ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В.И. Левин

Пензенская государственная технологическая академия, Россия

В настоящее время наука накопила богатый опыт исследования различных систем с полностью определенными (детерминированными) параметрами. Соответствующие задачи обычно формируются как задачи расчета, анализа и синте-за тех или иных функций с детерминированными параметрами – характеристик изучаемых систем. Однако на практике все чаще встречаются системы с неполностью определенными (недетерминированными) параметрами. Причины этого таковы: 1) естественная неопределенность, свойственная многим реальным процессам и системам; 2) неточное задание параметров большинства систем из-за погрешностей вычислений или измерений; 3) возникающая необходимость совместного исследования семейства однотипных систем, имеющих одинаковые функции-характеристики и различающихся лишь значениями параметров этих функций, 4) изменение во времени параметров некоторых систем.

Исследование неопределенных систем формируется в виде задач расчета, анализа и синтеза характеристик этих систем, имеющих вид тех или иных функций с недетерминированными параметрами – случайными, нечеткими, интервальными и т.д. Все эти задачи сложнее их детерминированных аналогов, что связано со значительным усложнением алгебраических операций над числами при переходе в область недетерминированных чисел.

В настоящее время наиболее распространены три различных подхода к исследованию неопределенных систем: детерминированный, вероятностный и нечеткий. Первый состоит в решении поставленной задачи для определенных значений параметров системы, взятых внутри соответствующих заданных областей неопределенности. Так, можно выбрать наихудшее значение или сочетаний значений параметров (пессимистически подход), их наилучшее значений или сочетание значений (оптимистический подход) и др. Достоинство этого подхода – простота интерпретации получаемого решения (так, при пессимистическом подходе получается наихудшее возможное решение); недостаток – ориентировка на какое-то одно определенное (чаще всего экстремальное) значение или сочетание значений параметров системы, которое на практике реализуется очень редко, что может обернуться неоправданной сложностью решения. Второй подход состоит в решении задачи для усредненных (ожидаемых) значений параметров системы, что предполагает задание вероятностных распределений этих параметров внутри соответствующих областей неопределенности. Достоинство этого подхода – ориентировка получаемого решения хотя и на одно, но зато наиболее часто реализующееся значение или сочетание значений параметров системы, недостаток – необходимость знания вероятностных распределений параметров системы, что далеко не всегда возможно. Третий подход идейно близок второму, но отличается тем, что вместо вероятностных распределений параметров изучаемой системы, являющихся объективными характеристиками значений этих параметров, используются нечеткие распределения параметров системы, получаемые экспертным путем.

Все три изложенных подхода объединяет предварительная «детерминизация» параметров системы, выполняемая перед решением поставленной задачи. Однако возможен и принципиально иной, четвертый подход, когда параметры системы предварительно не детерминизируются, а решение нужной задачи проводится в ее «естественной» форме, т.е. с учетом полного множества всех возможных значений недетерминированных параметров системы. Именно такой подход излагается в данной работе. Его достоинство – ориентировка получаемого решения на все множество возможных значений параметров изучаемой системы внутри их областей неопределенности; недостаток – несколько более сложная интерпретация решения. При изложении данного подхода будем считать параметры всех функций – характеристик изучаемых систем – неопределенностями интервального типа, потому что интервальные оценки неизвестных параметров систем наиболее просты и доступны для получения.

На протяжении большей части своей истории человечество занималось интеллектуальной деятельностью, существенно используя понятие числа. Это понятие, совместно с хорошо известными действиями над числами – сложением, вычитанием, умножением, делением и сравнением – позволяли решать разнообразные задачи по изучению различных систем, возникающие в естественных, технических и гуманитарных науках. Однако задачи, решаемые современной наукой и современными технологиями, значительно усложнились, и одной из главных причин этого является неопределенность изучаемых систем. Поэтому для успешного решения новых сложных задач базовое математическое понятие числа пришлось пересмотреть. В результате появилось понятие неопределенного числа. К настоящему времени известно три типа неопределенных чисел: случайные, нечеткие и интервальные. Случайные числа задаются некоторыми вероятностными распределениями их возможных значений; такие числа изучаются в теории вероятностей. Нечеткие числа задаются лингвистически сформулированными распределениями их возможных значений; они изучаются в теории нечетких множеств. Наконец, интервальные числа задаются интервалами их возможных значений без указания какого-либо распределения возможных значений числа внутри заданного интервала; они изучаются в интервальной математике. Очевидно, что интервальные числа содержат минимальную информацию о неопределенном числе, которую проще всего получить. Кроме того, операции над интервальными числами выполняются проще, чем операции над случайными и нечеткими числами. Отсюда – большой интерес, который представляют эти числа для различных приложений.

Любое интервальное число может быть записано в виде некоторого замкнутого вещественного интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$. Произвольная интервальная функция может быть определена формально теоретико-множественной конструкцией

$$\tilde{\nu} = F(\tilde{x}, \tilde{y}, \cdots, \tilde{z}) \equiv \{f(x, y, \cdots, z) | x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}, \cdots, z \in \tilde{z}\}, \quad (1)$$

здесь и ниже обозначено

$$\tilde{x} = [x_1, x_2], \tilde{y} = [y_1, y_2], \tilde{z} = [z_1, z_2], \tilde{\nu} = [\nu_1, \nu_2].$$

Используя общее определение (1), можно ввести конкретные интервальные алгебраические функции: сложение и вычитание:

$$\tilde{\nu} = \tilde{x} \pm \tilde{y} = \{(x \pm y)|x \in \tilde{x}, y| \in \tilde{y}\}, \tag{2}$$

умножение переменной на постоянную и умножение переменных

$$\tilde{\nu} = k\tilde{x} = \{kx|x \in \tilde{x}, k = const\}, \tilde{\nu} = \tilde{x}\tilde{y} = \{xy|x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\}, \tag{3}$$

деление переменных

$$\tilde{\nu} = \tilde{x}/\tilde{y} = \{(x/y)|x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\}, \tag{4}$$

возведение в степень

$$\tilde{\nu} = \tilde{x}^n = \{x^n|x \in \tilde{x}\} \tag{5}$$

и т.д. Основной задачей в интервальной алгебре является вычисление произвольной заданной интервальной функции, т.е. нахождение интервальных значений $\tilde{\nu}$интервальных функций F вида (1) по данным интервальным значениям $\tilde{x}, \tilde{y}, \cdots, \tilde{z}$ аргументов этих функций. Но произвольная интервальная функция может быть представлена в виде суперпозиции некоторых элементарных интервальных функций вида (2)–(5). Поэтому решение задачи вычисления произвольной интервальной функции всегда сводимо к вычислению элементарных интервальных функций, выполняемому по соответствующим простым правилам. Эти правила для элементарных алгебраических функций таковы.

$$[x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2], [x_1, x_2] - [y_1, y_2] = [x_1 - y_2, x_2 - y_1], \tag{6}$$

$$k[x_1, x_2] = \begin{cases} [kx_1, kx_2], k \geq 0, \\ [kx_2, kx_1], k < 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$[x_1, x_2] \cdot [y_1, y_2] = [i, jmin(x_i y_j), i, jmax(x_i y_j)], \tag{8}$$

$$[x_1, x_2]/[y_1, y_2] = [x_1, x_2] \cdot [1/y_2, 1/y_1]. \tag{9}$$

Множество всех интервальных чисел совместно с определенными на нем элементарными операциями (функциями) (2)–(5) образует алгебру интервальных чисел. Эта алгебра частично похожа на известную алгебру вещественных чисел A, поскольку в ней выполняются законы, аналогичные соответствующим в A :

$$\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{y} + \tilde{x},\ \tilde{x} \cdot \tilde{y} = \tilde{y} \cdot \tilde{x} \text{ (коммутативность)}, \tag{10}$$

$$(\tilde{x} + \tilde{y}) + \tilde{z} = \tilde{x} + (\tilde{y} + \tilde{z}), (\tilde{x} \cdot \tilde{y}) \cdot \tilde{z} = \tilde{x} \cdot (\tilde{y} \cdot \tilde{z}) \text{ (ассоциативность)}, \tag{11}$$

$$\tilde{x} + \tilde{0} = \tilde{0} + \tilde{x} = \tilde{x} \ (\tilde{0} = [0, 0]\text{- единственный нейтральный элемент сложения}), \tag{12}$$

$$\tilde{x} \cdot \tilde{1} = \tilde{1} \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \ (\tilde{1} = [1, 1]\text{- единственный нейтральный элемент умножения}), \tag{13}$$

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \tilde{0} \text{ влечет } \tilde{x} = \tilde{0} \text{ или } \tilde{y} = \tilde{0} \text{ и обратно}, \tag{14}$$

$k(\tilde{x} + \tilde{y}) = k \cdot \tilde{x} + k \cdot \tilde{y}$(дистрибути вность умножения на вещественное число k относитель но сложения интервальных чисел). (15)