УДК 519.6

С. М. Левицька;
А. Т. Дудикевич, канд. фіз-мат. наук, доц.;
А. І. Кардаш, канд. фіз-мат. наук, доц.

ПОБУДОВА ОДНОРІДНОГО ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ

Досліджено можливість розпаралелювання подвійних числових і степеневих рядів. Побудовано орієнтований напрямний граф паралельної форми алгоритму, систолічні структури для схеми Горнера і одного із способів розпаралелювання подвійного степеневого ряду.

Вступ

Час розв’язування прикладних задач на комп’ютерах визначається чотирма факторами: елементною базою, архітектурою комп’ютера, алгоритмами розв’язування задач і якістю створених програм. Високі показники швидкодії комп’ютерів досягаються об’єднанням великої кількості процесорів і паралельною організацією обчислень. При цьому виникають значні затрати часу на комунікаційну мережу. В роботі цю проблему вирішено безпосереднім з’єднанням процесорів між собою. В роботі [3] досліджено паралельні алгоритми розв’язування основних класів задач обчислювальної математики на паралельних комп’ютерах.

Для того, щоб алгоритм міг бути реалізований на паралельній системі, він повинен бути поданий у вигляді послідовності незалежних груп операцій. Кожна операція довільної групи залежить або від початкових даних алгоритму, або від результатів виконання операцій, які знаходяться в попередніх групах. Подання алгоритму в такому вигляді називається паралельною формою алгоритму [1]. За таким поданням будується однорідне обчислювальне середовище, орієнтоване на певний клас задач, яке ще називають систолічним масивом.

У статті розроблено паралельні алгоритми обчислення значень подвійних степеневих рядів і наведено структури багатопроцесорного однорідного середовища реалізації цих алгоритмів.

Постановка задачі

Для степеневого ряду

$$P(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}x^{i}y^{j}\ ,\quad a_{ij}\neq 0 \quad \text{для всіх} \quad i,j=\overline{0,n} \tag{1}$$

можливі різні представлення, наприклад,

$$P_2(x,y)=a_{00}+\left(\left(a_{02}+a_{12}x\right)y+a_{01}\right)y+\left(\left(\left(a_{22}y+a_{21}x\right)+a_{11}\right)y+a_{10}+a_{20}x\right)x \tag{2}$$

чи

$$P_2(x,y)=a_{00}+\left(a_{01}+a_{02}y\right)y+\left(a_{10}+\left(a_{11}+a_{12}y\right)y+\left(a_{20}+\left(a_{21}+a_{22}y\right)y\right)x\right)x. \tag{3}$$

Побудова напрямного графу алгоритму

Побудуємо напрямний граф паралельної форми алгоритму, який реалізується формулою (3). З цієї формули бачимо, що необхідно реалізувати операції множення відповідного коефіцієнта на змінну x або y і операцію додавання коефіцієнта до цього добутку.

На рис. 1 зображений орієнтований напрямний граф паралельної форми алгоритму.

Для обчислення $P_2(x,\ y)$ використовуються три процесори. Висота паралельної форми дорівнює 8, завантаженість починає спадати з 5 ярусу.

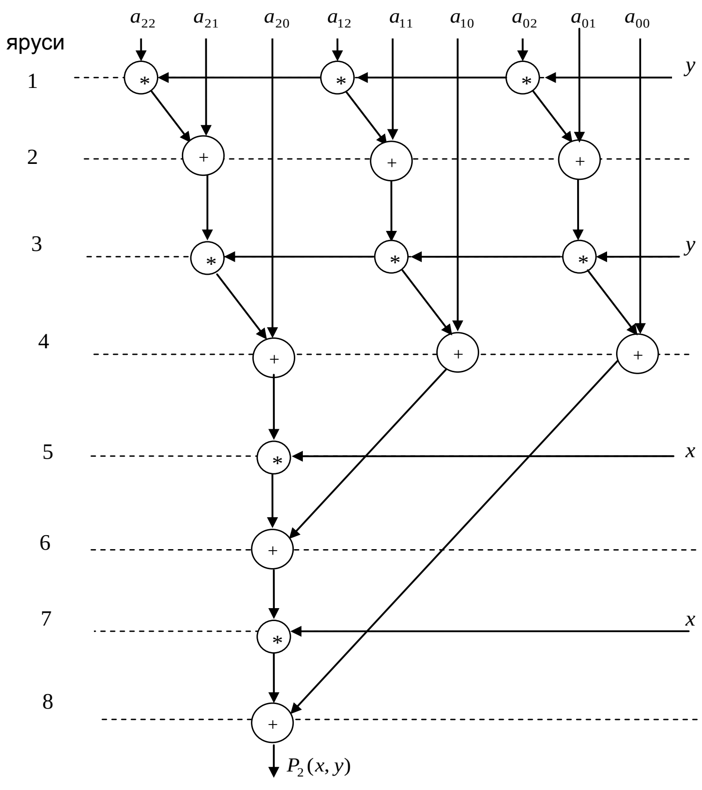


Рис. 1

1 *ярус*: $a_{22}y$; $a_{12}y$; $a_{02}y$ — множення коефіцієнтів на y.

2 *ярус*: $r_3 = a_{22}y + a_{21}$; $r_2 = a_{12}y + a_{11}$; $r_1 = a_{02}y + a_{01}$ — до результатів першого ярусу додаються відповідні коефіцієнти, тобто отримано перші внутрішні дужки.

3 *ярус*: r_3y; r_2y; r_1y — результати попереднього ярусу помножуються на y.

4 *ярус*: $r_3' = r_3y + a_{20}$; $r_2' = r_{23}y + a_{10}$; $r_1' = r_1y + a_{00}$.

5 ярус: $r_3'x$ — результати першого шляху множаться на x.

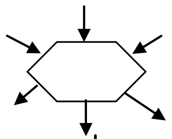
6 ярус: $r_4 = r_3'x + r_2'$ — додаються результати із п'ятого і четвертого ярусів перших двох шляхів.

7 ярус: r_4x — результат із попереднього ярусу множиться на x.

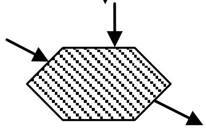
Для загального випадку формули (1) для $m = n$ потрібно буде $n + 1$ процесорів. Висота цієї паралельної форми дорівнює $(2m + n + 1)$. Завантаженість буде триматися сталою до ярусу $2m$, потім почне спадати.

Побудова систолічних масивів

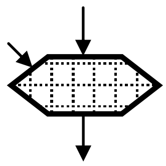
Розглянемо систолічний масив із шестикутних комірок вигляду



Пересилка інформації у вказаному напрямку.



Операція додавання та пересилки результату додавання.



Операція множення та пересилки результату.

В цих комірках аргументи вказані вхідними стрілками. На рис. 2 зображено систолічний масив, що реалізує формулу (3). Він працює за тактами для відповідних ярусів графу із рис. 1. Коефіцієнти багаточлена подаються у відповідні такти спрацювання систолічного масиву: a_{ij} (номер такту).

Розглянемо степеневий ряд (1), якщо $m = n$. Запишемо його у формі

$$
\begin{aligned}
P_n(x,\ y) = {} & \left(a_{nn}x^n + a_{n-1,n}x^{n-1} + \ldots + a_{2n}x^2 + a_{1n}x + a_{0n}\right)y^n + \\
& + \left(a_{n,n-1}x^n + a_{n-1,n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{2,n-1}x^2 + a_{1,n-1}x + a_{0,n-1}\right)y^{n-1} + \\
& + \ldots + \left(a_{n0}x^n + a_{n-1,0}x^{n-1} + \ldots + a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00}\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Кожну з дужок позначимо так:

$$
\begin{aligned}
&a'_{in} = a_{nn}x^n + a_{n-1,n}x^{n-1} + \ldots + a_{2n}x^2 + a_{1n}x + a_{0n};\\
&a'_{i,n-1} = a_{n,n-1}x^n + a_{n-1,n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{2,n-1}x^2 + a_{1,n-1}x + a_{0,n-1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&a'_{i0} = a_{n0}x^n + a_{n-1,0}x^{n-1} + \ldots + a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

