МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ БУДІВЕЛЬНОГО ВИРОБНИЦТВА

УДК 691.31.536.21

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОВИМІРНОЇ РЕЛАКСАЦІЙНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

В.І. Риндюк, Т.О. Міщук, С.В. Риндюк

Вступ

Теорія тепло- та масоперенесення є одним з чільних розділів сучасної науки, який має важливе значення для ряду галузей промисловості, а також при розрахунках конструктивних елементів машин, нагрівальних приладів, інженерних споруд, в матеріалознавстві тощо. Процеси теплообміну характеризуються великою різноманітністю і складністю. На сьогодні базою моделювання є теорія, зоснована на законах Фур'є для розповсюдження тепла. В класичній математичній моделі теплопровідності постулюється нескінченна швидкість розповсюдження збурень, що призводить до нереальності характеристики деяких фізичних явищ. У зв'язку з цим рядом авторів було запропоновано інші, більш адекватні процеси, які базуються на законах, що певним чином узагальнюють класичні закони перенесення [1, 2].

Постановка задачі, визначальні співвідношення

У випадку теплоперенесення в релаксуючих середовищах (зокрема при вивченні теплообміну в неньютонівських рідинах), крім прцесу релаксації теплових потоків, згідно з інерційними властивостями носіїв тепла, притаманним всім матеріальним об'єктам, спостерігається також релаксація градієнта температури за миттєвого зникнення теплових потоків і затримка виникнення градієнтів температури за миттєвої появи теплових потоків. Ці явища об'єднуються в узагальнений закон Фур'є, який враховує процеси релаксації як теплових потоків, так і градієнтів температури, і має вигляд [1].

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T + \tau_2 \frac{\partial T}{\partial t}\right), \tag{1}$$

де τ_1, τ_2 – відповідно параметри релаксації теплового потоку та температури;
$T = T(x, t)$ – температура;
a – коефіцієнт теплопровідності.

Розглянемо розрахунок теплових полів в рамках релаксаційної математичної моделі у випадку теплопровідності скінченного стрижня довжиною l, кінці якого підтримують з врахуванням початкових умов та граничних умов першого роду:

$$T(x, 0) = \varphi(x) \tag{2}$$

$$T(0, t) = \mu_1 \tag{3}$$

$$T(1, t) = \mu_2 \tag{4}$$

Розв'язування математичної моделі

Для чисельно-аналітичного розв'язання задачі виберемо методику, яку запропоновано в роботі [4], тобто на інтервалах рівномірного розбиття досліджуваної області з врахуванням вузлових точок розв'язання задачі шукаємо у вигляді полінома другого порядку

$$P(x, x_k, t) = \sum_{i=0}^{2} A_i^k(t)(x - x_k)^i, \qquad k = \overline{1, n} \tag{5}$$

де $x \in [x_k - \alpha_k h, x_k + \alpha_k h]$,

$$h=1/(n+1),\ x_k=\alpha_k h \qquad (6)$$

$k=\overline{1,n}$, n- кількість вузлових точок $x_к$

Проінтегруємо рівняння (1) за змінною x на інтервалі ($x_k-\alpha_x h$, $x_k+\alpha_k h$) з врахуванням наближеного розв'язку (4). Для простоти розрахунків вважаємо, що a= const.

Після інтегрування і відповідних перетворень, маємо:

$$\tau_1 \ddot{A}_0^k + \frac{\tau_1 d^2 h^2}{3}\ddot{A}_2^k + \dot{A}_0^k + \frac{\alpha^2 h^2}{3}\dot{A}_2^k = 2aA_2^k + 2a\tau_2\dot{A}_2^k \qquad (7)$$

У випадку $\tau_1=\tau_2=0$ з рівняння (7) одержуємо рівняння для кожного вузла, яке характерне для класичного рівняння теплопровідності Фур'є.

