

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ РЕСУРСОВ

Ирина Колесник

Винницкий национальный технический университет, Украина

Аннотация

Задачи оптимального распределения ресурсов были и остаются актуальными для самых различных организационно-производственных систем. В этой области получены фундаментальные решения – исчерпывающие и эффективные для выбранных авторами моделей. В данной работе предлагаются новые подходы и обобщения для распределения ресурсов в стохастических системах, где цели и средства не являются детерминированными. Предлагается композитная модель, элементы которой – самостоятельные модели для решения задач анализа и синтеза, рассматривается и ключевые составляющие для более полной и эффективной модели. В работе вероятностные задачи рассматриваются как задачи оптимального распределения ресурсов между элементами стохастической системы.

Введение

Десятилетиями из учебника в учебник по теории вероятностей кочуют задачи класса « N охотников стреляют по M зайцам». В последние годы эта задача актуализирована в задачниках как: « N ракетных установок стреляют по M воздушным целям». Задача такого класса может быть концептуальной основой для построения моделей оптимизации и планирования процессов функционирования, больших и сложных систем, если удастся найти эффективные подходы к решению. Два примера: – корпорация Майкрософт впервые в своей истории закончила квартал с убытками; – корпорация Google, будучи в целом прибыльной, тем не менее, закрыла около двадцати своих инновационных интернет-продуктов. Причины: – у Майкрософт причины известны на уровне гипотез и спекуляций; – у Google разработанные продукты не заинтересовали потребителей (стрельба мимо цели). В этих двух примерах главный фактор – стохастичность процессов. Общее – эти молодые, инновационные корпорации сегодня не имеют математических инструментов для прогнозирования и оптимального распределения ресурсов между проектами и направлениями деятельности. Сегодня главная инновация в Google: по территории центра сотрудники перемещаются на велосипедах.

Обозначим этот класс целенаправленных систем как «ОЗ». Задачи подобного рода постоянно возникают в организациях всех уровней – от «дизайнера софта» до программ устойчивого развития и региональной интеграции. Это выбор проектов и ресурсов для этих проектов, согласование проектов в условиях многих и разнородных неопределённостей.

Анализ литературы

На сегодня накоплено большое количество фундаментальных и новаторских работ по принятию решений в условиях неопределённостей. Общее в этих работах в том, что реальность почти всегда выходит за пределы предлагаемых моделей и методов. Полноценный анализ тенденций – для монографий. В рамках небольшой статьи выбираем типовые и близкие по методологии монографии.

Особенность монографий Р. Беллмана [1 – 3] – содержательный анализ литературы по главам монографии, критическая оценка своих результатов («получим красивый, но малополезный результат»), разнообразные подходы к разбиению сложной задачи в последовательность простых. Интересна данная им классификация неопределённостей – от «известно распределение вероятностей» до «потребные данные существуют, но нет времени и средств получить её». В данной статье система моделей строится именно на основе классификации неопределённостей [3].

Другой пример взят из «науки учебников» [4]. Там последовательно рассматриваются теория выбора альтернатив: бинарные отношения, функции выбора, декомпозиция функций выбора; процедуры и алгоритмы принятия решений: экспертные процедуры принятия решений, формирование множества альтернатив и задачи выбора, вероятностные характеристики и функции полезности; многокритериальные задачи. Существенная часть монографии – примеры приложения теории к практическим задачам.

Конкретной основой для данной работы были статьи [5, 6], где исходная детерминированная задача оптимального распределения ресурсов в пространстве (между элементами системы) и времени (между этапами функционирования системы) модифицируется для учёта неопределённостей. В данной работе выполнена формализация задач распределения ресурсов в стохастических системах, строится компонентная классификация задач, представлен пример – анализ и построение рабочей модели базовой задачи. Отличие от многочисленных аналогов – применение формальной модели метода оптимального агрегирования [7].

Формализация целенаправленных систем со стохастическими элементами Рассматриваем системы, состоящие из двух множеств элементов: M «целей» (проектов, программ, задач и др.) и N «прои-

зводственных элементов» (проектно-конструкторских организаций, сложных автоматических систем). Для целей предполагается возможность конструктивного описания конечного состояния и задания шкалы измерения степени достижения цели. Цели могут быть детерминированными и априорно неопределёнными, уточняемыми в процессе достижения цели (программные продукты, терминальные устройства).

Для «производственных элементов = (далее – «элементов») предполагается заданной «стохастическая функция производства» (СФП) – зависимость вероятности или степени достижения цели в зависимости от затрат ресурсов на достижение цели. Можно определить симметричную систему, когда цель одновременно является активным элементом. Пример такой системы – уравнения Ланчестера для процессов конкурентной борьбы или военных конфликтов. Результаты данной статьи базируются на технологиях конструирования моделей в средах компьютерных алгебраических систем. Все эффективные математические пакеты, по сути, являются компьютеризованными системами.

Постановка проблемы Постановка и решение задач оптимального распределения ресурсов в стохастических системах на базе методологии оптимального агрегирования.

Постановка задачи Разработка рабочих моделей оптимизации задач распределения ресурсов при стохастических характеристиках производственных элементов и целей (проектов).

Формализация задачи По двум естественным причинам в основу модели систем ОЗ положим стохастические зависимости "затраты - выпуск". При условии нестрогой монотонности для усреднённых зависимостей возможно к ним применить подход на базе оптимального агрегирования [7]. При этом возникает проблема интерпретации и измерения: что считать ресурсами и затратами ресурсов, что – элементами целенаправленной системы и что – продуктами (эффектами, целевыми результатами функционирования).

Причины выбора: - наличие эффективного метода оптимизации с комплексом решений – рабочих моделей; - естественность ресурсного подхода для экологических, технических и техно-экологических систем. Сделанный выбор порождает проблему конструирования модели ОЗ:

- подогнать реальную систему под некоторую общепризнанную, привычную модель, или
- модифицировать, адаптировать, обобщить некоторую эффективную модель для адекватного отображения свойств реальной системы.

Выбираем последнюю альтернативу в первую очередь, потому, что она реализуема с высокой вероятностью: уже выполнено несколько успешных модификаций метода оптимального агрегирования. Формируем обобщённую модель систем класса ОЗ, затем, сужая области определения параметров (например, вероятности достижения всех целей одинаковы, веса всех целей одинаковы и т.п.), строим классификацию задач по признаку порождения: следующая задача может быть решена на базе предыдущей. Назовём такую систему моделей композитной [5-7]. Выполним их описание обобщённой модели.

Цель (проект) $T_j, j = 1 \dots M$ - описание проекта, Tw_j - "вес" проекта, $\{Tint_{k,l}\}$ - взаимовлияние проектов: выполнение некоторого проекта делает возможным или ненужным выполнение другого проекта.

Рабочий элемент $P_{S_i}, i = 1 \dots M, p_{i,j}$ - вероятность достижения цели $D(\sigma)_{i,j}$ - распределение вероятностей степени достижения элементом i цели j .

Ресурсы Рассматриваем два уровня ресурсов: - элементы системы, которые распределяются, назначаются для достижения определённых целей: - ресурсы необходимые для функционирования элементов. Такой подход обусловлен тем, что в первом случае имеем задачу с дискретным (квантованным) управлением, во втором - с кусочно-непрерывным (затраты энергии, материальных компонентов могут быть импульсными и непрерывными).

Функция "производства"

$f_{mean}(x_i)_i$ - зависимость вероятности достижения цели элементом i от ресурсов затраченных элементом. Если степень достижения цели может принимать значения в интервале $(0,1)$ и задано распределение вероятностей, то ФП может определяться в первом приближении как зависимость среднего и втором - как зависимость функции распределения от затрат ресурса. В неформальном плане это предполагает возможность и способность разработчика идентифицировать порождающие механизмы для распределения вероятностей.