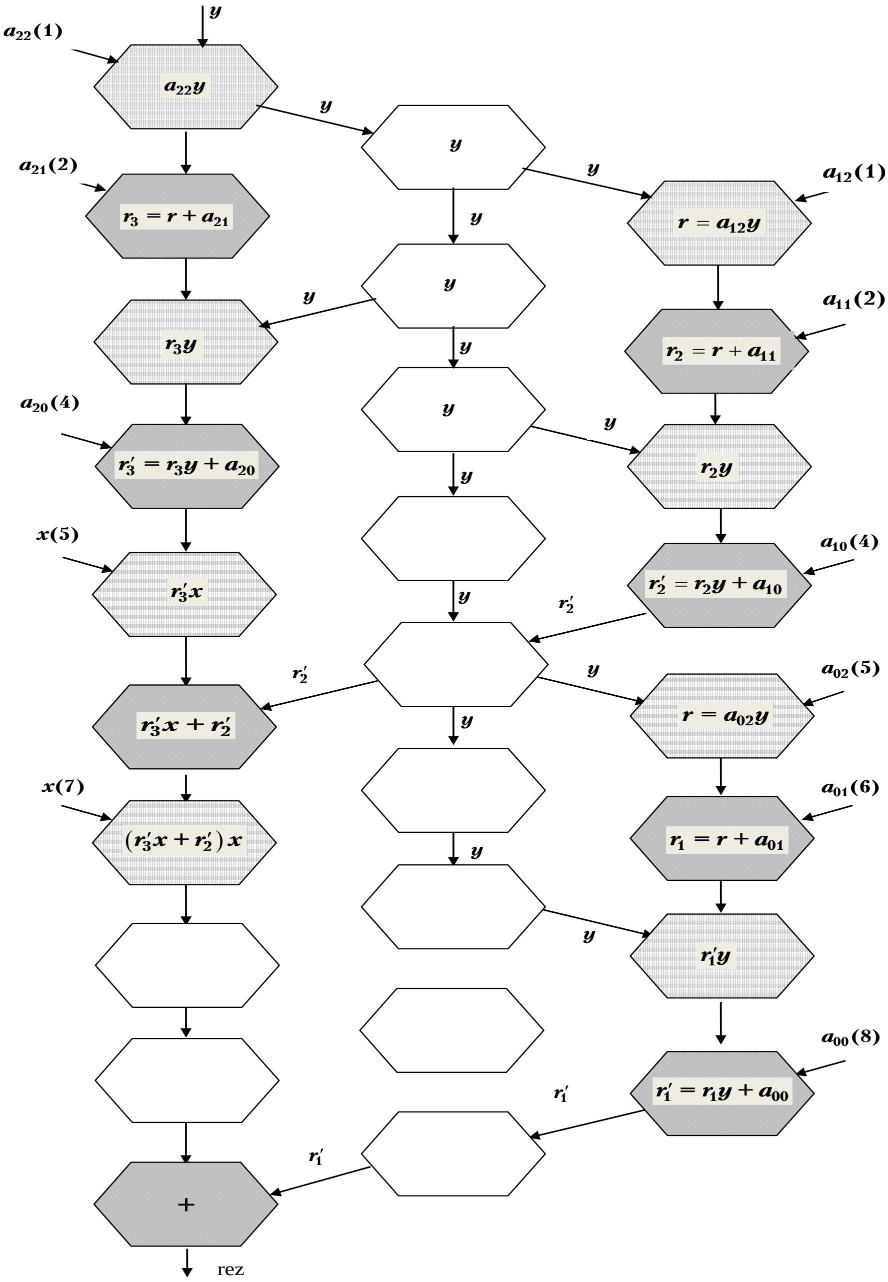


Рис. 2

Кожну з формул (5) будемо розглядати як поліном за однією змінною. Формулу (4) перепишемо у вигляді

$$P'_n(y) = a'_{in}y^n + a'_{i,n-1}y^{n-1} + \ldots + a'_{i,2}y^2 + a'_{i,1}y + a'_{i,0}. \tag{6}$$

Для реалізації формули (6) скористаємось схемою Горнера обчислення багаточлена n-го порядку від однієї змінної

$$F_n(y) = b_ny^n + b_{n-1}y^{n-1} + \ldots + b_1y + b_0. \tag{7}$$

Запишемо цей багаточлен у формі

$$F_n(y) = \left[b_n y^n + b_{n-m} y^{n-m} + \ldots + b_{l_0} y^{l_0}\right] + \left[b_{n-1} y^{n-1} + b_{n-1-m} y^{n-1-m} + \ldots + b_{l_1} y^{l_1}\right] + \\ + \ldots + \left[b_{n-m+1} y^{n-m+1} + b_{(n-m+1)-m} y^{(n-m+1)-m} + \ldots + b_{l_m} y^{l_m}\right], \tag{8}$$

де l_k — залишок від ділення $n-k$ на m; $k = 0, 1, \ldots, m-1$; $l < m < n$; $m \in Z$, причому $b_k \neq 0$; $k = \overline{0, n}$.

Поліном в кожній з дужок розкладемо за схемою Горнера за степенями y^m.

$$F_n(y) = y^{l_0}\left[\left(\ldots\left(b_n y^m + b_{n-m}\right) y^m + b_{n-2m}\right) y^m \ldots + b_{l_0}\right] + \\ + y^{l_1}\left[\left(\ldots\left(b_{n-1} y^m + b_{(n-1)-m}\right) y^m + b_{(n-1)-2m}\right) y^m + \ldots + b_{l_1}\right] + \\ + \ldots + y^{l_{m-1}}\left[\left(\ldots\left(b_{n-m+1} y^m + b_{(n-m+1)-m}\right) y^m + b_{(n-m+1)-2m}\right) y^m + \ldots + b_{l_m}\right]. \tag{9}$$

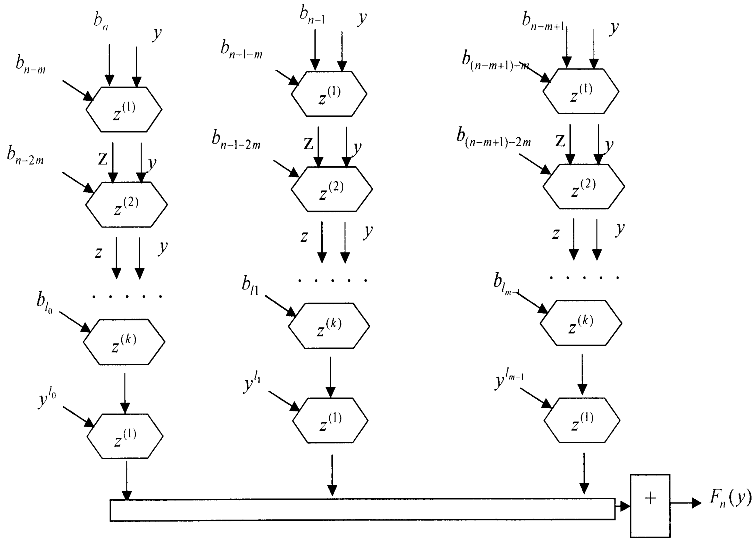


Рис. 3

Таким чином, початковий поліном представлено у вигляді суми m паралельних віток, кожна з яких може вираховуватися послідовно.

Кожна квадратна дужка формули (9) реалізується процесором. Систолічний масив для розпаралеленої схеми Горнера зображений на рис. 3.

Систолічний масив складається із m віток, результати яких через шину надходять в комірку, яка їх додає.

Висновки

Для числового ряду досліджено можливість розпаралелювання алгоритму, який зводиться до процесу здвоєння. Крім того, для подвійних степеневих рядів розглянуто різні способи побудови паралельних алгоритмів. Для одного з них одержано напрямний граф алгоритму, на основі якого створено однорідне обчислювальне середовище. В загальному випадку для подвійного степеневого ряду паралельна схема обчислень зводиться до схеми Горнера за однією змінною. В роботі показана можливість розпаралелювання цієї схеми. Побудовано систолічний масив на шестикутних комірках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Воеводин В. В. Вычислительная математика и структура алгоритмов / В. В. Воеводин. — М. : изд-во МГУ, 2006. — 112 с.
2. Левицька С. М. Побудова однорідного обчислювального середовища для методу правої прогонки / С. М. Левицька, А. Т. Дудикевич, А. І. Кардаш // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2009. — № 3. — С. 51—54. — ISSN 1997-9266.
3. Химич А. Н. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики / А. Н. Химич, И. Н. Молчанов, А. В. Попов, Т. В. Чистякова, М. Ф. Яковлев. — К. : Наукова думка, 2008. — 248 с. — ISBN 978-966-00-0807-6.
4. Мельник А. О. Побудова та матричне подання потокового графа алгоритму / А. О. Мельник, І. Д. Яковлєва, Ю. В. Ющенко // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2009. — № 3. — С. 93—99. — ISSN 1997-9266.

Рекомендована кафедрою захисту інформації

Стаття надійшла до редакції 4.03.11
Рекомендована до друку 7.06.11

Левицька Софія Михайлівна — старший викладач, ***Кардаш Андрій Іванович*** — доцент.

Кафедра програмування;

Дудикевич Анна Теодорівна — доцент кафедри обчислювальної математики.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів