

УДК 519.632

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Мехтиева Галина, Алиев Айдын

Бакинский Государственный Университет, Азербайджан

Аннотация

В данной работе рассматривается разностная задача Дирихле для уравнения Лапласа на прямоугольнике. Для численного решения задачи применяется дискретный аналог метода Фурье. Оценивается погрешность метода. Получена эффективная оценка погрешности, т.е. в этой оценке участвуют только известные данные задачи.

Пусть $\Pi = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < b\}$, а Γ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) стороны прямоугольника Π , пронумерованные против часовой стрелки начиная с нижней стороны за исключением концов, b -рациональное число. Введем обозначения

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \quad \bar{\Pi} = \Pi \cup \Gamma.$$

Введем прямоугольную сетку, прямыми $x = x_i = ih_1, y = y_j = jh_2, i = 0, 1, \dots, 1/h_1, j = 0, 1, \dots, b/h_2$, где $1/h_1, b/h_2$ – целые числа. Обозначим $\Pi_h = \{(x, y) : x = x_i = ih_1, 0 < i < 1/h_1, y = y_j = jh_2, 0 < j < b/h_2\}$, Γ_{ih} ($i = 1, 2, 3, 4$) множество узлов сетки, лежащих на $\Gamma_i = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_{ih}$, а также $\bar{\Pi}_h = \Pi_h \cup \Gamma_h, \Gamma_{1h} = \{(x, y) : x = x_i = ih_1, 1 \leq i \leq 1/h_1 - 1, y = 0\}$.

Рассматривается следующая разностная задача:

$$\begin{aligned} \Delta_h u_h &= 0 & \text{на } \Pi_h, \\ u_h &= \varphi_h & \text{на } \Gamma_{1h}, \\ u_h &= 0 & \text{на } \Gamma_h \setminus \Gamma_{1h}, \end{aligned}$$

где Δ_h – пятиточечный разностный оператор Лапласа, φ_h – заданная на Γ_{1h} , функция.

Получено следующее представление решения задачи на Π_h :

$$u_h(x, y) = \sum_{n=1}^{1/h_1-1} c_n \frac{\text{sh}(\beta_n (1 - \frac{y}{b}))}{\text{sh}\beta_n} \sin n\pi x,$$

где

$$c_n = 2 \sum_{k=1}^{1/h_1-1} \varphi_h(kh_1) \sin n\pi kh_1,$$

$$\beta_n = \frac{2b}{h_2} \text{arsh} \left(\frac{h_2}{h_1} \sin \frac{n\pi h_1}{2} \right),$$

причем $\frac{n\pi b}{2} < \beta_n < n\pi b$.

Оценена погрешность между решениями разностной задачи представленной дискретным аналогом метода Фурье и точным решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В полученных оценках погрешности участвуют только известные данные.

Список литературы:

1. Walsh J.L., Young D. On the accuracy of the numerical solution of the Dirichlet problem by finite differences // Jour. of Resea. of the Nat. Bur. of Standards. - 1953. Vol.51. №6. - P.343-369.
2. Романова С.Е. Экономичный метод приближенного решения разностного уравнения Лапласа на прямоугольных областях // Ж. выч. мат. и мат. физ. - 1983. Т.23. №3. - С.660-673.
3. Алиев А.Ю. О численном решении нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений / Диссертация на соис. уч. степ. к.ф.м.н. - Баку, 1992.
4. Wasow W. On the truncation error in the solution of Laplace's equation by finite differences // Jour. of Resea. of the Nat. Bur. of Standards. - 1952. Vol.48. - P.345-348.
5. Романова С.Е. Экономичный метод решения разностного уравнения Лапласа на прямоугольных областях // ДАН СССР. - 1980. Т.252. №1. - С.48-51.