Система рабочих элементов множество элементов $\{P_{S_i}, i = 1 \dots M\}$, возможно, с иерархической структурой. Система целей - множество целей и связи между целями (задано выше) и приоритетами. Цели можно упорядочить по весам, приоритетам и степени влияния на другие цели.

Переменные управления - вектор распределения ресурсов (уровень 1) по целям; - вектор распределения затрат ресурсов (уровень 2) по целям.

Целевая функция (критерий) - математическое ожидание от случайной величины «сумма весов достигнутых целей». В имитационных моделях математическое ожидание заменяется выборочным средним.

$$J = \sum_{i=1}^M Tw_j \cdot \sigma_j \quad (1)$$

Естественно, такой критерий дополнить средними отклонениями. Для некоторых классов стохастических систем в качестве критерия выбирают "пессимистическое значение" Ограничения: суммарные затраты ресурсов уровня 2 Цель системы - максимизация критерия (1) Классификация задач оптимального распределения ресурсов в стохастических системах. На основании приведенного описания строим систему частных моделей (рис. 1).

В схеме каждому блоку на схеме рис.1 соответствует рабочая модель - реализованная в среде пакета для моделирования. На схеме представлены только те модели, которые представляют интерес для теории и практики. Модели нижнего уровня используются в моделях верхнего уровня как базы для модификации или как подпрограммы.

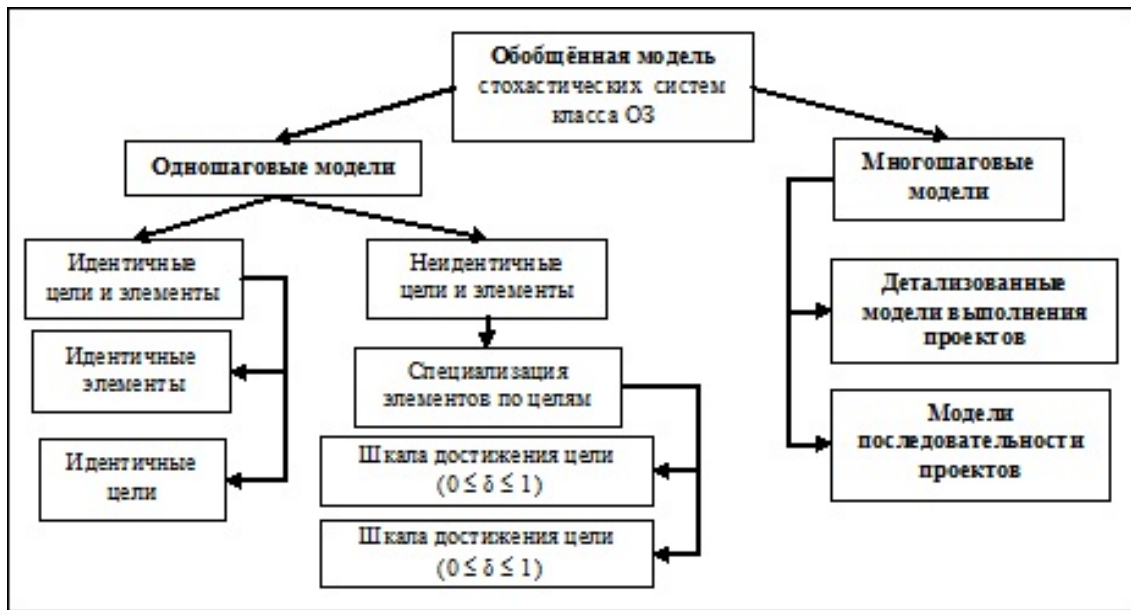


Рисунок 1 – Система частных моделей для стохастических систем

Разработка базовых моделей Документация по рабочим моделям выходит за пределы объёма статьи. Представим пример, суть которого: «от технологии реализации моделей к методологии конструирования моделей». Компьютер не технический элемент в формуле: «модель, алгоритм, программа», а инструмент, позволяющий создавать модели как виртуальную реальность по схеме: «простейшая модель генерирует информацию для создания более изощрённой и точной модели. В определённый момент такого итеративного процесса становится возможным «подогнать» модель к реальному объекту или построить реальный объект согласно виртуальной реальности. В таких процессах успех зависит от базовой модели и технологии конструирования модели.

