УДК 681.5:621.311.161

ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗАКОНУ КЕРУВАННЯ ПРИ ВСТАНОВЛЕННІ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ КЕРУВАЛЬНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ТА МАТРИЦЕЮ КРИТЕРІЇВ ПОДІБНОСТІ

Петро Лежнюк, Світлана Бевз, Станіслав Вишневський
(Україна, м.Вінниця)

Як відомо, одним з резервів, що дозволяє суттєво знизити рівень втрат в технічних системах та підвищити ефективність використання останніх є оптимізація процесу керування. Проте на вибір оптимального рішення впливає велика кількість факторів, які слід враховувати при проведенні аналізу процесів оптимального керування. Причому одні з них мають квантитативну оцінку для аналізу і розрахунку, а інші її не мають. Це створює невизначеність у виборі режиму роботи ЕС і обумовлює певний ризик неправильних або неоптимальних рішень при реалізації результатів розрахунку. Тому ще на стадії формування задачі оптимального керування важливо передбачити можливість отримання результатів у тій чи іншій формі, зручній для подальшої практичної реалізації. Серед об'єктивних і суб'єктивних причин досвіду експлуатації найбільш прийнятним виявляється підхід, що забезпечує доведення результатів розрахунку до закону оптимального керування [1]:

$$k_*(t) = 1 - \pi J_*(t) ,$$

де $k_*(t)$, $J_*(t)$ - відповідно відносні значення керувальних і контрольованих параметрів (за базисні прийнято оптимальні значення параметрів); π - матриця зворотного зв'язку (матриця критеріїв подібності).

Детермінація даного закону в критеріальній формі (відносних одиницях) здійснюється за рахунок методів теорії подібності. На цій основі висвітлюється необхідність встановлення зв'язку прямої задачі критеріального програмування (КП) з двоїстими змінними (критеріями π).

Сформулюємо задачу оптимального керування наступним чином:

$$y = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \to \min , \qquad (1)$$

за обмежень

$$g_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \le 1, \quad k = \overline{1,\ p}, \quad x_j > 0, \quad j = \overline{1,\ n}. \qquad (2)$$

Це так звана пряма задача КП. Нашим подальшим завданням є виявлення взаємозв'язку між показником ефективності y та критеріями подібності π_i без переходу до двоїстої задачі КП, який традиційно використовується [2].

Розглянемо оптимізаційну задачу нульової міри складності ($t = m - n - 1 = 0$) без обмежень.

Для отримання змінних параметрів x_j скористаємось визначенням критеріїв подібності згідно з методом інтегральних аналогів [3]:

$$a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} = \pi_i \cdot y_{\min}, \quad i = \overline{1,\ m_1}, \qquad (3)$$

де m_1 - кількість членів цільової функції.

Прологарифмувавши обидві частини рівнянь та виконавши нескладні перетворення, отримаємо:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \cdot \ln x_j - \ln y_{\min} = \ln\left(\frac{\pi_i}{a_i}\right), \quad i = \overline{1,\ m_1}, \qquad (4)$$

тобто в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} & -1 \\ \alpha_{12} & \dots & \alpha_{n2} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m_1} & \dots & \alpha_{nm_1} & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ln x_1 \\ \dots \\ \ln x_n \\ \ln y_{\min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(\pi_1/a_1) \\ \ln(\pi_2/a_2) \\ \dots \\ \ln\left(\pi_{m_1}/a_{m_1}\right) \end{bmatrix}$$

або $[\tilde{\alpha}] \times [\tilde{x}] = [\tilde{\pi}]$.

Залежності $x_j = f(\pi)$ та $y_{\min} = f(\pi)$ визначаються:

$$\begin{cases} x_j = \prod_{i=1}^{m_1} \left(\dfrac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{ji}}, \quad j = \overline{1,\ n}; & (5) \\ y_{\min} = \prod_{i=1}^{m_1} \left(\dfrac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{m_1 i}}, & (6) \end{cases}$$

де β_{ji} - елементи оберненої матриці $[\tilde{\alpha}]$.

Залежність $y = f(\pi)$ випливає із суми рівнянь (3):

$$y_{\min} = y_{\min}\sum_{i=1}^{m_1}\pi_i = \sum_{i=1}^{m_1}\pi_i \prod_{i=1}^{m_1}\left(\frac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{m_1 i}}, \qquad (7)$$

Умови екстремуму відповідають рівності нулю часткових похідних від функції $y(\pi)$ за критеріями подібності, тобто

$$\frac{\partial y}{\partial \pi_s} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{m_1}\pi_i}{\pi_s}\beta_{m_1 s} + 1\right] \times \prod_{j=1}^{m_1}\left(\frac{\pi_j}{a_j}\right)^{\beta_{m_1 j}} = 0 .$$

