ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В.И Левин., Е.А Немкова

Пензенская государственная технологическая академия, Россия

Большинство современных задач оптимизации систем, в том числе экономических, решается в предположении детерминированных параметров оптимизируемой системы. Однако на практике крупномасштабные системы в экономике имеют, как правило, недетерминированные параметры. Оптимизация таких систем выдвигает новые трудные проблемы: сравнение недетерминированных величин, обобщение понятия оптимума на недетерминированный случай, выяснение условий существования оптимума, конструирование алгоритмов его отыскания.

В докладе дан обзор некоторых работ в данной области. Изучается наиболее простой и естественный случай, когда недетерминированность системы выражается в том, что ее параметры задаются с точностью до интервалов своих возможных значений. Интервальные оценки параметров обычно находятся либо экспертным путем, либо с помощью приближенных вычислений или измерений.

Общая задача оптимизации систем в интервальной постановке такова. Задана некоторая функция

$$y = f(\tilde{a}, x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \cdots, x_n)$ – вектор аргументов, $x_i \in X, i = 1, \cdots, n$, X – числовое множество, $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n)$ – вектор интервальных параметров, т.е. параметры $\tilde{a}_i$ представляют собой замкнутые интервалы $\tilde{a}_i = [a_{i1}, a_{i2}]$, в которых находятся все возможные значения параметров. Каждому значению $x, x \in X$, в соответствии с (1), соответствует одно значение функции в виде некоторого интервала $\tilde{y} = f(\tilde{a}, x)$. Необходимо найти значение $x^*, x^* \in X$, для которого соответствующее значение функции $\tilde{y} = f(\tilde{a}, x^*)$ экстремально (максимально или минимально). Мы ограничимся задачами дискретной оптимиз ации, в которых множество X дискретно.

Для решения задачи необходимо уметь сравнивать величины интервалов и выделять экстремальные интервалы. Сначала введем детерминированные операции непрерывной логики:$\vee$ =max (дизъюнкция), $\wedge$ =min (конъюнкция) и далее – соответствующие недетерминированные (в частности, интервальные) операции этой логики:

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \left\{a \vee b | a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\right\}, \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \left\{a \wedge b | a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\right\}, \tag{2}$$

где $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ – любые числовые множества (в частности, интервалы). Как видно из выражений (2), дизъюнкция (конъюнкция) двух числовых множеств определяется как множество возможных значений дизъюнкции (конъюнкции) двух чисел в условиях, когда эти числа пробегают независимо друг от друга все возможные значения внутри соответствующих интервалов.

Введем теперь отношение неравенства интервалов в виде следующей эквивалентности:

$$(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}, \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}), \tag{3}$$

Два интервала $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, такие, что $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ или $\tilde{b} \geq \tilde{a}$, называются сравнимыми по отношению $\geq$, другие $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ называются несравнимыми по этому отношению. В системе интервалов $\tilde{a}_k, k = 1, \cdots, n$ интервал $\tilde{a}_i$ максимален (минимален), если он сравним с интервалами $\tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_k$ по отношению $\geq$ и $\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_k (\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_k)$. В работе [1] были получены следующие важные результаты.

Теорема 1. Для того чтобы интервалы $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ являлись сравнимыми в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ (несравнимыми в этом отношении), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $(a_1 \geq b_1, a_2 \geq b_2)$ (выполнялись условия $(a_1 < b_1, a_2 > b_2)$ или $(b_1 < a_1, b_2 > a_2)$).

Теорема 2. Для того чтобы в системе интервалов $\tilde{a}_k = [a_{k1}, a_{k2}], k = 1, \cdots, n$ интервал $\tilde{a}_1$ был максимальным, необходимо и достаточно выполнения условий $a_{11} = \vee_{k=1}^{n} a_{k1}, a_{12} =$

$\vee_{k=1}^{n} a_{k2}$, а для того чтобы $\tilde{a}_1$ был минимальным, выполнения условий $a_{11} = \wedge_{k=1}^{n} a_{k1}, a_{12} = \wedge_{k=1}^{n} a_{k2}$.

Результаты теоремы 1 позволяют определять возможность сравнения интервалов, сравнивать их, распространять на них понятие оптимума и выяснять условие существования такого оптимума. Результаты теоремы 2 позволяют строить алгоритмы выделения экстремальных интервалов, сводя их к алгоритмам выделения экстремальных точечных величин.

Полученные результаты позволяют сводить интервальные оптимизационные задачи к детерминированным задачам, что и составляет основу для решения интервальных задач.

В качестве примера изложенного подхода рассмотрим задачу о назначениях. Интервальная задача о назначениях на должности состоит в распределении nдолжностей между n претендентами так, чтобы минимизировать суммарные издержки по работе. Издержки от каждого претендента на каждой должности задаются с точностью до интервала. Математически эта задача состоит в нахождении булевой матрицы назначений $X = \|x_{ij}\|$, обращающей в минимум сумму издержек $\sum_i \sum_j \tilde{a}_{ij} x_{ij}$, где $\tilde{A} = \|tildea_{ij}\|$ – заданная матрица издержек, ее элементы $\tilde{a}_{ij}$ – издержки от деятельности i-го претендента в j-й должности. При этом величины $\tilde{a}_{ij}$ являются интервальными, вида отрезков $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij1}, a_{ij2}]$, в которых рассеяны значения издержек $\tilde{a}_{ij}$. Соответственно $\tilde{A}$ оказывается интервальной матрицей вида $\tilde{A} = [A_1, A_2]$, в которой $A_1 = \|a_{ij1}\|, A_2 = \|a_{ij2}\|$. Искомая матрица X должна удовлетворять обычным условиям нормировки $\sum_i x_{ij} = 1, j = 1, \cdots, n, \sum_j x_{ij} = 1, i = 1, \cdots, n$.

Задача о назначениях является простейшей моделью оптимального выбора назначений на должности. При этом $x_{ij} = 1$ означает выбор i-го претендента для j-й должности (чему соответствуют издержки $\tilde{a}_{ij}$). Для решения этой задачи необходимо сравнение интервальных величин. Последнее выполняется согласно изложенному выше (теоремы 1 и 2). При этом получаем следующие результаты [2].

Теорема 3. Для того чтобы интервальная задача о назначениях на должности с матрицей издержек $\tilde{A} = [A_1, A_2]$ имела решение $X = \|x_{ij}\|$, необходимо и достаточно, чтобы это же решение имели две детерминированные задачи о назначениях, с матрицами издержек A_1 и A_2.

Теорема 4. Множество всех решений интервальной задачи о назначениях на должности с матрицей издержек $\tilde{A} = [A_1, A_2]$ равно пересечению множеств решений двух соответствующих детерминированных задач о назначениях с матрицами издержек A_1 и A_2.

Теоремы 3, 4 сводят решение интервальной задачи о назначениях на должности к решению двух детерминированных задач о назначениях, которые естественно назвать нижней и верхней граничными задачами; их матрицы издержек равны соответственно A_1 и A_2.

Из изложенных выше результатов вытекает следующий алгоритм решения ин- тервальной задачи назначения на должности, с интервальной матрицей издержек $\tilde{A} = [A_1, A_2]$.

Шаг 1. Отыскание каким-либо способом множества решений M_H нижней граничной задачи, т.е. детерминированной задачи о назначениях с матрицей A_1. Для этого можно использовать метод ветвей и границ (он позволяет при небольшом числе должностей n быстро и просто получить решение), метод, основанный на вычислении логических определителей (позволяет при небольших n получать решение и анализировать его при варьировании элементов матрицы A_1), венгерский метод (дает возможность находить решение при больших значениях n), метод случайного поиска (позволяет быстро найти приближенное решение).

Шаг 2. Отыскание, с использованием тех же методов, что и на шаге 1, множества решений M_B верхней граничной задачи, т.е. детерминированной задачи о назначениях с матрицей издержек A_2.

Шаг 3. Нахождение пересечения M множеств M_B и M_H. Для этого перебираются элементы одного множества и помечаются те из них, которые входят и во второе множество. Если $M \neq \oslash$ (непустое множество), то любая булева матрица назначений X_k из M есть решение данной интервальной задачи о назначениях на должности. Если же $M = \oslash$ (пустое множество), то данная задача не имеет решения.