По причинам конфиденциальности, трудно привести пример успешных систем управления развитием и разработками. Самыми открытыми системами на сегодня являются вооружения. Приведем цитату из информационной таблички с выставки вооружений:

«Тульское КБ приборостроения впервые показало известный высокоточный ракетный комплекс в принципиально новом исполнении. На автомобиле "Тигр" смонтированы две пусковые установки с интегрированными управляющими системами и автоматическим сопровождением целей. Установки могут стрелять или по двум различным целям или дуэтом по одной, особо опасной. Впервые противотанковый управляемый снаряд, оказался способен поражать воздушные цели, все типы бронетанковых целей, а также беспилотники, вертолеты и штурмовики». Заметим, что в стратегические системы ПВО заложено гораздо больше интеллекта.

Обобщим типовые задачи анализа систем случайных событий, например: «Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность промаха для первого стрелка равна 0,2, для второго 0,15. На обоих было выдано 7 патронов...». Очевидно, что такие задачи – частные случаи общей задачи:

«N стрелков стреляют по M целям с вероятностными результатами...». Сначала конструктивно исследуем задачу «три стрелка, одна цель». Решим теперь эти задачи в среде математического пакета. Сделаем

имитатор события со случайным исходом: На рис. 2 представлен пример рабочей модели для частной задачи. События представлены двумя функциями пользователя, из них строится программа имитации. В нижней части рис. 2 представлены примеры результатов моделирования, Главное назначение таких модулей – не обучение, а контроль и лучшее понимание модели разработчиком.

Параметризация распределения вероятностей Следующий принципиальный шаг в разработке рабочих моделей – параметризация. Решения определённых задач определяем как функции соответствующих переменных и параметров. После этого мы можем работать с этими функциями как с функциями логарифм и синус - использовать их свойства для решения задач. Следует помнить, что этим функциям соответствуют программы вычисления (кто сегодня помнит «таблицы логарифмов»). На рис. 3 представлен демо-модуль для параметризации полной группы событий задачи «три стрелка стреляют по одной цели и попадают с заданными вероятностями».

