УДК 622.693.23

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМОВАНИЯ ДЕКОРАТИВНЫХ БЕТОННЫХ БЛОЧКОВ: I МЕТОД МАТРИЦЫ ГРИНА В АНА ЛИЗЕ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ, ХАРАКТЕРИЗУЕМОЙ МОДЕЛЬЮ МАКСВЕЛЛА

Г.С. Ратушняк, Н.М. Слободян

Винницкий государственный политехнический университет

Вивчається плоска задача про розрахунок в'язкопружних напружень у нескінченому циліндричному однородному ізотропному тілі (моделі декоративного бетонного блочку). За допомогою перетворень Лапласа та Фур'є побудований фундаментальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у переміщеннях. У квазістатичному наближенні фундаментальний розв'язок (матриця Гріна) отриманий для будь-яких значень часу t.

Изучается плоская задача о расчёте вязкоупругих напряжений в бесконечном цилиндрическом однородном изотропном теле. С помощью преобразований Лапласа и Фурье построено фундаментальное решение системы дифференциальных уравнений в смещениях. В квазистатическом приближении фундаментальное решение (матрица Грина) получено для любых значений времени t.

The plane problem of calculation of viscoelastic stresses at the infinite cylindrical heterogeneous isotropic body is discussed. One may use Laplace and Fourier transformations to get the fundamental solution of the system of differential equations for displacements. The fundamental solution (Green's matrix) for the various values of time t at the quasistatic approach is obtained.

В процессах формования бетонных блочков возникает необходимость определения линии прогибов эластичного пригруза, которая бы обеспечила ровную поверхность декоративного блочка [1], что в конечном счёте скажется и на его качестве. Для решения такой задачи следует найти матрицу Грина соответствующего дифференциального уравнения в частных производных по пространственным и временной координатам, описывающего динамику вязкоупругой среды (формуемого бетона) в рамках модели Максвелла. Подобная задача для расчёта термоупругих напряжений и деформаций рассмотрена в [5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую плоскую задачу. Цилиндрическое тело бесконечной длины при $t \geq 0$ подвергается воздействию внешнего поля $F = F(x_1, x_2, t)$, которое считается заданным, причём $F(x_1, x_2 0) = 0$. Требуется рассчитать возникающие в теле (бетонном декоративном блочке, например, цилиндрической формы) напряжения и деформации. В начальный момент $t = 0$ по всему объёму тела смещения и скорости считаем равными нулю (вопрос о краевых условиях будет обсуждаться ниже). Тело предполагается состоящим из однородного изотропного вязкоупругого материала, свойства которого могут быть описаны моделью Максвелла. Известно [2], что среда Максвелла описывается системой уравнений:

$$\varepsilon = \frac{1-2\mu}{2G \cdot (1+\mu)} \cdot \sigma, \tag{1}$$

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \frac{S_{ij}}{\tau_0} = 2G \cdot \frac{\partial l_{ij}}{\partial t}, \tag{2}$$

где G и μ - соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона; τ_0 время релаксации среды; $\sigma = \frac{1}{3} \cdot \sum_i \sigma_{ii}$; $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_{ii}$; S_{ij} и l_{ij} — девиаторы напряжений и деформаций соответственно. (Процесс формования бетона в области установившейся по своим физико-механическим параметрам среды может быть удовлетворительно описан именно в рамках модели среды Максвелла [6,7]). Из соотношений (1) и (2) находим уравнения, которым должны удовлетворять компоненты σ_{ij} тензора напряжений в рассматриваемой вязкоупругой среде:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\sigma_{ij}}{\tau_0} = 2G \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \left(\frac{3\mu}{\mu+1} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\sigma}{\tau_0} \right) \cdot \delta_{ij}, \tag{3}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

2. Математическая модель и решение. Пользуясь уравнением движения среды

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{4}$$

где ρ — плотность среды, u_i — компонента смещения, t — время, и учитывая, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

после исключения из уравнений (1), (3) и (4) величин σ_{ij} и σ приходим к уравнению относительно вектора смещения $\vec{u}(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \vec{u}) + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2 \cdot \frac{1+\mu}{3\tau_0} \right) grad\ div\vec{u} - \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_0} \right) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

Вводя оператор

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} \Delta + \frac{1}{1-2\mu} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2 \cdot \frac{1+\mu}{3\tau_0} \right) grad\ div - \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_0} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

уравнение (5) запишем в виде

$$L[\vec{u}(\vec{x}, t)] = 0. \quad (6)$$

С учетом того, что плита (декоративный бетонный блочок) находится под воздействием внешней распределённой нагрузки $q(x_1, x_2, t)$, имеет цилиндрическую жёсткость $D = \frac{Eh^3}{12}\left(1 - \mu^2\right)$, где h – её толщина, E – модуль упругости материала плиты, а S – площадь её поверхности, уравнение, описывающее вынужденные колебания этого объекта исследования, имеет следующий вид:

$$L[\vec{u}(\vec{x}, t)] = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad (7)$$

где $\vec{f}(\vec{x}, t) = 2 \cdot \frac{1+\mu}{1-2\mu} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_0} \right) \cdot \frac{qS}{D}$ – известная функция.

