

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПІКСЕЛА

### Анотація

*Розглянуто основні математичні моделі піксела, їх переваги та недоліки, сфери застосування. Обґрунтовано потребу в розробці нових моделей проблеми їх реалізації.*

У сучасній тривимірній комп'ютерній графіці існує ряд методик підвищення якості зображення та уникнення спотворень, обумовлених недостатньою розподільною златністю дискретної решітки (фільтрація текстур, антиаліайзинг та ін.). Так чи інакше завданням цих алгоритмів є

This is a watermark for the trial version, register to get the full one!

Benefits for registered users:

- 1.No watermark on the output documents.
- 2.Can operate scanned PDF files via OCR.
- 3.No page quantity limitations for converted PDF files.

**Remove Watermark Now**

розташування та кольорів інших пікселів. При цьому зладність розглядається не як умовна точка, а як скінчена область, оскільки в реальних пристроях відображення піксель не є ідеальною точкою, а має певну форму [1].

В більшості існуючих алгоритмів піксель розглядається як квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці, оскільки при цьому значно спрощуються обчислення. Математична модель піксела, в якій останній розглядається як круг з діаметром, який дорівнює одиниці, більш адекватна реальності. Більш високу якість забезпечують моделі, які враховують, що інтенсивність світла, яке випромінює піксель, є максимальною в центрі піксела та зменшується при віддаленні від нього [2].

Характерна особливість аналітичних методів антиаліайзингу полягає в тому, що під час дискретизації неперервного зображення враховуються

технічні характеристики пристройв відображення. У загальному вигляді для обчислення інтенсивності кольору піксела використовується вираз [3, 4, 8, 12]:

$$I_A(P_x, P_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{ideal}(x, y) \cdot F(x - P_x, y - P_y) dx dy, \quad (1.1)$$

де  $I_A$  - інтенсивність кольору піксела з координатами  $(P_x, P_y)$  (у випадку кольорового зображення окремо обчислюють інтенсивність кожної з трьох складових компонент кольору);  $I_{ideal}(x, y)$  – аналітична функція, яка задає інтенсивність кольору в кожній точці простору;  $F(x, y)$  - модель піксела, тобто функція, яка описує просторове розподілення світла, що випромінюється пікселом. Дану функцію часто називають функцією фільтра [3, 4].

**This is a watermark for the trial version, register to get the full one!**

Benefits for registered users:  
1.No watermark on the output documents.  
2.Can operate scanned PDF files via OCR.  
3.No page quantity limitations for converted PDF files.

**Remove Watermark Now**

час аналітичних методах антиаліайзингу [5, 6, 10, 11] розглядається частковий випадок знаходження інтегралу (1.1) для обмеженого класу графічних примітивів та функцій фільтра [3, 4, 7].

Для основних графічних примітивів, таких як відрізок прямої, багатокутник, коло, еліпс існують досить прості аналітичні вирази, що описують їхні геометричні властивості. Використання певних математичних моделей піксела дозволяє отримати відносно прості з обчислювальної точки зору методи антиаліайзингу [7, 8]. Такі методи отримали назву крайового антиаліайзингу, оскільки, як правило, розглядають лише пікселі розташовані на краях об'єктів [7]. Для кожного виду графічних примітивів використовуються різні підходи, що порівняно з методами надлишкової вибірки є певним недоліком. Проте аналітичні

методи характеризуються значно меншою обчислювальною складністю та забезпечують кращу якість згладжування, оскільки враховують особливості та обмеження пристройв відображення [7, 8].

Розглянемо основні моделі пікселів, які використовуються в аналітичних методах. Найбільше розповсюдження отримала модель, у якій піксел розглядається як квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці [7, 8, 3, 4]. Центр квадрата збігається із центром піксела. Функція фільтра для даної моделі має такий вигляд:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| \leq 0.5 \text{ та } |y| \leq 0.5; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 0.5 \text{ та } |y| > 0.5. \end{cases}$$

Обчислення інтегралу (1.1) для даної моделі зводиться до обчислення площині тієї частини квадрата, яка покривається графічним

This is a watermark for the trial version, register to get the full one!

формулою:  
Benefits for registered users:

- 1.No watermark on the output documents.
- 2.Can operate scanned PDF files via OCR.
- 3.No page quantity limitations for converted PDF files.

[Remove Watermark Now](#)

геометричних графічних примітивів знаходження площині покриття не потребує значних обчислювальних витрат [4, 5, 14]. Однак, у більшості пристройв відображення інформації просторове розподілення інтенсивності світла, що випромінюється на екрані, не має форми квадрата, тому дана модель не забезпечує максимальної якості згладжування границь зображення [106, 88].

Для пристройв відображення, які використовують ЕПТ, більш адекватною є “гаусівська” модель [6]:

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2R^2}},$$

де  $R$  - радіус фільтра. Для більшості випадків  $R = 1$ .

Дана модель враховує, що інтенсивність світла, яке випромінює піксел, є максимальною в центрі та зменшується в напрямку до границі піксела і на відстані  $R$  дорівнює нулю [80]. Обчислення інтегралу (1.1) для такої моделі зводиться до обчислення об'єму фігури, яка утворюється в результаті перетину функції фільтра та границь примітива[4].

Для LCD моніторів у якості функції фільтра часто використовують функцію Хемінга вигляду:

$$F(x, y) = \begin{cases} \left( \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{W}\right) \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{W}\right) \right)^e, & \text{якщо } |x| \leq \frac{W}{2} \text{ та } |y| \leq \frac{W}{2}, \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{W}{2} \text{ та } |y| > \frac{W}{2} \end{cases}$$

де  $W$ ,  $e$  - параметри, які забезпечують настроювання моделі під конкретний пристрій відображення [13].

This is a watermark for the trial version, register to get the full one!

характеризуються відносно великими обчислювальними затратами і вимогами до пам'яті комп'ютера.

Benefits for registered users:

1.No watermark on the output documents.

2.Can operate scanned PDF files via OCR.

3.No page quantity limitations for converted PDF files.

**Remove Watermark Now**

точно відповідала характеристикам пристрою відображення [8].

На практиці для фільтрації вибирають достатньо прості з обчислювальної точки зору функції і їх модифікують з метою отримання прийнятних зображень [8]. Для широкого класу задач та пристройів відображення достатню якість забезпечує „конусна” модель піксела [8], яка описується таким виразом:

$$F(x, y) = \begin{cases} H\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right), & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} < R; \\ 0, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \geq R. \end{cases}$$

де  $H$  - висота конуса, яку вибирають таким чином, щоб об'єм конуса дорівнював одиниці,  $R$  - радіус основи конуса.

Дана модель є спрощеним варіантом „гаусівської” моделі, оскільки

вона передбачає, що інтенсивність світла піксела є максимальною в центрі і лінійно зменшується у напрямку до границі піксела [4]. Таке спрощення дозволяє зменшити обчислювальні витрати.

Використання більш якісних моделей піксела обмежено їх значною обчислювальною складністю, тому існує необхідність розробки моделей, які б характеризувались простотою обчислювального процесу та забезпечували достатньо високу якість зображення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аммерал А. Принципы программирования в машинной графике: Пер. с англ. - М.: Солсистем, 1992. - 224 с.

2. Вяткин С.И., Долговесов Б.С., Мазурок Б.С. и др. Эффективный метод растирования изображений для компьютерных систем визуализации реального времени // Автометрия. - 1993. - № 5. - С. 34-52.

This is a watermark for the trial version, register to get the full one!

Benefits for registered users:

1.No watermark on the output documents.

2.Can operate scanned PDF files via OCR.

3.No page quantity limitations for converted PDF files.

[Remove Watermark Now](#)

5. Штрассер В., Шиллинг А., Книттель Г. Архитектуры высокопроизводительных графических систем // Открытые системы. - 1993. - №5. - С. 53-60.

6. ATI Technologies. SMOOTHVISION. White Paper. – ATI. – 2001.48

7. Catmull E. A hidden-surface algorithm with anti-aliasing // Proceedings of SIGGRAPH 78. – 1978. P.6–11.

8. Catmull E. An Analytic Visible Surface Algorithm for Independent Pixel Processing // Computer Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH '84 Conference). – 1984. – P.109–115.

9. Chen T.C. Automatic computation of exponentials, logarithms, ratios, and square roots // IBM J. Res. Dev. – 1972. – P.380-388.

10. Dobkin D., Eppstein D, Mitchell P. Computing the discrepancy with applications to supersampling patterns // ACM Transactions on Graphics (TOG). – 1996. Vol.15. –No.4. – P.354-376.
11. Ferwerda J. A., Greenberg D. P. A psychophysical approach to assessing the quality of antialiased images // IEEE Comput. Graph. Appl. – 1988. Vol. 8. – P.85–95.
12. Legge G. E. ,Foley, J. M. Contrast Masking in human vision // Journal of the Optical Society of America. – 1980. – Vol. 70. – P.1458-1470.
13. Lien S-L., Shantz M., Pratt V. Adaptive forward differencing for rendering curves and surfaces // Comput. Graph. – 1987. – No. 21(4). – P.111-118.84
14. Olano M. A Programmable Pipeline for Graphics Hardware // PhD Dissertation, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, 1998.

This is a watermark for the trial version, register to get the full one!

Benefits for registered users:

- 1.No watermark on the output documents.
- 2.Can operate scanned PDF files via OCR.
- 3.No page quantity limitations for converted PDF files.

**Remove Watermark Now**