

**Ю. В. Крушевський, Д. В. Гаврілов**

**ОСНОВИ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ  
ЧАСТИНА 2**

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**Ю. В. Крушевський, Д. В. Гаврілов**

## **ОСНОВИ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ ЧАСТИНА 2**

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів спеціальностей: 6.050902 – "Радіоелектронні апарати", 6.050903 – "Телекомунікації". Протокол № 5 від 28 грудня 2006 р.

Вінниця ВНТУ 2008

УДК 621.3.01  
К 84

*Рецензенти:*

**В. М. Лисогор**, доктор технічних наук професор  
**С. М. Зленко**, доктор технічних наук професор  
**Г. Г. Бортник**, кандидат технічних наук доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

**Крушевський Ю. В., Гаврілов Д. В.**  
К 84 **Основи радіоелектроніки. Частина 2.** Навчальний посібник.  
– Вінниця: ВНТУ, 2008. – 164 с.

В навчальному посібнику розглянуті фундаментальні теоретичні основи радіоелектроніки. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри та програмою дисципліни "Основи радіоелектроніки."

УДК 621.3.01

© Ю. Крушевський, Д. Гаврілов, 2008

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

Ю. В. Крушевський, Д. В. Гаврілов

## Основи радіоелектроніки Частина 2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Усі цитати, цифровий, фактичний матеріал та бібліографічні відомості перевірені, написання одиниць відповідає стандартам.

Зауваження рецензентів враховані.

Автори: \_\_\_\_\_ Ю.В. Крушевський  
(підпис)

\_\_\_\_\_ Д.В. Гаврілов  
(підпис)

Вимогам, які висуваються до навчальної літератури, відповідає.

До друку і в світ дозволяю на підставі § 2 п.15 "Єдиних правил..."

Проректор з навчальної та науково-методичної роботи  
В.О.Леонт'єв

Затверджено  
на засіданні кафедри РТ  
Протокол №4 від 10.10.2006р.  
Зав. кафедрою

\_\_\_\_\_ О.В. Осадчук  
(підпис)

ВІННИЦЯ ВНТУ 2006

## ЗМІСТ

Вступ.....	6
1 Кола зі взаємною індуктивністю .....	9
1.1 Взаємна індуктивність .....	9
1.2 Полярність індуктивно зв'язаних котушок. Е.р.с. взаємної індукції.....	10
1.3 Взаємоіндуктивність при послідовному і паралельному ввімкненні зв'язаних котушок.....	12
1.4 Рівняння та схема заміщення трансформатора без ферромагнітного осердя.....	15
1.5 Автотрансформатор.....	19
1.6 Запитання та задачі для закріплення .....	20
2 Вимушені коливання у системі зв'язаних контурів.....	21
2.1 Основні схеми зв'язаних контурів .....	21
2.2 Коефіцієнт зв'язку.....	23
2.3 Вхідний опір системи двох контурів з трансформаторним зв'язком.....	24
2.4 Внесені опори та їх фізичний зміст .....	26
2.5 Настроювання системи двох зв'язаних контурів .....	30
2.5.1 Перший частинний резонанс .....	31
2.5.2 Другий частинний резонанс.....	32
2.5.3 Повний резонанс.....	33
2.5.4 АЧХ двох трансформаторно зв'язаних контурів .....	38
2.5.5 Вибірність зв'язаних контурів.....	42
2.6 Запитання та задачі для закріплення .....	43
3 Електричні фільтри .....	45
3.1 Призначення та класифікація фільтрів.....	45
3.2 Реактивні фільтри типу К.....	48
3.2.1 Фільтри нижніх частот .....	49
3.2.2 Фільтри верхніх частот .....	51
3.2.3 Смугові та загороджувальні фільтри.....	53
3.3 Реактивні фільтри типу m .....	56
3.4 Резистивно-ємнісні фільтри.....	58
3.4.1 RC-фільтри верхніх частот .....	58
3.4.2 RC-фільтри нижніх частот .....	60
3.4.3 Смугові та загороджувальні RC -фільтри .....	62
3.5 Фільтри зосередженої селекції .....	63
3.6 Запитання та задачі для закріплення .....	65

4	Радіотехнічні процеси та задачі радіоелектроніки.....	66
4.1	Поняття інформації, повідомлення, сигналу.....	66
4.2	Телефонія.....	67
4.3	Основні радіотехнічні процеси.....	68
4.4	Радіотелефонія і радіотелеграфія.....	71
4.5	Радіолокація.....	73
5	Сигнали.....	76
5.1	Класифікація сигналів.....	76
5.2	Амплітудно – і фазочастотні спектри.....	82
5.3	Спектральний аналіз періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів.....	84
5.4	Спектральний аналіз неперіодичних сигналів.....	89
6	Радіосигнали.....	94
6.1	Загальні визначення.....	94
6.2	Амплітудно-модульовані сигнали.....	95
6.3	Частотний спектр однотонально амплітудно- модульованого сигналу.....	97
6.4	Частотний спектр АМ сигналу при модуляції складним сигналом.....	100
6.5	Потужність АМ сигналу.....	103
6.6	Сигнал з кутовою модуляцією.....	104
6.7	Частотний спектр однотонального ЧМ сигналу при $M \ll 1$ .....	107
6.8	Частотний спектр однотонального ЧМ сигналу при довільному значенні індексу модуляції.....	108
6.9	Потужність сигналів з кутовою модуляцією.....	110
6.10	Спектр коливання при змішаній амплітудно-частотній модуляції.....	111
7	Перехідні процеси.....	113
7.1	Поняття про перехідні процеси.....	113
7.2	Неперервність енергії. Закони комутації.....	114
7.3	Увімкнення котушки індуктивності на постійну напругу.....	115
7.4	Увімкнення RC-кола на постійну напругу.....	120
7.5	Перехідні процеси у колах з $R, L, C$ .....	124
7.6	Перехідні процеси в $R, L, C$ колі при дії на нього прямокутних відеоімпульсів.....	126
7.7	Перехідні процеси в $R, L, C$ колі при дії на нього прямокутних радіоімпульсів.....	128

7.8	Одинична функція та перехідна характеристика кола .....	131
7.9	Імпульсна функція та імпульсна характеристика кола .....	132
8	Проходження сигналів через лінійні кола .....	134
8.1	Диференціювальні кола .....	134
8.2	Інтегрувальні кола .....	138
8.3	Проходження амплітудно-модульованих сигналів через коливальні кола .....	140
8.4	Проходження частотно-змодульованих сигналів через коливальні кола .....	145
9	Нелінійні процеси в радіотехніці .....	147
9.1	Зовнішні характеристики нелінійних елементів і способи їх описування .....	147
9.2	Спектральний склад струму у нелінійному елементі при гармонічній зовнішній дії .....	151
9.3	Нелінійні перетворення суми двох гармонічних сигналів .....	157
	Література.....	164

## ВСТУП

### Місце радіотехніки у галузях сучасної науки і техніки

Важливе місце у галузях сучасної науки і техніки, досягнення яких безпосередньо сприяють зростанню економічного і культурного рівня суспільства, належить радіотехніці.

**Радіотехніка** – це науково-технічна галузь, задачами якої є:

- 1) вивчення принципів генерування, підсилення, випромінювання і приймання електромагнітних коливань, які відносяться до радіодіапазону;
- 2) практичне використання цих коливань з метою передавання, зберігання і перетворення інформації.

На початковому етапі свого розвитку слідом за винаходом радіо (О.С. Попов, 1895 р.) радіотехніка розв'язувала переважно проблеми електрозв'язку, використовуючи електромагнітні коливання з довжинами хвиль у декілька сотень чи тисяч метрів. На теперішній час царина застосування радіотехніки незрівнянно зросла. Радіозв'язок, телебачення, радіолокація, радіоуправління, радіонавігація, радіотехнічні методи в біології, медицині, сільському господарстві – такий неповний перелік галузей радіотехніки.

Проникнення радіотехніки у суміжні наукові і технічні галузі (електроніку, обчислювальну техніку) зумовило виникнення широкої науково-технічної галузі, яка отримала узагальнену назву **радіоелектроніка**.

Як відомо із загального курсу фізики, передавання інформації від її джерела до споживача за допомогою радіотехнічних засобів здійснюється по **радіоканалу**. Основні елементи радіоканалу – передавальний пристрій, приймальний пристрій та фізичне середовище, яке їх розділяє і у якому відбувається поширення радіохвиль. Середовищем поширення може бути як вільний простір, так і спеціальні технічні пристрої: хвилеводи, кабелі та інші лінії передавання.

Сигнал, який поступає від первинного джерела повідомлення, на передавальному боці радіоканалу за допомогою мікрофону, передавальної телевізійної камери чи інших подібних пристроїв перетворюється в електричні коливання. Ці коливання не можуть бути безпосередньо використаними для збудження електромагнітних хвиль через їх відносно низькочастотність. Тому у радіотехніці застосовують способи передавання сигналів, за якими низькочастотні коливання, що містять вихідне повідомлення, за допомогою спеціальних пристроїв керують параметрами достатньо потужного **несучого коливання**, частота якого лежить у радіодіапазоні. Процес подібного перетворення сигналів називають **модуляцією** несучого коливання.

Модульований сигнал випромінюється антеною передавального пристрою. Збуджені при цьому електромагнітні хвилі досягають



приймальної антени і збуджують в ній радіосигнал, рівень якого дуже малий. Після частотної фільтрації і підсилення прийнятий сигнал підлягає **демодуляції (детектуванню)** – операції, протилежній відносно модуляції. У результаті на виході приймального пристрою виникають коливання, які є копією переданого вихідного повідомлення.

Наведений опис принципу функціонування найпростішого радіоканалу підкреслює, що передавання повідомлень по радіоканалу супроводжується різноманітними **перетвореннями сигналів**. Ці перетворення здійснюються у відповідних **радіотехнічних пристроях**: підсилювальних, фільтрувальних, частотно-вибірних, частотоперетворювальних, модуляторів, детекторів і багатьох інших.

У будь-якому реальному радіоканалі окрім корисного сигналу обов'язково присутні **завади**, які виникають з багатьох причин, – через хаотичність руху електронів в елементах кіл, вплив сусідніх радіоканалів, промислових завод, сонячного і іншого космічного випромінювання і т.ін. Здатність радіотехнічних засобів передавання інформації протидіяти шкідливому впливу завод і забезпечувати високу правильність передавання називають **завадостійкістю**.

У наш час радіотехніка є науково-прикладною галуззю, яка дуже швидко розвивається. Говорячи про найближчі перспективи її розвитку, слід зазначити тенденцію переходу до усе більш високочастотних діапазонів електромагнітних коливань. Так, коливання надвисокочастотного діапазону (НВЧ), який раніше застосовувався в основному у радіолокації, став широко використовуватись в телевізійних системах, наприклад, супутникове побутове телебачення. Практика професійного радіозв'язку широко використовує лазерні джерела несучих частот і оптично-волоконні лінії зв'язку, які працюють у світловому і інфрачервоному діапазонах.

Швидкими темпами розвивається **елементна база** радіоелектроніки шляхом наукового дослідження та запровадження у практику **функціональних пристроїв**, які виконують обробку сигналів за рахунок специфічних хвильових і коливальних явищ у твердих тілах – напівпровідниках, діелектриках і магнітних матеріалах. Величезну роль у сучасній радіотехніці відіграють вироби мікроелектронної технології. Доступні, недорогі, надійні і швидкодіючі **інтегральні мікросхеми** рішуче змінили вигляд технічних засобів багатьох галузей радіоелектроніки. Мікроелектроніка зумовила широкий перехід до принципово нових **цифрових способів** обробки і перетворення радіотехнічних сигналів.

Маємо усі підстави сподіватись, що галузі радіотехніки будуть і у подальшому розширюватись і розвиватись на базі прогресу у багатьох суміжних галузях науки і техніки.

### **Задачі курсу**

Основною задачею курсу є вивчення фізичних процесів в

радіотехнічних пристроях і опанування методами математичного описання цих процесів.

У відповідності до такої постановки задачі курс включає в себе:

1) аналіз детермінованих (регулярних) коливань – детермінованих радіотехнічних сигналів;

2) кодування повідомлень і елементарні відомості з теорії інформації;

3) проходження радіотехнічних сигналів через лінійні кола;

4) нелінійні перетворення сигналів і принципи реалізації процесів: випрямлення, детектування, множення частоти, модулювання перетворення частоти.

### **Царина застосування радіоелектроніки**

Окрім уже згаданих радіотелефонного і радіотелеграфного зв'язку, радіомовлення і радіолокації до радіоелектроніки відносяться:

**радіонавігація** – водіння кораблів, літальних апаратів, сухопутного транспорту за допомогою радіозасобів;

**телебачення** – передача світлових зображень;

**радіокерування** – керування об'єктами за допомогою радіотехнічних засобів;

**радіотелеметрія** – передавання з віддаленого об'єкта даних вимірювань, які там виконуються автоматично;

**радіометеорологія** – отримання даних про погоду за допомогою радіотехнічних засобів;

**радіоастрономія** – дослідження небесних тіл радіотехнічними методами та засобами;

**промислова радіоелектроніка** – електронні пристрої, які застосовуються у промисловості і на транспорті;

радіоелектроніка в науці, медицині, сільському господарстві і т. ін.

### **Класифікація радіозасобів за їх складністю**

З радіоелементів (резисторів, котушок індуктивності, конденсаторів, діодів, транзисторів і т. ін.) складаються каскади, з каскадів – вузли, далі слідуєть блоки (високочастотний, низькочастотний, блок живлення і т. ін.), радіоапарати або радіопристрої (власне антена, передавач, приймач і т. ін.), радіосистеми і, нарешті, радіотехнічні комплекси.

Радіозв'язок, радіомовлення, телебачення здійснюються **системами передачі інформації**, а радіолокація по відбитих від цілі хвилях здійснюється **системами добування інформації** про параметри об'єкта.

**Радіотехнічний комплекс (велика радіосистема)**, розв'язує у повному обсязі задачу дуже складну за допомогою групи радіосистем. Так, комплекс протиракетної (ПРО) та протиповітряної (ППО) оборони складається з систем добування, передачі, обробки (з допомогою ЕОМ, як правило) і руйнування інформації, а також системи радіокерування бойовими засобами ПРО та ППО.

## 1 КОЛА ЗІ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ

Змінне магнітне поле, пов'язане з довільним витком, наводить у ньому е.р.с., яка, за законом електромагнітної індукції, визначається швидкістю змін магнітного потоку через площу витка незалежно від того, чим викликана зміна потоку. У котушці, яка складається з великої кількості витків, наводиться е.р.с., пропорційна швидкості зміни потокозчеплення, тобто швидкості зміни суми магнітних потоків, зчеплених з окремими витками котушки.

Якщо усі витки котушки пронизуються одним і тим же потоком, то потокозчеплення дорівнює добутку магнітного потоку на кількість витків.

Вивчаючи кола гармонічного струму, ми зустрічалися з явищем самоіндукції, тобто наведенням е.р.с. в електричному колі при зміні потокозчеплення самоіндукції, обумовленого струмом у цьому колі. Відношення ж потокозчеплення самоіндукції до струму ми назвали індуктивністю  $L$ .

### 1.1 Взаємна індуктивність

Розглянемо тепер явище взаємної індукції, тобто наведення е.р.с. в електричному колі при зміні потокозчеплення взаємоіндукції, обумовленого струмом у іншому електричному колі. Кола, в яких наводяться е.р.с. взаємної індукції, називаються індуктивно зв'язаними колами.

Зв'язок потокозчеплення взаємної індукції одного електричного кола зі струмом у другому колі, яка дорівнює відношенню потокозчеплення взаємної індукції в одному колі до струму в другому колі, характеризується взаємною індуктивністю  $M$ , яка так само як і індуктивність  $L$  вимірюється в Генрі (Гн).

Якщо потокозчеплення  $W_1 \Phi_2$  першої котушки ( $W_1$  – кількість її витків,  $\Phi_2$  – магнітний потік, створений другою котушкою) обумовлено струмом  $i_2$  другої котушки, то взаємна індуктивність цих котушок дорівнюватиме:

$$M_{12} = \frac{W_1 \cdot \hat{O}_2}{i_2}. \quad (1.1)$$

Відповідно, якщо потокозчеплення  $W_2 \Phi_1$  другої котушки ( $W_2$  – кількість її витків,  $\Phi_1$  – магнітний потік, створений першою котушкою) обумовлено струмом  $i_1$  першої котушки, то взаємна індуктивність цих котушок дорівнюватиме:

$$M_{21} = \frac{W_2 \cdot \hat{O}_1}{i_1}. \quad (1.2)$$

Для лінійних електричних кіл є справедливим принцип взаємності, а тому завжди має місце рівність:

$$M_{12} = M_{21} = M,$$

а тому індекси біля параметра  $M$  не пишуться.

На підставі сказаного сформулюємо властивість взаємності індуктивно зв'язаних кіл: якщо струм, що протікає у першому колі, обумовлює у другому колі потітокзчеплення взаємної індукції ( $W_2\Phi_1$ ), то такий же струм, що протікає у другому колі, обумовить у першому колі потітокзчеплення взаємної індукції ( $W_1\Phi_2$ ) такої ж величини:

$$W_2\Phi_1 = \Phi_2W_1.$$

## 1.2 Полярність індуктивно зв'язаних котушок. Е.р.с. взаємної індукції

З курсу фізики ми знаємо, що напрямки протікання струму через провідник і створюваного ним магнітного потоку узгоджуються між собою за правилом правоходового гвинта.

Домовимось напрямки струмів у двох індуктивно зв'язаних котушках вважати узгодженими, якщо напрямки створюваних ними магнітних потоків самоіндукції та взаємоіндукції збігатимуться.

На рис. 1.1 показані індуктивно зв'язані котушки, намотані на спільне осердя. На рисунку 1.1,*а* витки обох котушок намотані у одному напрямку. При узгодженому напрямку струмів  $i_1$  та  $i_2$  в двох індуктивно зв'язаних котушках затискачі (полюси) цих котушок, відносно яких ці струми спрямовані однаково, називаються **однойменними** або **однополярними**. Ці затискачі позначені точками.

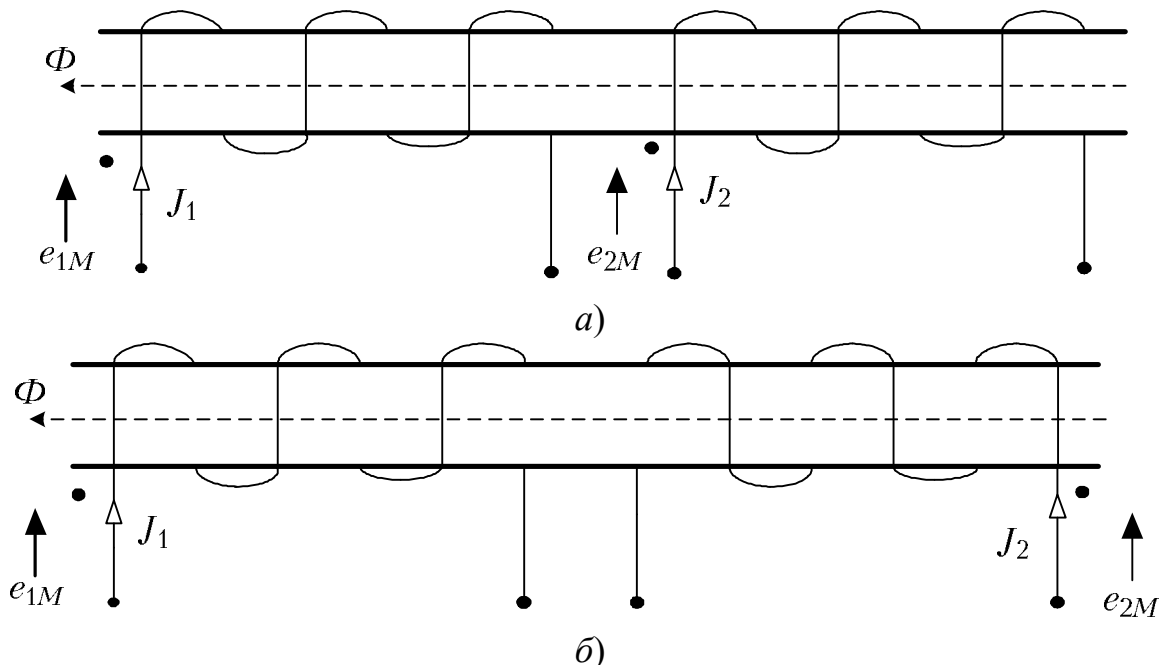


Рисунок 1.1 – Узгоджений напрямок струмів в індуктивно зв'язаних колах

На рисунку 1.1,*б* витки котушок намотані у протилежних напрямках, однойменні затискачі теж позначені точками.

На рис. 1.2 показано схематичне зображення двох індуктивно зв'язаних котушок з витками, намотаними у одному напрямку (а), та у протилежних напрямках – (б). Точками позначені однойменні затискачі (полюси) котушок.

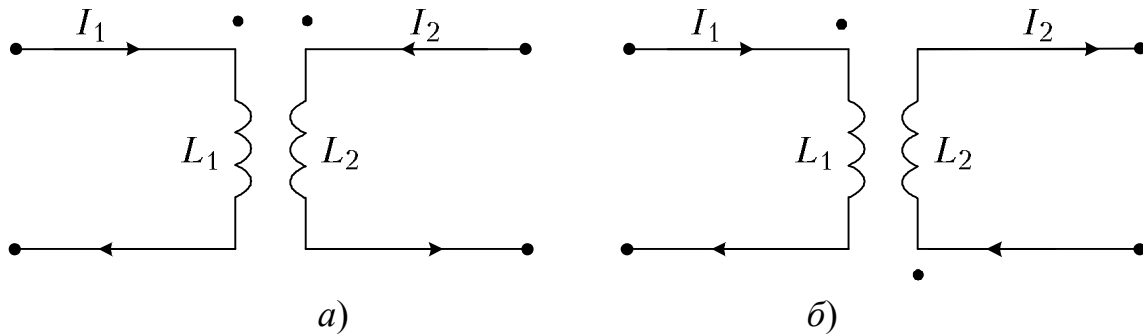


Рисунок 1.2 – Схематичне зображення індуктивно зв'язаних котушок з позначенням однойменних затискачів

У підрозділі 2.5 першої частини посібника зауважено, що додатний напрямок е.р.с. самоіндукції вибирається таким, що збігається з додатним напрямком струму. Тому додатний напрямок магнітного потоку і наведеної ним е.р.с. самоіндукції пов'язані правилом правоходового гвинта. Так само і додатний напрямок е.р.с. взаємної індукції  $e_{1M}$ , що наводиться в котушці 1 струмом  $i_2$ , (рис. 1.1) приймається таким, що збігається з напрямком струму 1. Аналогічно, додатний напрямок е.р.с. взаємної індукції  $e_{2M}$  (рис. 1.1), що наводиться в котушці 2 її струмом, збігається з додатним напрямком  $i_2$ .

За таких умов і при узгодженому напрямку двох струмів  $i_1$  та  $i_2$  у формулі е.р.с. взаємної індукції є знак "мінус", так само як і у формулі для е.р.с. самоіндукції:

$$\begin{cases} e_{1M} = -W_1 \cdot \frac{d\Phi_2}{dt} = -M \cdot \frac{di_2}{dt}, \\ e_{2M} = -W_2 \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = -M \cdot \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Нехай через котушку 1 протікає струм  $i_1$ , причому він зростає  $di_1/dt > 0$ . На основі (1.3) в котушці 2 наведеться е.р.с. взаємної індукції:

$$e_{2M} = -M \cdot \frac{di_1}{dt} < 0.$$

У цьому випадку потенціал полюса котушки 2 однойменний з тим, в який втікає струм  $i_1$ , і виявляється вищим потенціалу другого полюса котушки 2.

Звідси є справедливим твердження: однойменні полюси двох індуктивно зв'язаних котушок мають ту особливість, що підведення до однієї з них струму, який зростає за величиною, викликає підвищення потенціалу на однойменному полюсі другої котушки

Це твердження дозволяє експериментально знайти однойменні полюси індуктивно зв'язаних котушок. Одна з них вмикається в коло джерела постійної напруги, а до другої приєднується вольтметр постійного струму (рис. 1.3).

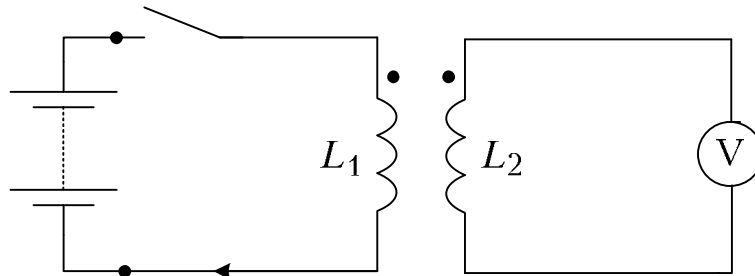


Рисунок 1.3 – До експериментального знаходження однойменних полюсів

Якщо у момент замикання кола джерела стрілка вольтметра відхиляється у бік додатних показань, то полюси індуктивно зв'язаних котушок, підімкнених до позитивного полюса джерела електричної енергії і до позитивного полюса вольтметра, є однойменними.

Тепер розглянемо випадок зустрічного напрямку струмів  $i_1$  та  $i_2$  (рис. 1.2,б), де струми  $i_1$  та  $i_2$  спрямовані протилежно відносно однойменних полюсів.

Оскільки напрямки магнітних потоків самоіндукції та взаємоіндукції протилежні, е.р.с. взаємної індукції при зустрічному напрямку струмів обчислюються за формулами, що містять знак "плюс":

$$\begin{cases} e_{1M} = W_1 \cdot \frac{d\Phi_{M2}}{dt} = M \cdot \frac{di_2}{dt}, \\ e_{2M} = -W_2 \cdot \frac{d\Phi_{M1}}{dt} = M \cdot \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (1.4)$$

### 1.3 Взаємоіндуктивність при послідовному і паралельному увімкненні індуктивно зв'язаних котушок

**Взаємоіндуктивний опір.** Розглядаючи дві індуктивно зв'язані котушки, запишемо вирази для е.р.с. самоіндукції та взаємоіндукції, які виникають при синусоїдних струмах у обох котушках, напрямлених однаково відносно однойменних полюсів:

у першій котушці

$$\begin{aligned} e_{1L} &= -W_1 \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} = -U_{1L}; \\ e_{1M} &= -W_1 \cdot \frac{d\Phi_2}{dt} = -M \cdot \frac{di_2}{dt} = -U_{1M}; \end{aligned}$$

у другій котушці

$$e_{2L} = -W_2 \cdot \frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} = -U_{2L};$$



Даний вираз показує, що дві індуктивно зв'язані котушки з'єднані послідовно і зустрічно, еквівалентні котушці, що має активний опір  $r_1 + r_2$  і індуктивність  $L_1 + L_2 - 2M$ .

Отже, наявність взаємної індукції при зустрічному увімкненні котушок, з'єднаних послідовно, зменшує індуктивність кола.

На основі сказаного можемо зробити висновок, що при узгодженому напрямку струмів (узгодженому увімкненні) спад напруги від взаємної індукції має знак "плюс", а при зустрічному напрямку струмів (зустрічному увімкненні) – знак "мінус". При цьому, обхід кола у обох випадках здійснюється у додатному напрямку струму.

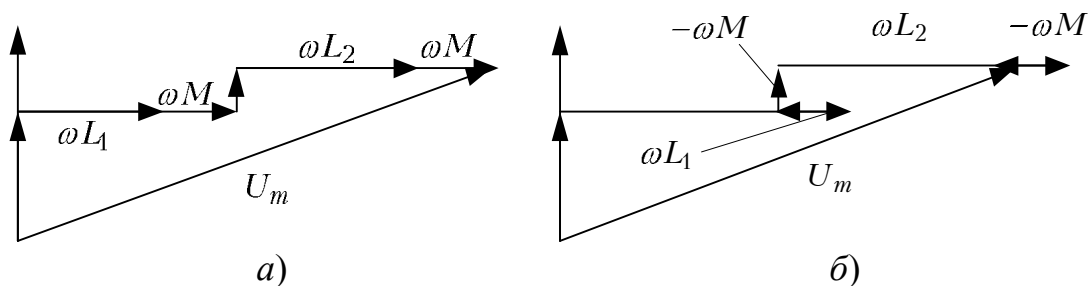


Рисунок 1.5 – Векторні діаграми при узгодженому (а) і зустрічному (б) увімкненні послідовно з'єднаних котушок індуктивності