Оскільки

$$\prod_{j=1}^{m_1}\left(\frac{\pi_j}{a_j}\right)^{\beta_{m_1 j}} \neq 0 ,$$

то

$$\frac{\sum_{i=1}^{m_1}\pi_i}{\pi_s}\beta_{m_1 s} + 1 = 0 ; \quad \pi_s = -\beta_{m_1 s}\cdot\sum_{i=1}^{m_1}\pi_i .$$

Отже, при нормуванні критеріїв подібності до одиниці умова екстремуму функції (7) матиме вигляд

$$\pi_s = -\beta_{m_1 s} , \quad s = \overline{1,\ m_1} . \qquad (8)$$

Мінімум показника ефективності при сумі критеріїв подібності рівній одиниці репрезентується виразом:

$$y_{\min} = \prod_{j=1}^{m_1}\left(\frac{\pi_j}{a_j}\right)^{\beta_{m_1 j}} = \prod_{j=1}^{m_1}\left(\frac{a_j}{\pi_j}\right)^{\beta_{m_1 j}}$$

Як бачимо, залежність $y_{\min} = f(\pi)$ дуже схожа на двоїсту функцію $d = f(\pi)$ [5] за умови (8) , що випливає з подібності матриць $[\tilde{\alpha}]$ та $[\alpha]$ [5,6].

Нами проаналізований випадок стосовно канонічних функцій без обмежень. Проте більш поширеними, зокрема в енергетиці, є задачі з високою мірою складності $t = m - n - 1 > 0$ при наявності обмежень.

У цьому разі система (3) доповниться рівняннями:

$$a_r \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{jr}} = \frac{\pi_r}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i}, \quad k = \overline{1,\ p}, \quad r = \overline{m_1+1,\ m_{p+1}}\ .$$

З низки критеріїв подібності виділяють залежні та незалежні критерії. Тоді система (4) в матричній формі запишеться:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} & -1 & \ldots & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1m_1} & \alpha_{2m_1} & \ldots & \alpha_{nm_1} & -1 & \ldots & 0 \\ \alpha_{1,m_1+1} & \alpha_{2,m_1+1} & \ldots & \alpha_{n,m_1+1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \ldots & \alpha_{nm} & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln x_1 \\ \ldots \\ \ln x_n \\ \ln y_{\min} \\ \ln \pi_{m-t+1} \\ .. \\ \ln \pi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln \frac{\pi_1}{a_1} \\ \ldots \\ \ln \frac{\pi_{m_1}}{a_{m_1}} \\ \ldots \\ \ln \frac{\pi_{m-t}}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i} \\ \ldots \\ \ln \frac{1}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Зазначимо, що розмірність матриці $[\tilde{\alpha}]$ $[m \times m]$, а її $(m-t)$-ий стовпчик складається з “-1” (при відсутності обмежень в математичній моделі) або з m_1 “-1” та $m-n$ “0” (при наявності обмежень). А стовпчик з вищим порядковим номером, тобто k-тий $(k = \overline{m-t+1,\ m})$ містить одну “-1”. Як було показано вище, у випадку канонічних моделей k-ті стовпчики відсутні.

З (9) отримуємо залежності змінних параметрів системи x_j, $j = \overline{1,\ n}$, незалежних критеріїв подібності π_i, $i = \overline{1,\ t}$ та мінімуму показника ефективності $y_{\min}$ від вектора залежних критеріїв подібності π_i, $i = \overline{t+1,\ m_1}$:

$$\begin{cases} x_j = \prod_{i=1}^{m-t}\left(\frac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{ji}} \prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i}\right)^{\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \beta_{ji}}, \quad j = \overline{1,\ n}; & (10) \\ \left(\frac{\pi_s}{a_s}\right) = \prod_{i=1}^{m-t}\left(\frac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{si}}, \quad s = \overline{m-t+1,\ m}); & (11) \\ y_{\min} = \prod_{i=1}^{m-t}\left(\frac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{n+1,i}} \prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i}\right)^{\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \beta_{n+1,i}}, & (12) \end{cases}$$

На відміну від (6), (5) залежності (10), (12) будуть неповними (не включатимуть всі π). Щоб ввести відсутні критерії подібності, вдаються до штучного формування моделі мінімуму показника ефективності:

$$y_{\min} = y_{\min} \prod_{j=1}^{t}\left(\left(\frac{\pi_{m-t+j}}{a_{m-t+j}}\right)^{c_j}\left(\frac{\pi_{m-t+j}}{a_{m-t+j}}\right)^{-c_j}\right) \tag{13}$$

Після підстановки (11), (12) в (13) отримаємо

$$y_{\min} = \prod_{i=1}^{m-t}\left(\frac{\pi_i}{a_i}\right)^{\beta_{n+1,\,i} + \sum_{s=m-t+1}^{m} c_{s-(m-t)}\beta_{si}} \times$$

$$\times \prod_{s=m-t+1}^{m}\left(\frac{\pi_s}{a_s}\right)^{-c_{s-(m-t)}} \times \prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{\sum_{f=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_f}\right)^{\sum_{f=m_k+1}^{m_{k+1}} \beta_{n+1,\,f}}$$

Виходячи з умови (8), оптимальні значення критеріїв подібності визначаються через параметри c_j моделі

$$\begin{cases} \pi_{0i} = -\left(\beta_{n+1,\,i} + \sum_{s=m-t+1}^{m} c_{s-(m-t)}\beta_{si}\right), \quad i = \overline{1,\ m-t}; \\ \pi_{0i} = c_{s-(m-t)}, \quad i = \overline{m-t+1,\ m}. \end{cases}$$

Для знаходження змінних c_i розв'язують систему із t нелінійних рівнянь, що повністю визначаються підстановкою (10) в (7). За результатами розв'язання цієї системи отримуємо повну залежність $y_{\min} = f(\pi)$.

Оптимальні значення параметрів $x_{j\,опт}$ можна визначити безпосередньо з (6). У разі потреби будують повні залежності $x_j = f(\pi)$ за аналогічною методикою. Проте для знаходження додаткових параметрів c_j в даному разі користуються критеріальною формою запису.

Залежність $y = f(\pi)$ має вигляд:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \times y_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \times \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\pi_j}{a_j}\right)^{-\pi_{0j}} \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i} \right)^{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \beta_{n+1,i}} \tag{14}$$

Зауважимо, що використання даної методики ускладнюється із ростом міри складності задачі. І якщо міра складності сягає сотень, що досить часто трапляється в промислових задачах, програма, яка грунтується на вищезгаданому алгоритмі, стає неефективною. Тому для розв'язання оптимізаційної задачі високої міри складності пропонується більш універсальний алгоритм, побудований за наступними прийомами: представлення критеріальної програми у вигляді лінійної [5]; локалізація оптимального роз'язку засобами лінійного програмування (наприклад, симплекс-методом) у досить вузькій області для його подальшого уточнення [2]; визначення в сформованій області оптимального розв'язку методами послідованого пошуку екстремуму дихотомії чи квадратичної інтерполяції [6]; представлення результатів розрахунку у вигляді (14) за умови $\pi_{0j} = -\beta_{ji}$, де π_{0j} - оптимальні значення критеріїв подібності.

Висновки

Серед з основних труднощів реалізації закону оптимального керування є необхідність перерахунку матриці зворотного зв'язку при деякій зміні параметрів режиму системи. Визначення даної матриці критеріїв подібності в загальному випадку здійснювалось за допомогою переходу від прямої задачі КП до двоїстої [2, 5, 6]. У даній статті репрезентується метод визначення критеріїв подібності та розв'язання оптимізаційної задачі без такого переходу, шляхом встановлення зв'язку прямої задачі КП з двоїстими змінними. Запропонований метод не потребує знання теорії двоїстості для оцінки двоїстих змінних, що входять до моделі. Між тим, використання даного методу значно збільшує інформативність параметрів моделі при розв'язанні перетвореної системи рівнянь (4). Найбільш впадає в око обернена матриця показників $[\tilde{\alpha}]^{-1}$, всі елементи якої використовуються для знаходження залежності змінних параметрів системи, незалежних критеріїв подібності, мінімуму показника ефективності від вектора залежних критеріїв подібності, в порівнянні з ізоморфною оберненою матрицею показників $[\alpha]^{-1}$ [4, 5].

Безсумнівно, отримана залежність (14) акумулює досить широкі можливості щодо практичної реалізації оптимального розв'язку. Це зокрема безпосередній зв'язок між керувальними параметрами та матрицею зворотного зв'язку закону керування. Крім того, такий підхід розкриває іманентні властивості моделі, що полегшує проведення аналізу чутливості та визначення допустимої області оптимальних рішень, яка адекватна точності та повноті вихідної інформації. Обидва аспекти однозначно інфспірують значне спрощення процедури проведення та аналізу оптимальних розрахунків.

Література

1. Бевз С.В., Кравцов К.И., Лежнюк П.Д. Критериальное моделирование при автоматизации потоков мощности и напряжения в электрической системе. - В кн. Управление технологическими и энергетическими процессами. Тез. докл. н.-т. конф. - Севастополь. - 1996. - с. 35.

2. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. - М.: Мир, 1972. - 312 с.

3. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. - М.: Высшая школа, 1974. - 328 с.

4. Электроэнергетические системы. Кибернетика электрических систем. Под ред. В.А. Веникова. - М.: Высшая школа, 1974. - 328 с.

5. Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. - УМК ВО, 1989. - 140 с.

6. Лежнюк П.Д., Гайдамака В.М., Бевз С.В. Критеріальне програмування в задачах великої розмірності//Вісник ВПІ, 1996. - № 2. - с. 20-29.