Розв'язування системи відносно значення температури A_0^k у вузловій кожній точці можливе в тому випадку, коли відомі вирази коефіцієнтів A_2^k. Для цього перепишемо початкові і граничні умови задачі у вигляді

$$P(x_к, x_к, 0) = T(x_к, 0), \qquad (8)$$

$$P(0, x_1, t) = \mu_1 , \qquad (9)$$

$$P(1, x_n, t) = \mu_2 \qquad (10)$$

До рівнянь (7)-(9) необхідно добавити умови неперервності температури на суміжних границях інтервалів розбиття

$$P(x_к\pm h, x_k, t) = P(x_{k\pm1}, t) \qquad (11)$$

Підстановка наближеного розв'язку (5) у вирази (8), (9), (10) приводить до відповідної системи алгебраїчних рівнянь другого порядку 2n відповідно A_1^k, A_2^k.

Наведемо рекурентні формули для коефіцієнта A_2^k, оскільки A_1^k не входить в (7):

$$A_2^1 = \frac{\mu_1 - 2A_0^1 + A_0^2}{2h^2}$$

$$A_2^n = \frac{A_0^{n-1} - 2A_0^n + \mu_2}{2h^2} \qquad (12)$$

$$A_2^k = \frac{A_0^{k-1} - 2A_0^k + A_0^{k+1}}{2h^2}.$$

З врахуванням (12) рівняння (7) має вигляд такої системи n диференціальних рівнянь другого порядку.

$$\begin{aligned}
&\ddot{A}_0^1\,\tau_1\Big(1-\frac{\alpha_1^2}{3}\Big)+\frac{\tau_1\alpha_1^2}{6}\big(\ddot{\mu}_1+\ddot{A}_0^2\big)+\dot{A}_0^1\Big(1-\frac{\alpha_1^2}{3}+\frac{2a\tau_2}{h^2}\Big)+\big(\dot{\mu}_1+\dot{A}_0^2\big)\Big(\frac{\alpha_1^2}{6}-\frac{\alpha\tau_2}{h^2}\Big)=\\
&=-\frac{2a}{h^2}A_0^1+\frac{a}{h^2}\big(\mu_1+A_0^2\big)\\
&\ddot{A}_0^k\,\tau_1\Big(1-\frac{\alpha_k^2}{3}\Big)+\frac{\tau_1\alpha_k^2}{6}\big(\ddot{A}_0^{k-1}+\ddot{A}_0^{k+1}\big)+\dot{A}_0^k\Big(1-\frac{\alpha_1^2}{3}+\frac{2a\tau_2}{h^2}\Big)+\big(\dot{A}_0^{k-1}+\dot{A}_0^{k+1}\big)\Big(\frac{\alpha_k^2}{6}-\frac{a\tau_2}{h^2}\Big)=\\
&=-\frac{2a}{h^2}A_0^k+\frac{a}{h^2}\big(A_0^{k-1}+A_0^{k+1}\big),\ k=\overline{2,n-1}\\
&\ddot{A}_0^n\,\tau_1\Big(1-\frac{\alpha_n^2}{3}\Big)+\frac{\tau_1\alpha_n^2}{6}\big(\ddot{A}_0^{n-1}+\ddot{\mu}_2\big)+\dot{A}_0^n\Big(1-\frac{\alpha_1^2}{3}+\frac{2a\tau_2}{h^2}\Big)+\big(\dot{A}_0^{n-1}+\dot{\mu}_2\big)\Big(\frac{\alpha_n^2}{6}-\frac{a\tau_2}{h^2}\Big)=\\
&=-\frac{2a}{h^2}A_0^n+\frac{a}{h^2}\big(A_0^{n-1}+\mu_2\big)
\end{aligned}\tag{13}$$

