Обчислювальний експеримент

Розв'яжемо задачу (1)—(2) з такими даними:

Задача. $f\left(x_1, x_2\right) = 0$; $y_{i,0} = x_i^4$; $y_{i,N} = 1 + x_i^4$; $y_{0,j} = y_j^4$; $y_{N,j} = 1 + y_j^4$; $i, j = \overline{0, N}$;

$N_1 = N_2 = N$; $\varepsilon = 10^{-6}$; $u_{ij(\text{точне})} = x_i^4 + y_j^4$; Ω — одиничний квадрат. Результати наведені в таблиці, де k — номер ітерації, Δ — максимальна за модулем різниця між точним і наближеним розв'язками.

Розмір сітки	МПІ	МЗ	МВРТ	МВРЛ
10×10	$k = 72$ $\Delta = 0{,}48\cdot10^{-6}$	$k = 57$ $\Delta = 0{,}23\cdot10^{-6}$	$k = 40$ $\Delta = 0{,}11\cdot10^{-6}$	$k = 23$ $\Delta = 0{,}63\cdot10^{-7}$
20×20	$k = 83$ $\Delta = 0{,}11\cdot10^{-6}$	$k = 69$ $\Delta = 0{,}83\cdot10^{-7}$	$k = 58$ $\Delta = 0{,}51\cdot10^{-7}$	$k = 40$ $\Delta = 0{,}28\cdot10^{-7}$
30×30	$k = 110$ $\Delta = 0{,}71\cdot10^{-7}$	$k = 85$ $\Delta = 0{,}55\cdot10^{-7}$	$k = 71$ $\Delta = 0{,}11\cdot10^{-7}$	$k = 54$ $\Delta = 0{,}75\cdot10^{-8}$
40×40	$k = 133$ $\Delta = 0{,}52\cdot10^{-7}$	$k = 113$ $\Delta = 0{,}31\cdot10^{-7}$	$k = 90$ $\Delta = 0{,}82\cdot10^{-8}$	$k = 75$ $\Delta = 0{,}5\cdot10^{-8}$
50×50	$k = 151$ $\Delta = 0{,}11\cdot10^{-7}$	$k = 136$ $\Delta = 0{,}7\cdot10^{-8}$	$k = 115$ $\Delta = 0{,}41\cdot10^{-8}$	$k = 90$ $\Delta = 0{,}1\cdot10^{-8}$
80×80	$k = 198$ $\Delta = 0{,}6\cdot10^{-8}$	$k = 170$ $\Delta = 0{,}3\cdot10^{-8}$	$k = 146$ $\Delta = 0{,}1\cdot10^{-8}$	$k = 125$ $\Delta = 0{,}4\cdot10^{-9}$

Висновки

В роботі побудовано новий клас різницевих апроксимацій: інтерполяційними багаточленами Ньютона біля пригraничних вузлів і різницеві схеми для семиточкових неортогональних шаблонів у випадку прямокутної області. Отримані ітераційні процеси для розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь великої розмірності для методу простих ітерацій, Зейделя, верхньої релаксації за точками і за лініями. На модельних прикладах показано перевагу методу верхньої релаксації з прогонкою за лініями над іншими ітераційними методами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Bystrytsky M. Method of building difference Laplase operators on nonorthogonal patters / M. Bystrytsky // Procerdings of Kyiv Un. — 1999. — No 1.
2. Дудикевич А. Т. Ефективний спосіб розв'язування різницевої задачі Діріхле на семиточковому шаблоні для рівняння Пуассона / А. Т. Дудикевич, А. І, Кардаш, С. М. Левицька // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. — 2005. — № 2(10). — С. 45—48.
3. Дудикевич А. Т. Практична реалізація методів апроксимації функцій / А. Т. Дудикевич, С. М. Левицька, С. М. Шахно. — Львів : Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2005. — 61 с.
4. Дудикевич А. Т. Чисельне розв'язування плоскої та осесиметричної задач Діріхле для рівняння Пуассона у випадку складних областей : навч. посіб. / А. Т. Дудикевич, Л. І. Підківка. — Львів : Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2001. — 101 с.

Рекомендована кафедрою відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів

Стаття надійшла до редакції 23.02.11
Рекомендована до друку 10.03.11

Дудикевич Анна Теодорівна — доцент кафедри обчислювальної математики;
Кардаш Андрій Іванович — доцент, ***Левицька Софія Михайлівна*** — старший викладач.
Кафедра програмування, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів