МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ БУДІВЕЛЬНОГО ВИРОБНИЦТВА

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ ПРИ ВІБРОСИЛОВОМУ ФОРМУВАННІ ДРІБНОШТУЧНИХ БЛОКІВ З ЗАСТОСУВАННЯМ ЕЛАСТИЧНИХ АДАПТИВНИХ ДОУЩІЛЬНЮВАЧІВ

Г.С. Ратушняк, Н.М. Слободян

Вступ

Досвід розв'язування прикладних задач показує, що незалежно від їхньої складності кінцевої мети можна досягти або постановкою експерименту (тоді потрібно враховувати економічний бік задачі), або методом математичного моделювання. Більші можливості, завдяки сучасним ЕОМ, має математичне моделювання, коли аналізується не реальна задача, а її модельне зображення.

Процес вібраційного ущільнення бетонних сумішей при формуванні декоративних стінових дрібноштучних бетонних виробів характеризується необхідністю здолання сил опору зчеплення та в'язкого опору.

Метою даного дослідження є аналіз вимушених коливань прямокутної пластинки (моделі еластичного доущільнювача), що одностороннім чином взаємодіє з пружною основою (типа Вінклера). Чисельно-аналітичні підходи до розв'язку подібних задач розвинуті у роботах [1–7].

Основна частина

Розглянемо усталені коливання шарнірно спертої вздовж контуру пластини (доущільнювача) з односторонніми зв'язками, що сприймають зусилля тільки одного знаку. Будемо вважати, що досліджувана система може утримувати вказані вище зв'язки за рахунок відриву шарнірно спертої вздовж контуру прямокутної пластинки від односторонньої вінклерівської основи. Зрозуміло, що існує вплив цього відриву на резонансні частоти і форми коливань при дії періодичного у часі навантаження. Основа (бетонна суміш) при цьому сприймає тільки зусилля стискання і не перешкоджає відриву пластини (доущільнювача) від поверхні бетонної суміші. Реакція такої основи описується кусково-лінійною функцією.

Рівняння руху пластини (доущільнювача) має вигляд:

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)+0.5\left(signW\left(x,y,t\right)+1\right)\times k_0 W\left(x,y,t\right)+\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=q\left(x,y,t\right), \quad (1)$$

де x, y – координати площини, що проходить через середину доущільнювача (по його товщині h);

$W(x,y,t)$ – функція прогинів від координат (x,y) та часу t;

k_0 – коефіцієнт постілі;

ρ – щільність матеріалу доущільнювача;

$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість;

E – модуль пружності матеріалу доущільнювача;

ν – коефіцієнт Пуассона;

$q(x,y,t)$ – закон зміни у просторі й часі навантаження, що діє зовні на доущільнювач.

У подальшому вважаємо, що на доущільнювач діє рівномірно розподілене гармонічне навантаження

$$q(x,y,t) = p\sin\theta t, \quad (2)$$

де p – амплітуда,

θ – частота навантаження на доущільнювач.

Тоді диференціальне рівняння відносно W (1) приймає вигляд:

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)+0.5\left(signW\left(x,y,t\right)+1\right)\times k_0 W\left(x,y,t\right)+\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=p\sin(\theta t), \quad (3)$$

Диференціальне рівняння (3) можна розв'язати як аналітичним так і числовим методами, обов'язково задовільняючи граничні умови.

Знаючи розв'язки (3), можна встановити розподіл поверхневих амплітуд доущільнювача, які впливають на бетонну суміш і визначають якість сформованого декоративного бетонного блока. Для розв'язку (3) застосуємо проекційний метод [6]. Вибираючи у якості базової системи систему тригонометричних функцій (у відповідності до умов шарнірного спирання), переміщення точок площини пластини (доущільнювача), що проходить через її середину товщини h, представимо у вигляді подвійних нескінченних тригонометричних рядів Фур'є:

$$W(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}(t)\sin\left\{\frac{m\pi}{a}x\right\}\sin\left\{\frac{n\pi}{в}y\right\}, \quad (4)$$

де a, $в$ – розміри пластини вздовж осей x, y, відповідно;

m, n – число напівхвиль вздовж осей x, y.

Саме такий вид $W(x,y,t)$ (4) доцільно використати для розв'язку (3), щоб задовольнити граничні умови шарнірного спирання пластини (доущільнювача) вздовж її контуру:

при $x=0$ й $x=a$

$$W=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0, \quad (5)$$

й умови при $y=0$ і $y=в$

$$W=0, \quad \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0. \quad (6)$$

Оскільки функції (4) є розв'язком задачі, вони мають задовольняти розрахунковому диференціальному рівнянню (1) та граничним умовам шарнірного опирання (прогини та другі похідні від них на контурі відсутні).

Підставляючи функцію прогинів (4) у (3), отримаємо:

$$\begin{aligned}&D\pi^4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}(t)\times\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{в^2}\right)^2\times\sin\left\{\frac{m\pi}{a}x\right\}\times\sin\left\{\frac{n\pi}{в}y\right\}+0.5k_0\left[signW(x,y,t)+1\right]\times\\&\times\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}(t)\times\sin\left\{\frac{m\pi}{a}x\right\}\times\sin\left\{\frac{n\pi}{в}y\right\}+\rho h\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2A_{mn}(t)}{dt^2}\times\sin\left\{\frac{m\pi}{a}x\right\}\times\sin\left\{\frac{n\pi}{в}y\right\}=\\&=p\times\sin\{\theta t\}.\end{aligned} \quad (7)$$

Ортогоналізуючи ліву та праву частину рівняння (7) до всіх функцій, що входять у ряд (4), будемо мати:

$$\rho h \times \frac{a\textit{в}}{4} \times \frac{d^2 A_{m_1 n_1}(t)}{dt^2} + D\pi^4 A_{m_1 n_1}(t) \times \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{n_1^2}{\textit{в}^2} \right) \times \frac{a\textit{в}}{4} + \int\limits_0^a \int\limits_0^d 0.5 \times \left[signW(x,y,t) + 1 \right] \times$$

$$\times k_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \times \sin\left\{ \frac{m\pi}{a} x \right\} \times \sin\left\{ \frac{n\pi}{\textit{в}} y \right\} \times \sin\left\{ \frac{m_1\pi}{a} x \right\} \times \sin\left\{ \frac{n_1\pi}{\textit{в}} y \right\} \times dxdy = \qquad (8)$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^{\textit{в}} p \times \sin\{\theta t\} \times \sin\left\{ \frac{m_1\pi}{a} x \right\} \times \sin\left\{ \frac{n_1\pi}{\textit{в}} y \right\} \times dxdy,$$

$$(m_1 = 1, 2, \ldots; n_1 = 1, 2, \ldots).$$

За умов чисельно-аналітичного підходу до розв'язку (8), значення подвійного інтегралу, що входить у ліву частину цих рівнянь, знайдемо чисельно, попередньо розділивши область інтегрування відповідно на ($F \times L$) рівних підобластей з розмірами елементу $\Delta x \times \Delta y$:

$$\int\limits_0^a \int\limits_0^{\textit{в}} 0.5\left[signW(x,y,t) + 1 \right] \times k_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \times \sin\left\{ \frac{m\pi}{a} x \right\} \sin\left\{ \frac{n\pi}{\textit{в}} y \right\} \sin\left\{ \frac{m_1\pi}{a} x \right\} \sin\left\{ \frac{n_1\pi}{\textit{в}} y \right\} dxdy =$$

$$= \sum_{f=1}^{F} \sum_{l=1}^{L} 0.5\left[signW(x,y,t) + 1 \right] \times k_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \times \qquad (9)$$

$$\times \sin\left\{ \frac{m\pi}{a} x_f \right\} \sin\left\{ \frac{n\pi}{\textit{в}} y_l \right\} \sin\left\{ \frac{m_1\pi}{a} x_f \right\} \sin\left\{ \frac{n_1\pi}{\textit{в}} y_l \right\} \Delta x \Delta y,$$

$$(m_1 = 1, 2, \ldots;\ n_1 = 1, 2, \ldots).$$

де x_f, y_l – координати

(f, l) – елементи області $[a \times b]$.

Для (7) диференціальні рівняння відносно функцій $A_{m_1 n_1}(t)$, будуть мати вигляд:

$$\rho h \frac{a\textit{в}}{4} \times \frac{d^2 A_{m_1 n_1}(t)}{dt^2} + D\pi^4 A_{m_1 n_1}(t) \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{n_1^2}{\textit{в}^2} \right) \frac{a\textit{в}}{4} + \sum_{f=1}^{F} \sum_{l=1}^{L} k_0 \times 0.5\left[signW(x,y,t) + 1 \right] \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \times$$

$$\sin\left\{ \frac{m\pi}{a} x_f \right\} \sin\left\{ \frac{n\pi}{\textit{в}} y_l \right\} \sin\left\{ \frac{m_1\pi}{a} x_f \right\} \sin\left\{ \frac{n_1\pi}{\textit{в}} y_l \right\} \Delta x \Delta y = \frac{pa\textit{в}}{m_1 n_1 \pi} \left(\cos(m_1\pi) - 1 \right) \left(\cos(n_1\pi) - 1 \right) \sin(\theta t),$$

$$(m_1 = 1, 2, \ldots;\ n_1 = 1, 2, \ldots) \qquad (10)$$

Для розв'язання цієї системи (10) можна використати метод [6] побудови періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. При цьому слід обмежитись числами M і N членів у розкладі (4).

При побудові амплітудно-частотної залежності слід перейти до нового масштабу часу $\tau = t\theta = \frac{2\pi t}{T}$. В цьому випадку система нелінійних диференціальних рівнянь (8) приймає вигляд:

$$\rho h \frac{a\textit{в}}{4} \theta^2 \frac{d^2 A_{m_1 n_1}(\tau)}{d\tau^2} + D\pi^4 A_{m_1 n_1}(\tau) \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{n_1^2}{\textit{в}^2} \right) \frac{a\textit{в}}{4} + \sum_{f=1}^{F} \sum_{l=1}^{L} k_0 \times 0.5\left[signW(x,y,t) + 1 \right] \times \sin\left\{ \frac{m_1\pi}{a} x_f \right\} \times$$

$$\times \sin\left\{ \frac{n_1\pi}{\textit{в}} y_l \right\} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} A_{mn}(\tau) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_f \right) \sin\left(\frac{n\pi}{\textit{в}} y_l \right) \Delta x \Delta y = \left(p \frac{a\textit{в}}{m_1 n_1 \pi^2} \right) \left(\cos m_1\pi - 1 \right) \left(\cos n_1\pi - 1 \right) \sin\tau$$

$$(m_1 = 1, 2, \ldots, M;\ n_1 = 1, 2, \ldots N) \qquad (11)$$

Трудноші розв'язку поставленої задачі обумовлено наявністю у системах (10) й (11) змінних коефіцієнтів. Тому, у подальшому для отримання її частинних розв'язків слід використовувати метод скінчених різниць, що дозволяє досить точно інтегрувати звичайні диференціальні рівняння у розглядуваній області зміни t.

Висновки

1. Запропоновано математичну модель аналізу коливань еластичного доущільнювача з односторонньою взаємодією з пружною основою (типа Вінклера).
2. Для встановлення розподілу поверхневих амплітуд доущільнювача (які визначають якість бетонного блока) доцільно в якості базової системи використати систему тригонометричних функцій як таких, що відповідають граничним умовам опирання.
3. Розв'язок нелінійного диференціального рівняння руху еластичного доущільнювача в моделі проводиться проекційним методом з використанням числового методу кінцевих різниць.

Список літератури

1. Портаев Л.П. Методы расчёта систем с дискретными односторонними связями // Строительная механика и расчёт сооружений.– 1976. – №6. – С.41-45.
2. Резников Л.М. К расчёту систем с односторонними связями // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1977. – №3. – С. 54-56.
3. Страракова Н.Е. Принцип Гамильтона-Остроградского для системы с односторонними связями // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т.29. – Вып . 4. – С. 738-739.
4. Янютин Е.Г. Нестационарные колебания балки на упругом одностороннем однослойном инерционном основании // Динамика и прочность машин. – Х. – 1985. – Вып. 42. – С. 37-43.
5. Янютин Е.Г., Бешенкова В.И. Неустановившиеся колебания круговых пластин и цилиндрических оболочек на упругом одностороннем основании // Проблемы машиностроения. – К., 1982. – Вып. 16. – С. 53-57.
6. Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Кондаков Г.С., Оглобля А.И. Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями. – К.: Вища школа. Головное издательство, 1989. – 399 с.
7. Ратушняк Г.С., Слободян Н.М. Порівняльний аналіз математичних моделей розрахунків прогинів еластичного привантаження під час формування декоративних бетонних блочків: моделі гнучких пластин та мембран. I // Вестник ХГТУ. – 2002. – №2(15).Ч.I – С.393-395.

Ратушняк Георгій Сергійович – професор, к.т.н., завідувач кафедри теплогазопостачання Вінницького національного технічного університету.

Слободян Наталія Михайлівна – старший викладач кафедри теплогазопостачання Вінницького національного технічного університету.