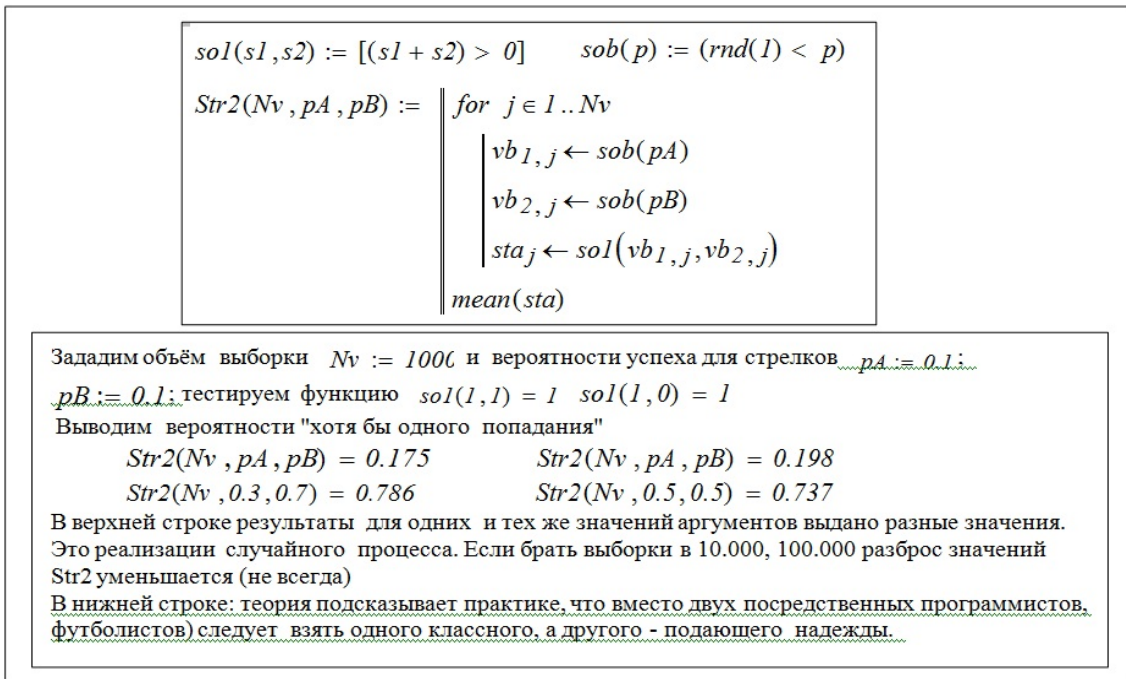


Рисунок 2 – Рабочая модель для частной задачи «пара случайных событий»

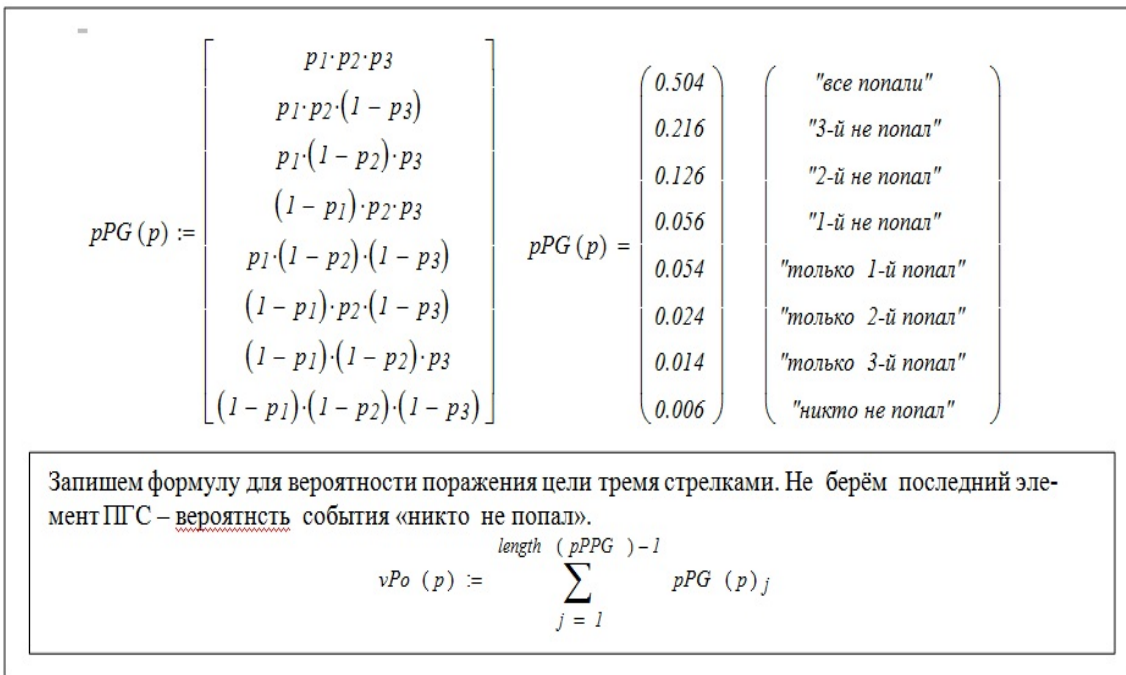


Рисунок 3 – Параметризация модели для частной задачи «три случайных события»

Выполним несколько экспериментов на параметризованной модели.

Первый эксперимент влияние среднего уровня стрелков на вероятностях "успехов". Оформляем всё в стандарте "what if analysis": берём некоторый набор вероятностей успеха для стрелков и разброс значений (на 5% лучше и на 10% хуже). Выводим средние значения "меткости" и вероятности успеха команды стрелков. На рис. 4 представлены результаты моделирования команд «метких стрелков» и «посредственных стрелков».

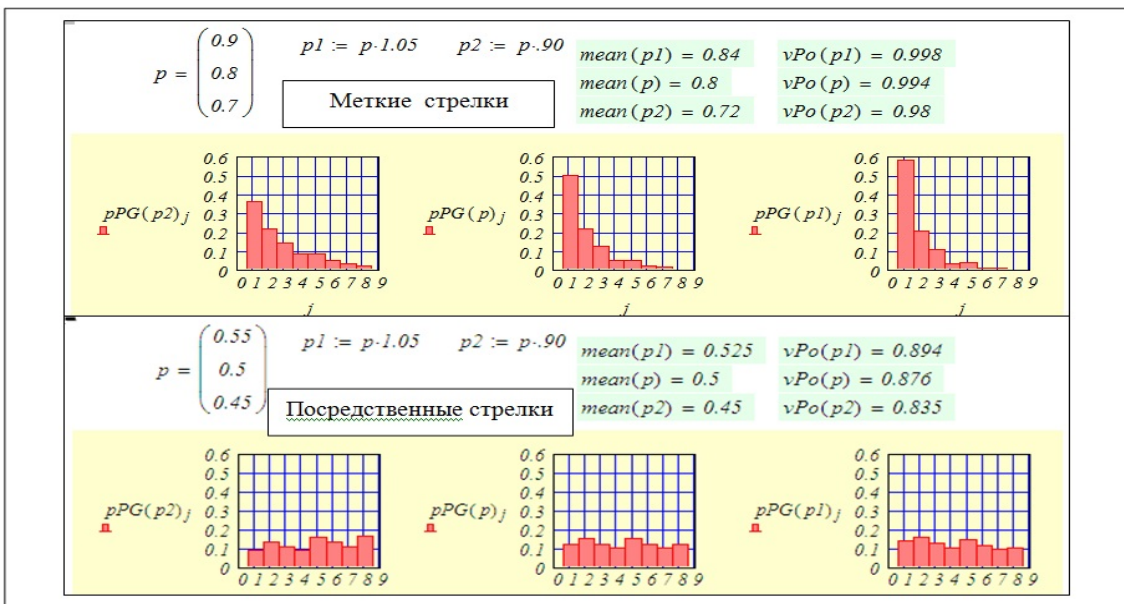


Рисунок 4 – Вычислительный эксперимент «влияние среднего уровня на полную группу событий»

Второй эксперимент: как при неизменном среднем уровне стрелков сказывается неравенство их меткости (квалификации). Можем видеть, что лучше: группа «средняков», или один лидер - "застрельщик" и новички (а это уже психология и социология в малых группах). Снова берём три набора вероятностей с неизменным средним - номинал и отклонения "вправо" и "влево".

