

В. Х. Далека, д-р. техн. наук, проф.; **М. В. Хворост, д-р. техн. наук, доц.;**
П. М. Пушков, канд. техн. наук, доц.

РОЗРАХУНОК РОЗПОДІЛУ КВАЗИПОСТІЙНОЇ ГУСТИНИ СТРУМУ В КОРОТКОЗАМИКАЮЧИХ КІЛЬЦЯХ АСИНХРОННИХ МАШИН

Запропоновано виконувати розрахунок розподілу квазіпостійної густини струму в плоскому круговому кільці методом комплексного потенціалу. Комплексний потенціал визначається в прямокутнику методом дзеркальних зображень за заданим розподілом струму в циліндричному струмоводі.

Вступ

Проблема ресурсозбереження вимагає вирішення питань оптимізації конструкції технічних систем, особливо це відноситься до систем електроприводу яким споживається біля 60 % всієї електроенергії. Впровадження асинхронних машин, зокрема на електричному транспорті, замість машин постійного струму також накладає певні обмеження на їх вагові та габаритні показники.

Тому питання вдосконалення конструкції і методів розрахунку асинхронних машин залишаються ще актуальними, хоча в цьому напрямі виконані багаторічні дослідження і отриманий значний досвід в конструюванні, виробництві і експлуатації машин [1–4].

Метою роботи є вдосконалення методики розрахунку асинхронних електричних машин для оптимізації конструкції роторів, що дозволяє зменшити матеріаломісткість машин і втрати в процесі їх експлуатації.

Результати дослідження

Для обґрунтування точного аналітичного методу розрахунку параметрів короткозамикаючих кілець асинхронних машин необхідно в першу чергу виконати розрахунок розподілу густини струму.

У простому випадку, коли швидкість зміни електромагнітних процесів в часі така, що можна нехтувати струмами зміщення, запізнюванням в поширенні електромагнітних хвиль, а також впливом вихрових струмів, квазіпостійна густина струму з достатньою мірою точності описується рівнянням Лапласа [2]

$$\Delta \bar{\sigma}_0 = 0. \quad (1)$$

Для опису плоского потенційного поля можна побудувати аналітичну функцію, так званий комплексний потенціал поля $w(z) = u(x, y) + i\psi(x, y)$. Маючи запис комплексного потенціалу, можна отримати усі величини, що характеризують плоске електричне поле. Якщо прийняти $\bar{\sigma}_0 = -\text{grad } \psi$, то $\bar{\sigma}_0$ визначається через комплексний потенціал за формулою [2]

$$\bar{\sigma}_0 = -i \frac{d\bar{w}}{dz}. \quad (2)$$

Таким чином, завдання для визначення поля квазіпостійної густини струму $\bar{\sigma}_0$ зводиться до побудови комплексного потенціалу цього поля.

Будуємо комплексний потенціал за методом дзеркальних зображень. На рис. 1, а зображено на площині $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\phi}$ короткозамикаюче кільце ротора асинхронної машини $r_0 \leq \rho \leq r_1$. Струм до кільця підводиться тонким циліндричним струмоводом $\zeta = r_1^* e^{i\phi}$ концентричним межам кільця.

Оскільки будувати комплексний потенціал в прямокутнику зручніше ніж у кільці, то кільце $\zeta = \rho e^{i\phi}$, $r_0 \leq \rho \leq r_1$ відобразимо на прямокутник площини z (рис. 1б) згідно із законом

$$z = x + iy = i \ln \frac{\zeta}{r_0} = -\phi + i \ln \frac{\rho}{r_0}. \quad (3)$$

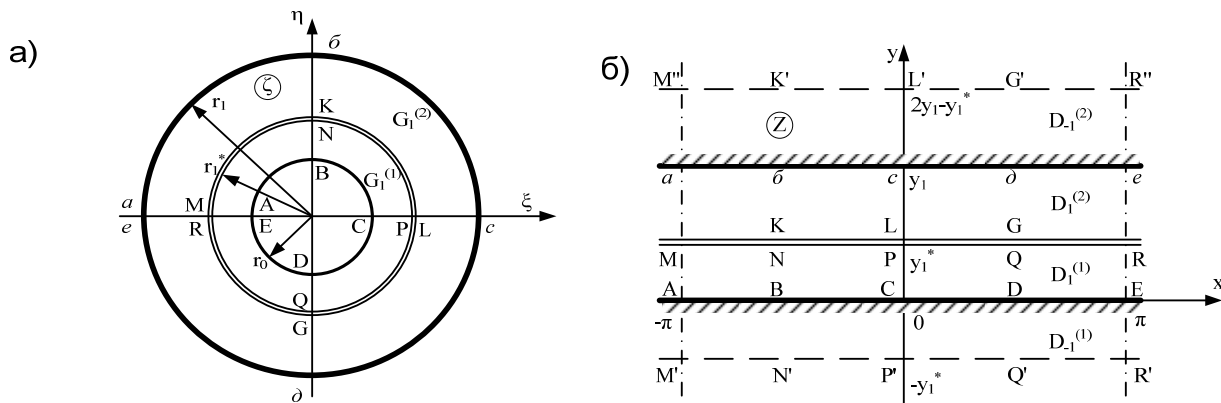


Рис. 1. Короткозамикаюче кільце (а) і його конформне відображення на прямокутник (б)

На основі побудованого в прямокутнику комплексному потенціалу визначаємо $\bar{\sigma}_{0z}$, а потім і $\bar{\sigma}_{0\zeta}$ за відомою формулою

$$\bar{\sigma}_{0\zeta} = \bar{\sigma}_{0z} \frac{dz}{d\zeta} = -\frac{i}{\zeta} \bar{\sigma}_{0z}. \quad (4)$$

Лінійну густину струму в струмоводі на площині представляємо у вигляді ряду Фур'є

$$\sum_{v=1}^{\infty} A_{mv} \cos vx, \quad (5)$$

де v – порядок просторової гармонічної лінійної густини струму в струмоводі; A_{mv} – амплітуда v -ї гармонічної.

Лінійну густину струму в струмоводі розбиваємо на два прості шари (див. рис. 1):

$$A_{mv} \cos vx = A_{mv}^{(1)} \cos vx + A_{mv}^{(2)} \cos vx, \quad (6)$$

кожний з яких є джерелом струмів провідності $\bar{\sigma}_{0z}^{(1)}$ і $\bar{\sigma}_{0z}^{(2)}$ відповідно в областях $D_1^{(1)}$ і $D_1^{(2)}$ (рис. 1б). Тут і надалі знак суми опускаємо і оперуємо однією лише v -ю гармонічною.

У кожному з шарів повний струм буде

$$I_v^{(1)} = u_v^{(1)}(x, y_1^*) = \int_0^x A_{mv}^{(1)} \cos v\alpha d\alpha = \frac{A_{mv}^{(1)}}{v} \sin vx; \quad (7)$$

$$I_v^{(2)} = u_v^{(2)}(x, y_1^*) = \int_0^x A_{mv}^{(2)} \cos v\alpha d\alpha = \frac{A_{mv}^{(2)}}{v} \sin vx. \quad (8)$$

Таким чином, на верхній і нижній межах областей $D_1^{(1)}$ і $D_1^{(2)}$ отриманий закон розподілу скалярної функції струму, яка визначається як повний струм, відлік якого проводиться від нульової точки межі.

Шукаємо комплексний потенціал $w_v^{(1)}(z)$ в області $D_1^{(1)}$ за методом дзеркальних зображень. На верхній межі області $D_1^{(1)}$ шириною $y_1^* = \ln \frac{r_1^*}{r_0}$ задано періодичне розподілення функції струму з періодом 2π

$$\text{Re } w_v^{(1)}(x, y_1^*) = u_v^{(1)}(x, y_1^*) = \frac{A_{mv}^{(1)}}{v} \sin vx. \quad (9)$$

На нижній межі цієї області $u_v^{(1)}(x, 0) = 0$.

Відобразимо смугу $D_1^{(1)}$ в її нижній межі (див. рис. 1б) з тим, щоб на лінії з ординатою $y = -y_1^*$ розподілився повний струм

$$\operatorname{Re} w_v^{(1)}(x, -y_1^*) = u_v^{(1)}(x, -y_1^*) = u_v^{(1)}(x, y_1^*) = \frac{A_{mv}^{(1)}}{v} \sin vx. \quad (10)$$

Визначаємо гармонічну функцію $u_v^{(1)}(x, y)$ у вигляді

$$u_v^{(1)}(x, y) = b_v^{(1)} \sin vx f_v^{(1)}(y), \quad (11)$$

де
$$b_v^{(1)} = \frac{A_{mv}^{(1)}}{v}. \quad (12)$$

Рівняння Лапласа цієї функції буде

$$\frac{\partial^2 u_v^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_v^{(1)}}{\partial y^2} = b_v^{(1)} \sin vx [-v^2 f_v^{(1)}(y) + f_v^{(1)''}(y)] = 0. \quad (13)$$

Отже, $f_v^{(1)}(y)$ визначиться з рівняння

$$f_v^{(1)''}(y) - v^2 f_v^{(1)}(y) = 0. \quad (14)$$

Звідси знаходимо

$$f_v^{(1)}(y) = F_v^{(1)} \operatorname{ch} vy + B_v^{(1)} \operatorname{sh} vy.$$

Постійні інтеграції $F_v^{(1)}$ і $B_v^{(1)}$ визначаємо із заданих на межах $y = y_1^*$ і $y = -y_1^*$ смуги $D_1^{(1)} + D_{-1}^{(1)}$ значень функції струму $u_v^{(1)}(x, y)$. Знак функції струму на межах вибирається з умови неможливості протікання струму через лінію $y = 0$, що є відображенням межі $\rho = r_0$ кільця $r_0 \leq \rho \leq r_1$, з урахуванням узгодження позитивного обходу області $D_1^{(1)} + D_{-1}^{(1)}$ і вибраного розташування координатних осей (рис. 2).

Таким чином, з граничних умов, якщо $y = y_1^*$ та $y = -y_1^*$, знаходимо

$$f_v^{(1)}(y_1^*) = F_v^{(1)} \operatorname{ch} vy_1^* + B_v^{(1)} \operatorname{sh} vy_1^* = -1;$$

$$f_v^{(1)}(-y_1^*) = F_v^{(1)} \operatorname{ch} vy_1^* - B_v^{(1)} \operatorname{sh} vy_1^* = 1$$

або

$$F_v^{(1)} = 0; \quad B_v^{(1)} = -\frac{1}{\operatorname{sh} vy_1^*}.$$

Визначаємо

$$f_v^{(1)}(y) = -\frac{\operatorname{sh} vy}{\operatorname{sh} vy_1^*}. \quad (15)$$

Знаходимо шукану гармонічну функцію

$$u_v^{(1)}(x, y) = -a_v^{(1)} \sin vx \operatorname{sh} vy, \quad (16)$$

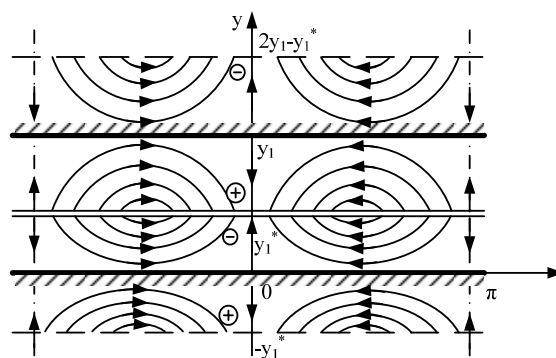


Рис. 2. Знаки функції струму на межах

де

$$a_v^{(1)} = \frac{b_v^{(1)}}{\operatorname{sh} v y_1^*} = \frac{A_{mv}^{(1)}}{v \operatorname{sh} v y_1^*}. \quad (17)$$

Якщо $y = 0$, то $u_v^{(1)}(x, 0) = 0$.

Зв'язана з $u_v^{(1)}(x, y)$ гармонічна функція буде

$$v_v^{(1)}(x, y) = \int \frac{\partial u_v^{(1)}}{\partial x} dy + C^{(1)} = -a_v^{(1)} \cos vx \operatorname{ch} vy + C^{(1)}. \quad (18)$$

Визначаємо шукану аналітичну функцію

$$w_v^{(1)}(x, y) = u_v^{(1)}(x, y) + i v_v^{(1)}(x, y) = -a_v^{(1)} (\sin vx \operatorname{sh} vy + i \cos vx \operatorname{ch} vy) + i C^{(1)}. \quad (19)$$

Через аргумент $z = x + iy$ її виразимо так:

$$w_v^{(1)}(z) = -i a_v^{(1)} \cos vz + i C^{(1)}. \quad (20)$$

Аналогічним чином шукаємо комплексний потенціал в області $D_1^{(2)}$. На нижній межі цієї смуги шириною $y_1 - y_1^* = \ln \frac{r_1}{r_1^*}$ задано періодичний (з періодом 2π) розподіл функції струму

$$\operatorname{Re} w_v^{(2)}(x, y_1^*) = u_v^{(2)}(x, y_1^*) = \frac{A_{mv}^{(2)}}{v} \sin vx. \quad (21)$$

На верхній межі (лінія $y = y_1$)

$$u_v^{(2)}(x, y_1) = 0.$$

Відбиваємо смугу $D_1^{(2)}$ у її верхній межі і приймаємо

$$\operatorname{Re} w_v^{(2)}(x, 2y_1 - y_1^*) = \operatorname{Re} w_v^{(2)}(x, y_1^*) = u_v^{(2)}(x, 2y_1 - y_1^*) = u_v^{(2)}(x, y_1^*) = \frac{A_{mv}^{(2)}}{v} \sin vx. \quad (22)$$

Знову шукаємо гармонічну функцію

$$u_v^{(2)}(x, y) = b_v^{(2)} \sin vx f_v^{(2)}(y), \quad (23)$$

де

$$b_v^{(2)} = \frac{A_{mv}^{(2)}}{v}. \quad (24)$$

Функція $f_v^{(2)}(y)$ визначається за рівнянням (14):

$$f_v^{(2)}(y) = F_v^{(2)} \operatorname{ch} vy + B_v^{(2)} \operatorname{sh} vy. \quad (25)$$

З граничних умов з урахуванням знаку функції струму (див. рис. 2) знаходимо

$$\begin{aligned} f_v^{(2)}(y_1^*) &= F_v^{(2)} \operatorname{ch} v y_1^* + B_v^{(2)} \operatorname{sh} v y_1^* = 1; \\ f_v^{(2)}(2y_1 - y_1^*) &= F_v^{(2)} \operatorname{ch} v(2y_1 - y_1^*) + B_v^{(2)} \operatorname{sh} v(2y_1 - y_1^*) = -1 \end{aligned}$$

або

$$F_v^{(2)} = \frac{\operatorname{sh} v y_1}{\operatorname{sh} v(y_1 - y_1^*)}; \quad B_v^{(2)} = -\frac{\operatorname{ch} v y_1}{\operatorname{sh} v(y_1 - y_1^*)}.$$

Функція $f_v^{(2)}(y)$ буде мати вигляд

$$f_v^{(2)}(y) = \frac{\operatorname{sh}v(y_1 - y)}{\operatorname{sh}v(y_1 - y_1^*)}. \quad (26)$$

Знаходимо шукану гармонічну функцію

$$u_v^{(2)}(x, y) = a_v^{(2)} \sin vx \cdot \operatorname{sh}v(y_1 - y), \quad (27)$$

де

$$a_v^{(2)} = \frac{b_v^{(2)}}{\operatorname{sh}v(y_1 - y_1^*)} = \frac{A_{mv}^{(2)}}{v \cdot \operatorname{sh}v(y_1 - y_1^*)}. \quad (28)$$

Зв'язана з $u_v^{(2)}(x, y)$ гармонічна функція буде

$$v_v^{(2)}(x, y) = \int \frac{\partial u_v^{(2)}}{\partial x} dy + C^{(2)} = -a_v^{(2)} \cos vx \operatorname{ch}v(y_1 - y) + C^{(2)}. \quad (29)$$

Комплексний потенціал дорівнює

$$w_v^{(2)}(x, y) = u_v^{(2)}(x, y) + i v_v^{(2)}(x, y) = -i a_v^{(2)} [\cos vx \operatorname{ch}v(y_1 - y) + i \sin vx \operatorname{sh}v(y_1 - y)] + i C^{(2)}. \quad (30)$$

Через аргумент $z = x + iy$ він запишеться у вигляді

$$w_v^{(2)}(z) = -i a_v^{(2)} \cos v(z - iy_1) - i C^{(2)}. \quad (31)$$

Виразимо коефіцієнти $a_v^{(1)}$, $a_v^{(2)}$ через повний струм струмовводу

$$I_v(x) = \int_0^x A_{mv} \cos v\alpha d\alpha = \frac{A_{mv}}{v} \sin vx = I_{mv} \sin vx. \quad (32)$$

З рівності дотичних, які визначають густину струму по обидві сторони струмовводу маємо

$$\frac{\partial v_v^{(1)}(x, y_1^*)}{\partial x} = \frac{\partial v_v^{(2)}(x, y_1^*)}{\partial x}$$

або

$$\frac{b_v^{(1)}}{b_v^{(2)}} = \frac{\operatorname{sh}v y_1^* \operatorname{ch}v(y_1 - y_1^*)}{\operatorname{ch}v y_1^* \operatorname{sh}v(y_1 - y_1^*)}.$$

Так як $I_{mv} = b_v^{(1)} + b_v^{(2)}$, то після елементарних перетворень отримаємо:

$$b_v^{(1)} = I_{mv} \frac{\operatorname{sh}v y_1^* \operatorname{ch}v(y_1 - y_1^*)}{\operatorname{sh}v y_1}; \quad b_v^{(2)} = I_{mv} \frac{\operatorname{ch}v y_1^* \operatorname{sh}v(y_1 - y_1^*)}{\operatorname{sh}v y_1}. \quad (33)$$

Або згідно з (17) і (28)

$$\alpha_v^{(1)} = I_{mv} \frac{\operatorname{ch}v(y_1 - y_1^*)}{\operatorname{sh}v y_1}; \quad \alpha_v^{(2)} = I_{mv} \frac{\operatorname{ch}v y_1^*}{\operatorname{sh}v y_1}. \quad (34)$$

Визначаємо густини струму $\bar{\sigma}_{0zv}^{(1)}$ і $\bar{\sigma}_{0zv}^{(2)}$ відповідно в областях $D_1^{(1)}$ і $D_1^{(2)}$ площини z за побудованими в них комплексними потенціалами $w_v^{(1)}(z)$ і $w_v^{(2)}(z)$:

$$\bar{\sigma}_{0zv}^{(1)} = -i \frac{dw_v^{(1)}}{dz} = -C_v^{(1)} \sin v\bar{z}; \quad (35)$$

$$\sigma_{0zv}^{-(2)} = -i \frac{dw_v^{(2)}}{dz} = -C_v^{(2)} \sin v(\overline{z - iy_1}); \quad (36)$$

де

$$C_v^{(1)} = va_v^{(1)} = vI_{mv} \frac{\operatorname{ch}v(y_1 - y_1^*)}{\operatorname{sh}vy_1}; \quad (37)$$

$$C_v^{(2)} = va_v^{(2)} = vI_{mv} \frac{\operatorname{ch}vy_1^*}{\operatorname{sh}vy_1}. \quad (38)$$

У кільцевих областях $G_1^{(1)}$ $G_1^{(2)}$ площини ζ густина струму відповідно буде

$$\sigma_{0\zeta v}^{-(1)} = -\frac{i}{\zeta} \sigma_{0zv}^{-(1)} = \frac{C_v^{(1)}}{2r_0} \left[\left(\frac{\bar{\zeta}}{r_0} \right)^{v-1} - \left(\frac{r_0}{\zeta} \right)^{v+1} \right]; \quad (39)$$

$$\sigma_{0\zeta v}^{-(2)} = -\frac{i}{\zeta} \sigma_{0zv}^{-(2)} = \frac{C_v^{(2)}}{2r_1} \left[\left(\frac{\bar{\zeta}}{r_1} \right)^{v-1} - \left(\frac{r_1}{\zeta} \right)^{v+1} \right]. \quad (40)$$

З (39) і (40) випливає, що $\sigma_{0\zeta v}^{-(1)}$ і $\sigma_{0\zeta v}^{-(2)}$ виражаються через змінну $\bar{\zeta} = \rho e^{-i\phi}$ і ϵ , таким чином, аналітичними функціями.

Неважко перевірити, що густина струму на межах кільця має тільки тангенціальні складові, а стрибок їх нормальних складових в струмоводі дорівнює лінійній густині підведеного струму.

У разі ступінчастого розподілу повного струму, коли він підводиться через ниткоподібні струмоводи, розкладання струму в ряд Фур'є буде

$$I(x) = \frac{NI_m}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kN-1)x}{kN-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kN+1)x}{kN+1} \right\}, \quad (41)$$

де N – кількість струмоводів (стержнів).

Згідно з нашими формулами розподіл густини струму запишеться у вигляді

$$\sigma_{0z}^{-(1)} = -\sum_{v=1}^{\infty} C_v^{(1)} \sin v\bar{z} = -\frac{NI_m}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} C_{kN-1}^{(1)} \sin(kN-1)\bar{z} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{kN+1}^{(1)} \sin(kN+1)\bar{z} \right\}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{0z}^{-(2)} &= -\sum_{v=1}^{\infty} C_v^{(2)} \sin v(\overline{z - iy_1}) = \\ &= -\frac{NI_m}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} C_{kN-1}^{(2)} \sin[(kN-1)(\overline{z - iy_1})] + \sum_{k=0}^{\infty} C_{kN+1}^{(2)} \sin[(kN+1)(\overline{z - iy_1})] \right\}; \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{0\zeta}^{-(1)} &= \frac{1}{2r_0} \sum_{v=1}^{\infty} C_v^{(1)} \left[\left(\frac{\bar{\zeta}}{r_0} \right)^{v-1} - \left(\frac{r_0}{\zeta} \right)^{v+1} \right] = \\ &= \frac{NI_m}{4\pi r_0} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} C_{kN-1}^{(1)} \left[\left(\frac{\bar{\zeta}}{r_0} \right)^{kN-2} - \left(\frac{r_0}{\zeta} \right)^{kN} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} C_{kN+1}^{(1)} \left[\left(\frac{\bar{\zeta}}{r_0} \right)^{kN} - \left(\frac{r_0}{\zeta} \right)^{kN+2} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{0\zeta}^{-(2)} &= \frac{1}{2r_1} \sum_{v=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\bar{\zeta}}{r_0} \right)^{v-1} - \left(\frac{r_1}{\zeta} \right)^{v+1} \right] C_v^{(2)} = \\ &= \frac{NI_m}{4\pi r_1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} C_{kN-1}^{(2)} \left[\left(\frac{\bar{\zeta}}{r_1} \right)^{kN-2} - \left(\frac{r_1}{\zeta} \right)^{kN} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} C_{kN+1}^{(2)} \left[\left(\frac{\bar{\zeta}}{r_1} \right)^{kN} - \left(\frac{r_1}{\zeta} \right)^{kN+2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

де

$$C_{kN-1}^{(1)} = \frac{\text{ch}[(kN-1)(y_1 - y_1^*)]}{\text{sh}(kN-1)y_1}; \quad C_{kN+1}^{(1)} = \frac{\text{ch}[(kN+1)(y_1 - y_1^*)]}{\text{sh}(kN+1)y_1}, \quad (46)$$

$$C_{kN-1}^{(2)} = \frac{\text{ch}(kN-1)y_1^*}{\text{sh}(kN-1)y_1}; \quad C_{kN+1}^{(2)} = \frac{\text{ch}(kN+1)y_1^*}{\text{sh}(kN+1)y_1}. \quad (47)$$

Це і є представленням розв'язку задачі у вигляді рядів Фур'є.

Висновки

Таким чином, отримана можливість визначати розміри короткозамикаючих кілець для оптимізації конструкції ротора асинхронних машин.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Далека В. Х. Зменшення ресурсомісткості асинхронних двигунів / В. Х. Далека, П. М. Пушков // Коммунальное хоз-во городов. — К. : Техніка, 2003. — Вып. 47. — С. 209—219.
2. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля / В. А. Говорков. — М. : Энергия, 1968. — 488 с.
3. Миролюбов Н. Н. Методы расчета электростатических полей / Н. Н. Миролюбов, М. В. Костенко, М. Л. Левинштейн, Н. Н. Тиходеев. — М. : Высшая школа, 1963. — 415 с.
4. Пушков П. М. Розрахунок активного опору фази короткозамкненої обмотки обернених асинхронних двигунів / П. М. Пушков, Ю. В. Мінсєва, Т. О. Супрун // Вісник східноукраїнського національного університету ім. Володимира Даля. — 2011. — № 1 (155), ч. 2. — С. 187—194.

Рекомендована кафедрою електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті

Стаття надійшла до редакції 10.02.12

Рекомендована до друку 14.02.12

Далека Василь Хомич — завідувач кафедри, **Хворост Микола Васильович** — професор, **Пушков Павло Максимович** — доцент.

Кафедра електричного транспорту, Харківська національна академія міського господарства, Харків