### Паралельне з'єднання

Зі схеми рис. 1.6,а видно, що відносно однойменних полюсів струми в обох котушках спрямовані однаково, а тому спади напруг обумовлені взаємоіндуктивністю, в рівняннях Кірхгофа матимуть знак "плюс":

$$\begin{cases} \dot{U}_m = j\omega L_1 \dot{I}_{m1} + r_1 \dot{I}_{m1} - j\omega M \dot{I}_{m2}; \\ \dot{U}_m = j\omega L_2 \dot{I}_{m2} + r_2 \dot{I}_{m2} - j\omega M \dot{I}_{m1}; \\ \dot{I}_m = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2}. \end{cases} \quad (1.7)$$

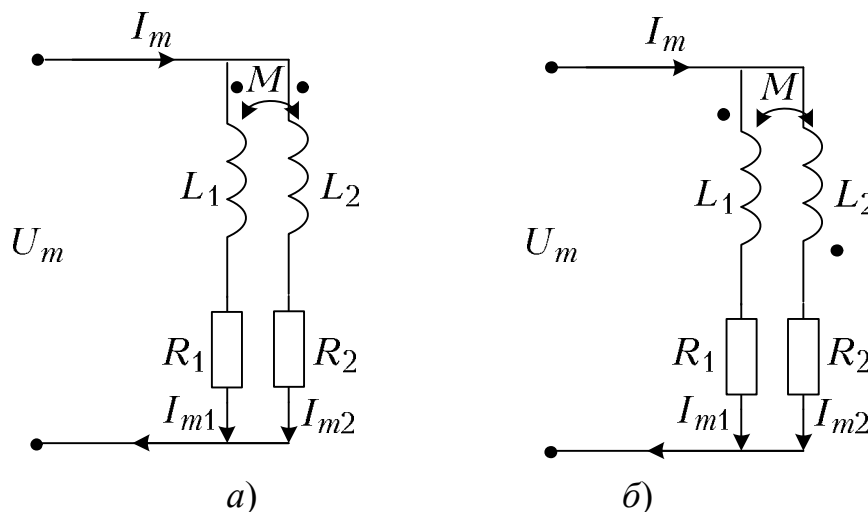


Рисунок 1.6 – Узгоджений (а) і зустрічний (б) напрямки струмів в індуктивно зв'язаних котушках, з'єднаних паралельно



Розв'язавши систему рівнянь (1.7) відносно струмів, отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m1} &= \frac{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2} \dot{U}_m; & \dot{I}_{m2} &= \frac{\dot{Z}_1 - \dot{Z}_M}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2} \dot{U}_m; \\ \dot{I}_m &= \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 - 2\dot{Z}_M}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2} \dot{U}_m. \end{aligned} \quad (1.8)$$

З останньої рівності знайдемо вхідний комплексний опір кола рис. 1.6,а:

$$\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \dot{Z}_{\text{ex}} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 - 2\dot{Z}_M}. \quad (1.9)$$

У випадку зустрічно увімкнених котушок, з'єднаних паралельно (рис. 1.6,б), складові, що обумовлюють спад напруги взаємної індукції, увійдуть в рівняння (1.7), (1.8) та (1.9) з протилежними знаками.

#### 1.4 Рівняння та схема заміщення трансформатора без феромагнітного осердя

Трансформатор (тобто перетворювач) – це пристрій, що передає енергію з одного кола в інше за допомогою електромагнітної індукції. Він застосовується найчастіше для перетворення величин змінних струмів та напруг. Трансформатор складається з двох або декількох індуктивно зв'язаних обмоток (котушок), насаджених на спільне осердя. Зокрема, двообмотковий трансформатор з повітряним осердям (тобто без осердя) часто застосовується у пристроях радіозв'язку, радіовимірювальної техніки, радіоавтоматики тощо. До первинної обмотки трансформатора (рис. 1.7), яка є котушкою з індуктивністю  $L_1$  та опором  $r_1$ , підводиться гармонічна напруга  $U_1 = U_1(t)$  від деякого джерела енергії (генератора е.р.с.), а до вторинної – з індуктивністю  $L_2$  та опором втрат підмикається навантаження з опором  $R_n$ . Між обмотками існує індуктивний зв'язок зі взаємніндуктивністю  $M$ . На рисунку зображено випадок, коли обмотки увімкнені зустрічно.