Частное решение уравнения (7) можно представить в виде:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ik}(\vec{x} - \vec{y}; t - \tau) f_k(\vec{y}, \tau) dy_1 dy_2, \quad (8)$$

где (H_{ik}) – матрица Грина (фундаментальное решение) уравнения (7). Компоненты H_{ik} удовлетворяют системе уравнений

$$L[H_{ik}(\vec{x} - \vec{y}; t - \tau)] = \delta_{ik} \cdot \delta(\vec{x} - \vec{y}) \cdot \delta(t - \tau), \quad i, k = 1,2. \quad (9)$$

Здесь, в (9) $\delta(z)$ – дельта-функция z Дирака.

Применяя к уравнениям (9) преобразования Лапласа по t и Фурье по од-ной из координат, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, из которых нетрудно получить дифференциальные уравнения 4-го порядка для Фурье-Лаплас -образов каждой из компонент H_{ik}. Далее находим частное решение каждого из этих уравнений [3], регулярное на бесконечности. В общем случае нахождение точных выражений оригиналов H_{ik} весьма затруднительно [4].

В большинстве практических задач формования бетонных декоративных блочков инерционные эффекты не играют заметной роли [2] (поскольку формуемые массы невелики). Это означает, что в уравнении (5) можно опустить члены, содержащие вторую и третью производные по времени, т.е. в квазистатическом случае для фундаментального решения (при всех $t > 0$) имеем следующие выражения:

$$H_{11}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)=\frac{1}{4\pi}\{\frac{\xi_2{}^2}{r^2}\left[1-\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot\exp[-c(t-\tau)]\right]+$$

$$+\left[1+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot\exp[-c(t-\tau)]\right]\cdot\ln r\}$$

$$H_{12}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)=H_{21}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)=-\frac{\xi_1\xi_2}{4\pi r^2}\cdot\{1-\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot$$

$$\cdot\exp[-c(t-\tau)]\}$$

$$H_{22}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)=\frac{1}{4\pi}\cdot\{\frac{\xi_2{}^2}{r^2}\cdot\left[\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot\exp[-c(t-\tau)]-1\right]+$$

$$+\left[1+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot\exp[-c(t-\tau)]\right]\cdot\ln r\}, \tag{10}$$

где $\xi_i = x_i - y_i, i=1,2; r^2=\xi_1{}^2+\xi_2{}^2; c=\dfrac{1+\mu}{3\tau_0(1-\mu)}$.

3. Краевые условия. В практически интересных случаях представляется целесообразным рассматривать два основных типа краевых условий:

А. На границе плоской области задаются значения вектора смещения $\vec{u}(\vec{x},t)$.

Б. На границе области заданы значения компонент тензора напряжений. Это равносильно тому, что на границе заданной функцией является некоторая линейная комбинация производных вектора $\vec{u}(\vec{x},t)$.

Для уравнения (5) или (7) можно получить соотношения, являющиеся обобщением известной формулы Грина для уравнения Лапласа. Это позволяет представить значение $\vec{u}(\vec{x},t)$ в произвольной точке $\vec{x}$ области в виде комбинации интегралов, содержащих полученное выше фундаментальное решение и значения функции $\vec{u}(\vec{x},t)$ и её производных на границе.

Таким образом, рассматриваемую задачу можно легко свести к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно некоторой функции $\vec{\mu}(\vec{x},t)$, аналогичной плотности потенциала двойного слоя (при условиях А) и потенциала простого слоя (при условиях Б), а затем решать численно на ЭВМ.

Цитированная литература

1. **Слободян Н. М.** Математична модель розрахунків прогинів еластичного привантаження під час формування декоративних бетонних блочків// Вісник Вінницького політехнічного інституту.– 2001.– №1.– С. 10-12.
2. **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения.– М.: Физматгиз, 1963.– 252 с.
3. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1976.– 576с.
4. **Бейтмен, Эрдейи.** Таблицы интегральных преобразований.– М.: Наука, 1969.– 344с.
5. **Белоносов С.М., Нещадим А.М., Редкобородый Ю.Н.** Фундаментальное решение системы дифференциальных уравнений динамики вязкоупругой среды, характеризуемой моделью Максвелла // Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.– С. 48-52.
6. **Овчинников П.Ф.** Виброреология.– К.: Наукова думка, 1983.– 272с.
7. **Сивко В.И.** Основы механики вибрируемой бетонной смеси.– К.: Вища школа, 1987.– 168с.