

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОМІННЯ ПРИПОВЕРХНЕВИМ ШАРОМ БІОТКАНИНИ З СИСТЕМНОЮ ПАТОЛОГІЄЮ

Шевчук С. В., Безсмертний Ю. О. Петрук В. Г., Томчук М. А.,  
Черноволик Г. О.

*Український державний науково-дослідний інститут реабілітації  
інвалідів, м. Вінниця Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця*

Математична модель перетворення проміння, зокрема видимого діапазону спектра та прилягаючих до нього довжин хвиль (приблизно 300 - 1200 нм), що є найхарактернішим з точки зору взаємодії з приповерхневим шаром біотканин, базується на теорії переносу випромінювання (ТПВ) в основу якої покладено рівняння перетворення випромінювання (РПВ), що, в свою чергу, впливає з закону Бугера і є рівнянням променистої рівноваги (РПР) або енергетичного балансу [1, 2, 3, 4]:

$$\cos \frac{dI_R(l, \theta, \lambda)}{dl} = I_0(\theta) [r_1 + (1 - r_1)\alpha + (1 - r_1)(1 - \alpha)T] + \frac{(1 - r_1)(1 - \alpha)(1 - T)\sigma}{2} \int_0^{\pi} \int_0^l f(\theta, \theta') \cdot I_0(l, \theta') d\theta' + \frac{I'(l, \theta, \lambda)}{2}, \quad (1)$$

де  $\theta$  - кут між нормаллю та напрямком падаючого на біотканину проміння з інтенсивністю  $I_0$ ;  $I_R$  інтенсивність відбитого від біотканини випромінювання, що складається з, власне, першократно відбитої компоненти  $r_1$  від поверхні шкіри (біотканини) і трансформованої та поверненої з глибини тканини ( $l$ ) компоненти  $r_n$ :

$$I_R = I_{r_1} + I_{r_n} \quad (2)$$

$\sigma$  — коефіцієнт розсіяння,  $\alpha$  — коефіцієнт поглинання,  $T$  — коефіцієнт пропускання;  $\lambda$  - довжина хвилі падаючих променів;  $I'$  - інтенсивність власного свічення біотканини на характеристичних для неї довжинах хвилі (так званий ефект антистоксового поглинання [5, 6, 7]).

При цьому у загальному вигляді приповерхневий шар нормальної (без патологічних змін) біотканини можна зобразити як багатшарову систему, яка складається, по меншій мірі, з чотирьох основних, але різних за природою шарів (рис. 1) [8].

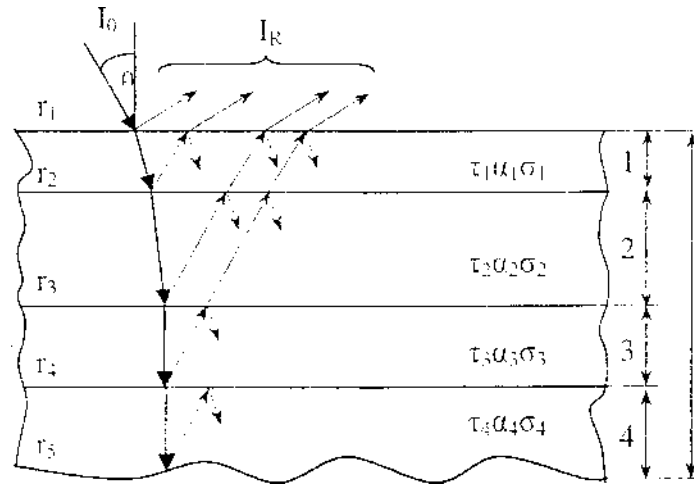


Рис. 1. Схематичне зображення перерізу приповерхневого прошарку біотканини, де 1 - епідерміс; 2 - дерма; 3 - підшкірно-жирова клітчатка; 4 - м'язова тканина,  $r_n$  - коефіцієнти відбивання різних за природою прошарків

Коефіцієнти відбивання різних за природою прошарків  $r_n$  формують сумарний коефіцієнт відбивання  $R$ :

$$\begin{aligned}
 R = & r_1 + (1 - r_1) \tau_1^2 r_2 r_1 \alpha_1 + (1 - r_1) (1 - r_2) \tau_2^2 r_3 r_2 \tau_1 r_1 \alpha_1 \alpha_2 + \\
 & + (1 - r_1) (1 - r_2) (1 - r_3) \tau_3^2 r_4 r_3 \tau_2 r_2 \tau_1 r_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \\
 & + (1 - r_1) (1 - r_2) (1 - r_3) (1 - r_4) \tau_4^2 r_5 r_4 r_3 \tau_3 r_2 \tau_2 \tau_1 r_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = r_1 + r_n.
 \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогічно сумарний коефіцієнт пропускання, що у нашому випадку буде близьким 0, бо в біологічних тканинах, зокрема шкіри, в шарі товщиною 3-5 мм реалізуються умови глибинного режиму, коли  $R_\infty(l) = const$ , а  $T \equiv 0$ . Що стосується сумарного коефіцієнту розсіяння, то його значенням у нижній півсфері можна знехтувати, бо проміння поглинається речовиною біозразка. В результаті збільшиться значення коефіцієнта поглинання тканини, а верхня півсфера значень  $a$  аналогічно збільшить величину  $R$ . Тому відповідно виразу (2):

$$R = r_1 + R_\infty(l) = r_1 + r_n, \quad (4)$$

причому

$$R' + \alpha' \equiv 1, \quad (5)$$

де  $R', a'$  — сумарні коефіцієнти відбивання і поглинання з урахуванням розсіяної компоненти, приблизно  $\sigma / 2$  верхньої і нижньої півсфери альbedo відповідно.

З врахуванням вщенаведеного рівняння (1) спрощується і набуває цілком коректної математичної моделі, а саме:

$$dI_R(l, \theta, \lambda) = I_0(\lambda) [r_1 + (1 - r_1)(1 - \alpha')] dl. \quad (6)$$

Отже, як впливає з виразу (6), вимірявши інтенсивність (яскравість) відбитого проміння  $dI_R$  та знаючи (задаючи) інтенсивність падаючого проміння (вона, як правило, дорівнює одиничному значенню променевого потоку)  $I_0$  на заданій довжині хвилі  $\lambda$ , можна отримати сумарний коефіцієнт дифузного відбивання  $R_\lambda$ , набір значень якого в заданому інтервалі  $\lambda$  формує спектр відбивання біотканини, що є діагностичним критерієм цілого ряду поверхневих чи системних патологій, наприклад: вітиліго, еритема, червоний вовчак тощо.

Для прикладу наведемо знімок поперечного перерізу ділянки шкіри, ураженої системним червоним вовчаком (СЧВ) з проліферативним васкулітом (рис. 2).



Рис. 2. Знімок поперечного перерізу ділянки шкіри, ураженої системним червоним вовчаком (СЧВ) з проліферативним васкулітом

Як бачимо, від нормальної шкіри і підшкірного прошарку СЧВ відрізняється вкрай деформованою поверхнею зі зміненими дермою та епідермісом, зумовленими наявністю як поверхневого, так і глибокого проліферативного васкуліту. Схематично процес трансформації падаючого проміння на такій біотканині можна зобразити так (рис. 3).

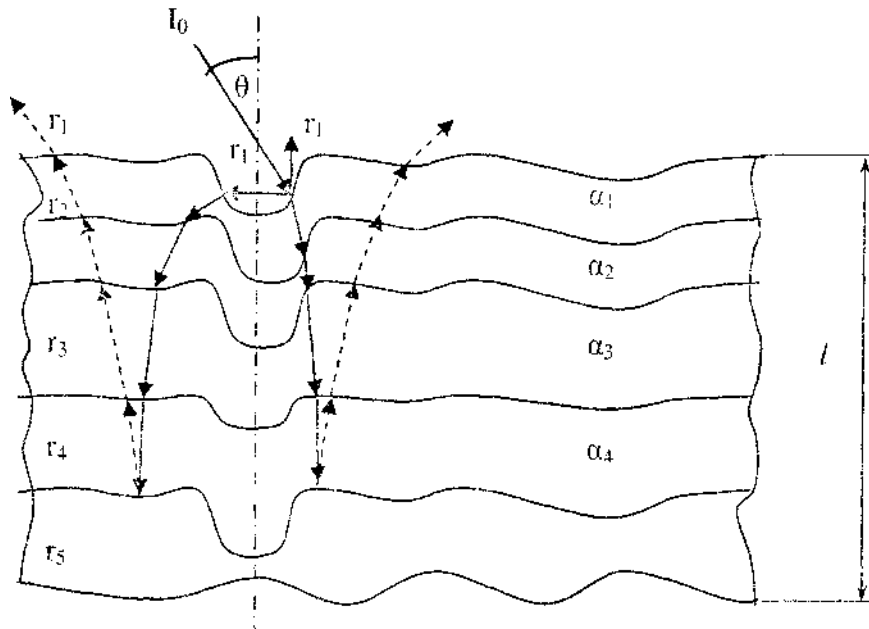


Рис. 3. Схематичне зображення перерізу приповерхневого прошарку біотканини із системною патологією

Виходячи з рис. 3, можна констатувати, що сумарний коефіцієнт дифузного відбивання суттєво зміниться за рахунок багатократного відбивання падаючого променевого потоку у багаточисельних впадинах (лунках) деформованої поверхні ( $r_1\beta$ ), а відтак, за рахунок збільшення коефіцієнту поглинання  $a$  в глибоких шарах біотканини, враженої проліферативним васкулітом, характерною ознакою якого є значне насичення дериватами оксигемоглобіну, а саме: метгемоглобіну, карбоксигемоглобіну, деоксигемоглобіну тощо. Саме для них характерне значне поглинання в області 500 - 800 нм [4, 5] і їх у венозній крові таких хворих більше, ніж у нормі.

Отже, вираз (3) може набути такого вигляду:

$$R = r_1\beta + (1 - r_1\beta)\tau^2 r_2 r_1 \alpha_1 + (1 - r_1\beta)(1 - r_2)\tau^2 r_3 r_2 \tau_1 r_1 \beta \alpha_1 \alpha_2 + (1 - r_1\beta)(1 - r_2)(1 - r_3)\tau^2 r_4 r_3 \tau_2 r_2 \tau_1 r_1 \beta \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad (7)$$

де  $r'_n$  - відбита компонента буде явно менша від аналогічної  $r_n$  в нормі за рахунок майже повного поглинання фолікулами глибокого проліферативного васкуліту на рівні  $a_3$  і  $a_1$ :  $\beta$  — сталий для даного виду патологій множник, що знаходиться в межах  $\beta=0-1$ , але найчастіше близький до значення 1/2. В результаті вираз (6) набуває вигляду:

$$dI_R(l, \theta, \lambda) = I_0(\theta, \lambda) [r_1\beta + (1 - r'_n)] dl, \quad (8)$$

$$a \frac{dI_R}{I_0 dl} = R' = r_1\beta + r'_n = r_1\beta + (1 - \alpha'), \quad (9)$$

Звідси  $R'$ , в порівнянні з нормою, зменшиться приблизно вдвоє.

Розв'язок виразу (9) може бути знайдений з еквівалентної системи рівнянь, наприклад інваріанта Стокса:

$$\left. \begin{aligned} R' &= r_1 \beta + \frac{(1 - r_1 \beta)^2 r_1 \exp(-2m_a l)}{1 - (r_1 \beta)^2 \exp(-2m_a l)} \\ T' &= \frac{(1 - r_1 \beta)^2 \exp(-m_a l)}{1 - r_1^2 \beta^2 \exp(-2m_a l)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

де  $m_a$  - показник поглинання. Згідно закону Бугера з коефіцієнтом поглинання  $a$  він пов'язаний так:

$$\alpha = 1 - e^{-m_a l} \quad (11)$$

або

$$m_a = -\frac{1}{l} \ln(1 - \alpha). \quad (12)$$

Тоді перетворення виразів системи (10) з врахуванням (11) та (12), що дозволяють виключити  $l$ , матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} R' &= r_1 \beta + \frac{(1 - r_1 \beta)^2 r_1 (1 - \alpha)^2}{1 - (r_1 \beta)^2 (1 - \alpha)^2} \\ T' &= \frac{(1 - r_1 \beta)^2 (1 - \alpha)}{1 - r_1^2 \beta^2 (1 - \alpha)^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Отже набір значень  $R', T' = f(r_1, \alpha, \beta, \lambda, l)$  для даного виду патології формують діагностичні ознаки хвороби, їх відмінність від норми, дозволяє здійснювати глибокий аналіз причин, терміну та ступеня важкості захворювання, зокрема, системним червоним вовчаком тощо.

## Висновки

1. Математична модель трансформації випромінювання приповерхневим прошарком біотканини в нормі і патології базується на рівнянні променистої рівноваги, що лежить в основі теорії переносу випромінювання.

2. Характеристичні спектрофотометричні параметри поверхні біотканини з системною патологією суттєво відрізняються від аналогічних в нормі внаслідок деформованості поверхні шкіри та глибокого проліферативного васкуліту.

## Література

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. - М.: Изд. иностр. лит., 1953. - 431 с.
2. Иванов О. П. Оптика рассеивающих сред. - Мн.: Наука и техника, 1969. 592 с.
3. Hulst H. C. van de. Multiple Light Scattering. - Vol. 1 and 2. New York: Academic Press, 1980. 739 p.
4. Иванов В. В. Столетие интегрального уравнения переноса излучения: в кн. «Рассеяние и поглощение света в природных и искусственных дисперсных средах». - Мн.: ИФ АН Белоруси, 1991. - С. 10-36.
5. Петрук В. Г. Спектрофотометрия світлорозсіювальних середовищ. - «Універсум-Вінниця», 2000. -208 с.

6. Петрук В. Г. Фізико-хімічний механізм антистоксового поглинання гуморальними середовищами з позиції координаційної теорії кристалічного поля // Вісник ВПІ. - 1995. — № 2. - С. 78-82.

7. Хайруллина А. Я. Оптические и биофизические параметры биотканей в норме и патологии, методы их определения в видимой и ближней ИК- областях спектра, основанные на многократном рассеянии. // Инженерно-физический журнал. - 1996. - Т. 69, № 3. - С. 390 - 398.

8. Петрук В. Г., Томчук М. А., Черноволик Г. О., Бозняк Ю. А. Розробка та аналіз математичної моделі трансформації випромінювання біотканиною // Вісник ВПІ, - 2000. — № 2. - С. 18-22.