УДК 519.85

А. І. Косолап, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
А. С. Перетятько, асп.

НАПІВВИЗНАЧЕНА РЕЛАКСАЦІЯ В МОДЕЛЮВАННІ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Розв'язано задачу локалізації датчиків у мережі за допомогою напіввизначеної релаксації та узагальненого симплекс-методу. Проведені чисельні експерименти показують ефективність застосованого методу.

Вступ

Починаючи з 90-х років XX століття напіввизначена оптимізація (SDP) є новою галуззю оптимізації. Багато NP-складних задач загальної квадратичної оптимізації, комбінаторної оптимізації, кододатної оптимізації, теорії графів, теорії керування, обчислювальної геометрії та деяких технічних та фінансових задач зводяться за допомогою напіввизначеної релаксації до задач SDP [1—3]. Всі ці задачі можуть бути сформульовані як загальні квадратичні задачі, які потім за допомогою перетворення $xAx^T = Axx^T = A \bullet X$ зводяться до задач напіввизначеної оптимізації, де X — напіввизначена матриця рангу одиниця [4]. Релаксація полягає в тому, що на матрицю накладається тільки умова напіввизначенності. Якщо розв'язком задачі SDP буде матриця рангу одиниця, то така релаксація буде точною.

Важливою задачею, де використовується напіввизначена релаксація, є локалізація датчиків у мережі. Останніми роками ця проблема інтенсивно досліджується [1—3, 5—9]. Важливість цієї задачі полягає у тому, що в сучасному інформаційному суспільстві існує проблема автоматичного збору даних. Одним з основних чинників автоматизації збору даних є датчики, які забезпечують інформаційні мережі даними. Від кількості та структури датчиків залежить ефективність обробки даних, які поступають у комп'ютер. Існують системи, які вже мають якусь кількість датчиків із заданою структурою, і необхідно доповнити цю структуру новими датчиками. Задача локалізації датчиків у мережі полягає в тому, щоб визначити таку структуру датчиків, яка повністю охоплюватиме заданий об'єкт. За великої кількості датчиків задача стає складною та потребує розробки нових методів напіввизначеної оптимізації.

Постановка задачі

Маємо граф $G = (V, E)$ та набір невід'ємних ваг $\left\{d_{ij} : (i, j) \in E\right\}$. В задачі локалізації датчиків у мережі вершини графа G позначають датчики, дуги графа G позначають комунікаційні шляхи, а ваги — відстані. До того ж вершини розділені на дві підмножини: перша підмножина — множина закріплених вершин, чия точна позиція відома, друга підмножина — множина датчиків, чиє розташування невідомо. Метою є визначення позиції усіх нових датчиків. В [10—13] наведений поліноміальний алгоритм для розв'язання цієї задачі, який використовує двоїсту теорію та алгоритм внутрішньої точки для SDP.

Нехай маємо m закріплених вершин графа $a^1, \ldots, a^m \in R^d$ та n вершин $x^1, \ldots, x^n \in R^d$, розташування яких необхідно визначити. До того ж, відомі значення відстаней d_{ij} між a^i та x^j для деяких i, j, та $\bar{d}_{ij}$ між x^i та x^j для деяких $i < j$. Введемо позначення: нехай $N_a = \left\{ (i, j) : d_{ij} \text{ визначено} \right\}$ та $N_x = \left\{(i, j) : i < j,\ \bar{d}_{ij} \text{ визначено}\right\}$. Задача локалізації датчиків у мережі полягає у пошуку таких $x^1, \ldots, x^n \in R^d$, які задовольняють такі умови:

$$\left\|a^i - x^j\right\|^2 = d_{ij}^2 \quad \forall (i, j) \in N_a; \tag{1}$$

$$\left\| x^i - x^j \right\|^2 = \bar{d}_{ij}^2 \qquad \forall (i,\ j) \in N_x .$$

Таким чином, задача локалізації датчиків у мережі звелась до розв’язання нелінійної квадратичної системи рівнянь (1). Розв’язати цю задачу достатньо складно, тому замінимо її оптимізаційною задачею

$$\min \left\{ \|x\|^2 \middle| \left\| a^i - x^j \right\|^2 = d_{ij}^2 \quad \forall (i,\ j) \in N_a, \ \ \left\| x^i - x^j \right\|^2 = \bar{d}_{ij}^2 \quad \forall (i,\ j) \in N_x \right\}.$$

Цю квадратичну оптимізаційну задачу перетворимо на задачу напіввизначеної оптимизації. У більшості ранніх алгоритмів така проблема зводилась до задачі нелінійної глобальної оптимізації. Альтернативний підхід — з використанням SDP — розроблений відносно нещодавно [11].

Застосування напіввизначеної релаксації

Нехай

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & \dots & x^n \\ x^1 & & & \\ \cdots & & xx^{\mathrm{T}} & \\ x^n & & & \end{bmatrix} \text{ —}$$

напіввизначена матриця $(mn+1)\times(mn+1)$, яку необхідно визначити (m — розмірність простору та кожен вектор x^i x^i містить m компонент). Тоді для усіх $(i,\ j) \in N_x$ маємо:

$$\left\| x^i - x^j \right\|^2 = -2\left(x^i\right)^T x^j + \left\| x^i \right\|^2 + \left\| x^j \right\|^2 = \bar{d}_{ij}^2 ,$$

або $\bar{A}_{ij} \cdot X = \bar{b}_{ij}$,

де
$$\bar{A}_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & i & & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & -\mathrm{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} & 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \end{array}, \quad \bar{b}_{ij} = \left(\bar{d}_{ij}^2\right),$$

де I — одиничні матриці $(m \times m)$, та для усіх $(i, j) \in N_a$ маємо:

$$\left\| a^i - x^j \right\|^2 = -2\left(a^i\right)^T x^j + \left\| a^i \right\|^2 + \left\| x^j \right\|^2 = d_{ij}^2 ,$$

або $A_{ij} \cdot X = b_{ij}$,

де
$$A_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \left\| a^i \right\|^2 & 0 & -a^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^i & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad b_{ij} = \left(d_{ij}^2\right).$$

Таким чином, маємо таку задачу напіввизначеної оптимізації:

$$\min \left\{ C \cdot X \ \middle|\ A \cdot X = b, \ \ X \succeq 0 \right\}. \tag{2}$$

SDP-алгоритм передбачає релаксацію обмеження $X \succeq 0$ у задачі (2).

Задача (2) може бути розв’язана за алгоритмом внутрішньої точки [14] або узагальненим симплекс-методом [15].

Метод розв'язання

Узагальнений симплекс-метод [15] шукає розв'язок задачі напіввизначеної оптимізації (2) у вигляді

$$X = \sum \alpha_j X_j ,$$

де $X_j = x_j x_j^T$ — матриці рангу одиниця, число доданків в сумі більше розмірності X та $\alpha \geq 0$. Матриці X_j є твірними конуса напіввизначених матриць та утворюють його початкову апроксимацію.

Тоді задача напіввизначеної оптимізації (2) зводиться до задачі лінійного програмування

$$\min\left\{\sum \alpha_j C \cdot X_j \middle| \sum \alpha_j A_i \cdot X_j = b_i, \quad i = 1,...,m, \ \ \alpha \geq 0\right\}. \tag{3}$$

Алгоритм узагальненого симплекс-методу [15] для задачі (3) на кожній ітерації будує базисний розв'язок (3), перетворюючи строку цільової функції (так, щоб для базисних змінних коефіцієнти цільової функції дорівнювали нулю) та включає у базис стовпець з мінімальним значенням коефіцієнта цільової функції. Таким чином, на кожній ітерації узагальненого симплекс-методу розв'язується задача лінійного програмування (3) та перевіряється напіввизначенність матриці

$$Q = C - \sum C \cdot x_i x_i^T \sum_{j=1}^{m} b_{ij}^{-1} A_j ,$$

де b_{ij}^{-1} — елементи оберненої матриці базисних елементів, та сума проводиться по індексах усіх базисних стовпців матриці обмежень задачі (3). Якщо $x_k^T Q x_k < 0$, то введення *k*-го стовпця у базис призведе до зменшення цільової функції задачі (3). Якщо ж матриця Q – напіввизначена, то значення цільової функції задачі (3) не може бути зменшено, та поточний розв'язок є оптимальним для задачі (2). Тоді визначаємо ранг матриці *X*. Коли він дорівнює одиниці, отримуємо точний розв'язок початкової задачі, а якщо ранг матриці *X* більше одиниці, то отримаємо нижню границю розв'язку початкової задачі.

Чисельні експерименти

В наступних прикладах задача локалізації датчиків у мережі за допомогою напіввизначеної релаксації зводилася до задачі напіввизначеної оптимізації. Задача напіввизначеної оптимізації розв'язувалась за узагальненим симплекс-методом [15].

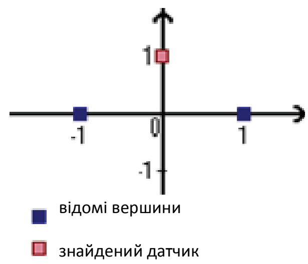
Експеримент 1 (дві відомі вершини, один датчик) [5]

$a_1(1,\ 0)$

$a_2(-1,\ 0)$

$d_{11} = d_{12} = \sqrt{2}$

$x_1 - ?$



Узагальнений симлекс-метод знайшов розв'язок $x_1(0,\ 1)$.

Розмірність матриці *X* у перетвореній задачі: 3×3.

Ранг *X* дорівнює 1 $\Rightarrow$ знайдений оптимальний розв'язок задачі.

Експеримент 2 (чотири відомі вершини, чотири датчика) [5]

$a_1(1,\ 1)$

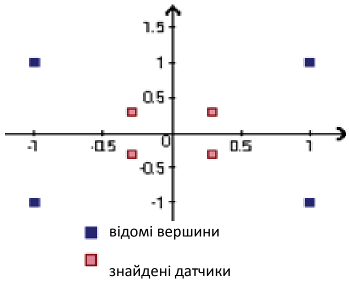
$a_2(1,\ -1)$

$a_3(-1,\ -1)$

$a_4(-1,\ 1)$

$d_{ax} = 1, \ \ d_{xx} = 2 - \sqrt{2}$

$x_1, x_2, x_3, x_4 - ?$



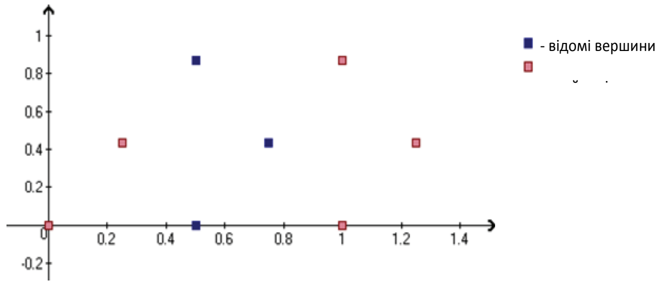
Узагальнений симлекс-метод знайшов розв'язок (округлимо до третього знаку після коми):

$x_1(0{,}293;\ 0{,}293),\ x_2(0{,}293;\ -0{,}293),\ x_3(-0{,}293;\ -0{,}293),\ x_4(-0{,}293;\ 0{,}293).$

Розмірність матриці X у перетвореній задачі: 9×9.

Ранг X дорівнює 1 $\Rightarrow$ знайдений оптимальний розв'язок.

Експеримент 3 (три відомі вершини, п'ять датчиків) [6]



Відомі вершини та датчики розташовані у вершинах правильних трикутників.

Розмірність матриці X у перетвореній задачі: 11×13.

Узагальнений симплекс-метод знайшов приблизний розв'язок задачі (ранг знайденої матриці X не дорівнює 1).

Висновки

Показано, яким чином задача локалізації датчиків у мережі перетворюється на задачу напіввизначеної оптимізації. Для отриманої задачі напіввизначеної оптимізації пропонується використовувати узагальнений симплекс-метод. Проведені чисельні експерименти показують великий потенціал напіввизначеної релаксації для розв'язання задачі локалізації датчиків у мережі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Overton M. Semidefinite Programming / M. Overton, H. Wolkowicz. — Mathematical Programming. — 1997. — No. 77. — P. 105—109.
2. Helmberg C. Semidefinite Programming For Combinatorial Optimization / C. Helmberg. — Berlin, 2000. — 150 p.
3. Freund R. M. Introduction to Semidefinite Programming / R. M. Freund. — Massachusett : Massachusetts Institute of Technology, 2004. — 54 p.
4. Косолап А. І. Використання напіввизначеної оптимізації для моделювання складних систем / А. І. Косолап, А. С. Перетятько // Математичні машини і системи. — 2012. — № 1. — С. 174—179.
5. Sum of Squares Method for Sensor Network Localization / Nie Jiawang. — University of Minnesota — 2006.
6. Spaseloc: An Adaptive Subproblem Algorithm For Scalable Wireless Sensor Network Localization / [W. Michael Carter, H. Jin Holly, M. A. Saunders, Y. Ye]. — Siam J. Optim. — 2006. — Vol. 17, No. 4. — P. 1102—1128.
7. Anderson B. D. O. Wireless sensor network localization techniques / B. D. O. Anderson, G. Mao, and B. Fidan // Computer Networks, 2007. — No. 51. — P. 2529—2553.
8. Biswas P. Semidefinite programming for ad hoc wireless sensor network localization / P. Biswas and Y. Ye // In Proceedings of the 3-rd International Symposium on Information Processing in Sensor Networks, 2004. — Berkeley, CA, USA. — P. 46—54.
9. Andrea Cassioli. Solving the Sensor Network Localization Problem using an Heuristic Multistage Approach / Andrea Cassioli. — 2009.
10. Krislock N. Explicit Sensor Network Localization using Semidefinite Representations and Facial Reductions / N. Krislock, F. Wolkowicz. — Waterloo : University of Waterloo, 2010. — 35 p.
11. Man-Cho A. Theory of Semidefinite Programming for Sensor Network Localization / A. Man-Cho, Y. Ye. — ACM-SIAM Symposium on Descrete Algorithms, 2004. — 16 p.
12. SFSDP : a Sparse Version of Full Semidefinite Programming Relaxation for Sensor Network Localization Problems / [S. Kim, M. Kojima, H. Waki, M. Yamashita]. — 2009. — 19 p.
13. Yamashita M. A High-Perfomance Software Package for Semidefinite Programs: SDPA 7 / M. Yamashita. — 2010. — 26 p.
14. Roumili H. Infeasible Interior Point Method for Semidefinite Programs / H. Roumili, A. Keraghel, A. Yassine // Applied Mathematical Sciences. — 2007. — 10 p.
15. Косолап А. И. Обобщение симплекс-метода для решения задач полуопределенной оптимизации / А. И. Косолап // Математичне та комп'ютерне моделювання. — 2010. — С. 99—106.

Рекомендована кафедрою автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки

Стаття надійшла до редакції 24.01.2013
Рекомендована до друку 11.02.2013

Косолап Анатолій Іванович — професор, ***Перетятько Анастасія Сергіївна*** — аспірантка.

Кафедра спеціалізованих комп'ютерних систем, Український державний хіміко-технологічний університет, Дніпропетровськ