Для розв'язання системи (13) визначимо числовий коефіцієнт α_k

Для цього, будемо вимагати, щоб наближений розв'язок (5) при t=0 і $x=x_k$ з врахуванням початкової умови $T(x_k,0)=\varphi(x_k)$ задовольняв рівняння (1)

$$\tau_1\ddot{A}_0^k(0)+\dot{A}_0^k(0)=a\varphi_{xx}(x_k)+a\tau_2\varphi_{iv}(x_k),$$

оскільки
$$\dot{A}_0(0)=a\varphi_{xx}(x_k),\tag{14}$$

то
$$\ddot{A}_0^k(0)=\frac{a\tau_2}{\tau_1}\varphi_{iv}(x_k),\tag{15}$$

Підставляючи (14), (15) в систему (13) отримуємо алгебраїчні рівняння відносно коефіцієнтів α_k^2. Розв'язуючи рівняння відносно α_k^2 і підставляючи їх числові значення в систему (13), отримуємо таку систему диференціальних рівнянь, яку запишемо в матричній формі

$$M_1\ddot{A}_0+M_2\dot{A}_0=M_3A_0+M_4\ddot{\mu}+M_4\dot{\mu}+M_6\mu,\tag{16}$$

де $M_1,\ldots,M_5$ – матриці, які містять елементи коефіцієнтів τ_1, τ_2, h і α_k^2;

$$A_0=\left\{A_0^1,A_0^2,\ldots,A_0^n\right\}^T;\mu=\left\{\mu_1,\ldots,\mu_2\right\}^T.$$

Використовуючи заміну $A_0=x_1$, $\dot{A}_0=x_2$ і $\ddot{A}_0=\dot{X}_2$, отримуємо систему 2n диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases}\dot{X}_1=x^2\\ \dot{X}_2=-\Big(M_2x_2+M_3x_1+M_4\ddot{\mu}+M_5\dot{\mu}+M_6\mu\Big)M^{-1}\end{cases}\tag{17}$$

З врахуванням початкових умов $x_1(0)=\varphi(x)$ і $x_2(0)=\varphi_{xx}(x)$ розв'язуємо систему (17), наприклад, за методом Рунге-Кутта та знаходимо значення температури у відповідних вузлах.

Для перевірки достовірності розв'язку систему (13) розв'язуємо при:

$\alpha_k = 0$ – метод прямих;

$\alpha_k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ – покращений метод прямих;

$\alpha_k = 1$ – інтегральний метод прямих.

Порівнюючи отримані значення температури у вузлах при різних розв'язаннях можна прийти до оптимального вибору рішення задачі згідно з фізичним процесом вибраної моделі.

Висновки

1. Запропонована методика дозволяє враховувати для вибору меж інтегрування початкові умови з врахування нелінійності рівняння теплопровідності. В результаті маємо декілька підходів до розв'язання задачі (метод прямих, покращений метод прямих, інтегральний метод прямих та метод з врахуванням меж інтегрування інтервалів для вузлових точок).
2. Алгоритм розв'язання задачі можна застосовувати для задач з врахуванням граничних умов другого та третього роду, що буде результатом наступних статей.

Використана література

1. Лыков А.В., Михайлов Ю.А Теория тепло- и масопереноса. – М.: – Л.: Госенергоиздат, 1963. – 536 с.
2. Макаренко О.С. Математичне моделювання швидкоплинних процесів теплообміну: Автореф. дис... д-р фіз.-мат. наук. – Київ, 1996. – 30 с.
3. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу.– К.: Наукова думка, 2005. – 282 с.
4. Риндюк В.І., Прилипко Т.В. Методика теплотехнічного розрахунку багатошарового середовища // Вісник ВПІ. – 2003. – №3. – С.35-38.

Риндюк Володимир Іванович – канд. фіз.-мат. н., доцент кафедри теплогазопостачання і вентиляції Вінницького національного технічного університету

Міщук Тетяна Олексіївна – студентка Вінницького національного технічного університету

Риндюк Світлана Володимирівна – студентка Вінницького національного технічного університету