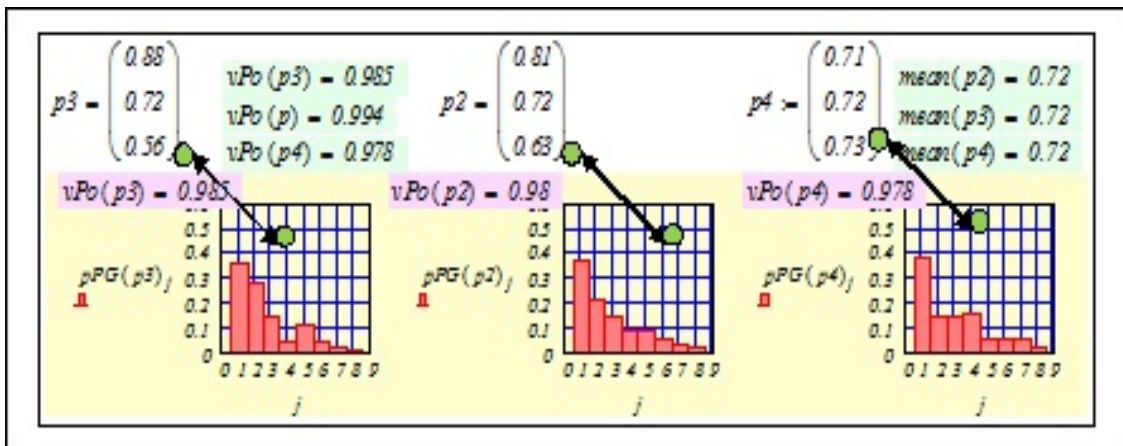


Рисунок 5 – Вычислительный эксперимент «влияние неравенства на полную группу событий»

Аналогично можно исследовать влияние неравенства в группах с меткостью ниже средней.

Сделаем модуль для имитации процесса стрельбы для трёх стрелков.

Первое назначение модуля – контроль и лучшее понимание элементарных моделей процессов, из которых потом собирается сложная модель.

Второе назначение - статистические исследования на виртуальной статистике.

Третье и главное - возможность решать подобные задачи для более сложных моделей - с нестационарными процессами, нелинейными связями.

Используем функцию-имитатор случайного события с двумя исходами используем в модуле имитаторе Str3(объём выборки, вектор вероятностей попадания).

$$sob(p) := (rnd(1) < p) \quad Str3(Nv, p3) := \text{for } j \in 1..Nv \left\{ \begin{array}{l} vb_{1,j} \leftarrow sob(p3_1) \\ vb_{2,j} \leftarrow sob(p3_2) \\ vb_{3,j} \leftarrow sob(p3_3) \\ vb \end{array} \right.$$

Программа возвращает массив, каждый столбец которого - результат случайного события "триплет". Вероятности попадания для стрелков представлены вектором в списке параметров функции Str3().

$$Str3 \left[20, \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix} \right] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$ByBy := Str3 \left[2000, \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix} \right]^T \quad j := 1..3 \quad pt_j := \text{mean}(ByBy^{(j)}) \quad pt = \begin{pmatrix} 0.902 \\ 0.524 \\ 0.104 \end{pmatrix}$$

Выше представлен пример результатов моделирования: выборка ВуВу в 2000 «залпов», средние для каждого стрелка, получили довольно близкие оценки вероятностей попадания для каждого стрелка. Обобщения этого модуля используются в системе моделей стохастических процессов (рис.1).

Выводы Современные информационные и технические системы – динамичный комплекс из тесно связанных компонентов. Элементы систем и связи между ними часто имеют стохастический характер. В инновационном развитии стохастичность - не случайное возмущение от детерминированного процесса, а случайный процесс, порождающий устойчивые статистические закономерности. Вопросы оптимизации эффективности стохастических систем как технологических преобразователей «ресурса» в «продукт» актуальны в связи с инновационным характером развития. Для одного класса целеориентированных стохастических систем построена и реализована система моделей для анализа и оптимизации процессов на базе методологии оптимального агрегирования, малочувствительная к размерности систем.

Список использованных источников:

1. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории управления. — М.: Издат. иностр. литер., 1962. — 233 с.
2. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. — М.: «Наука», 1964. — 200 с.
3. Беллман, Энджел (Angel E.) Динамическое программирование и уравнения в частных производных. — 1974
4. Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А., Соколов В.Б. Теория выбора и принятия решений. Учебное пособие. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 328 с.
5. Боровська Т.М., Колесник І.С., Северілов В.А. Нечітка оптимізація розподілу обмеженого ресурсу у виробничій системі при неопуклих виробничих функціях елементів // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2003. — № 5. — С.36-41.
6. Колесник І.С. Моделі і методи для аналізу і оптимізації інвестиційних проектів / Колесник І.С., Боровська Т.М., Северілов В.А. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2004. — № 4. — С. 56-61.
7. Боровська Т. М. Метод оптимального агрегування в оптимізаційних задачах: монографія / Т. М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов. — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. — 229 с. — ISBN 978-966-641-285-3