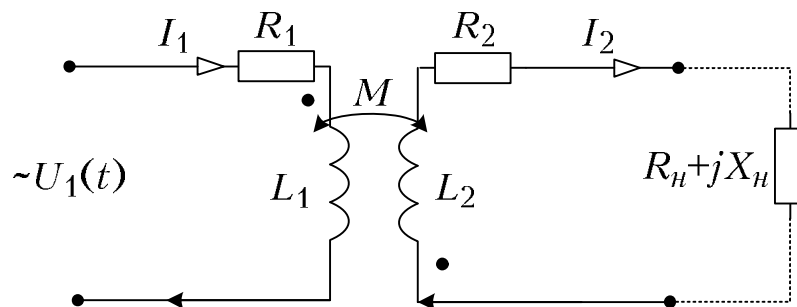


Рисунок 1.7 – Трансформатор без феромагнітного осердя (з повітряним осердям)

#### Схема заміщення (еквівалентна схема) трансформатора без осердя

Для контурів первинної і вторинної обмоток запишемо рівняння, виходячи з другого закону Кірхгофа:

$$\begin{cases} jX_1 \dot{I}_{m1} + r_1 \dot{I}_{m1} - jX_M M \dot{I}_{m2} = \dot{U}_{1m}; \\ jX_2 \dot{I}_{m2} + r_2 \dot{I}_{m2} - jX_M M \dot{I}_{m1} + R_H \dot{I}_{m2} + jX_H \dot{I}_{m2} = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Ці рівняння перепишемо таким чином:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m1}(j\omega L_1 + r_1) - j\omega M \dot{I}_{m2} &= \dot{U}_{1m}; \\ j\omega M \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m2}(R_H + r_2 + j\omega L_2 + jX_H) &= 0. \end{aligned}$$

З другого рівняння визначимо комплексну амплітуду струму вторинної обмотки  $\dot{I}_{m2}$ :

$$\dot{I}_{m2} = \frac{j\omega M \dot{I}_{m1}}{R_H + r_2 + j(\omega L_2 + X_H)}$$

і підставимо її значення у перше рівняння:

$$\dot{I}_{m1}(j\omega L_1 + r_1) - j\omega M \frac{j\omega M \dot{I}_{m1}}{R_H + r_2 + j(\omega L_2 + X_H)} = \dot{U}_{1m},$$

звідки знайдемо вираз для комплексної амплітуди струму первинної обмотки  $\dot{I}_{m1}$  (позначивши  $j\omega L_1 + r_1 = \dot{Z}_1$ ,  $\omega M = X_M$ ,  $j\omega L_2 + r_2 = \dot{Z}_2$ ,  $R_H + jX_H = \dot{Z}_H$ ):

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m1} \dot{Z}_1 - \frac{X_M^2 \dot{I}_{m1}}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_H} &= \dot{U}_{1m}; & (\dot{Z}_1 - \frac{X_M^2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_H}) \dot{I}_{m1} &= \dot{U}_{1m}; \\ \dot{I}_{m1} &= \frac{\dot{U}_{1m}}{\dot{Z}_1 - \frac{X_M^2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_H}}. \end{aligned}$$

Виходячи зі схеми рис. 1.7,  $\dot{U}_{1m} / \dot{I}_{m1}$  є комплексним опором, який буде спричинятися усією схемою струмові первинної обмотки, створюваному генератором  $U_1$ . Цей опір доцільно назвати вхідним опором трансформатора, навантаженого на  $\dot{Z}_H$ . Згідно із законом Ома маємо:

$$\dot{I}_{m1} = \dot{U}_{1m} / \dot{Z}_{ex},$$

де  $\dot{Z}_{ex} = \dot{Z}_1 - \frac{X_M^2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_H} = r_1 + jX_1 + \frac{(\omega M)^2}{R_H + r_2 + j(X_2 + X_H)}$  (тут  $X_1 = \omega L_1$  – реактивний опір первинної котушки;  $X_2 = \omega L_2$  – реактивний опір вторинної котушки).

Вираз для  $\dot{Z}_{ex}$  перепишемо таким чином:

$$\dot{Z}_{ex} = r_1 + \frac{(\omega M)^2 (R_H + r_2)}{(R_H + r_2)^2 + (X_2 + X_H)^2} + j(X_1 - \frac{(\omega M)^2 (X_2 + X_H)}{(R_H + r_2)^2 + (X_2 + X_H)^2}). \quad (1.11)$$

Наявність вторинної обмотки призводить до зростання активного опору первинної котушки на

$$r_{\text{вн}} = \frac{(\omega M)^2 (R_H + r_2)}{(R_H + r_2)^2 + (X_2 + X_H)^2},$$

який називається внесеним активним опором колом вторинної обмотки у коло первинної і позначається  $r_{\text{вн}}$ , а також зростання реактивного опору первинної котушки на

$$X_{\text{вн}} = -\frac{(\omega M)^2 (X_2 + X_H)}{(R_H + r_2)^2 + (X_2 + X_H)^2},$$

який називається внесеним реактивним опором колом вторинної обмотки у коло первинної і позначається  $X_{\text{вн}}$ , отже:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{\text{вх}} = r_1 + r_{\text{вн}} + j(X_1 + X_{\text{вн}}) = r_1 + \frac{(\omega M)^2 (R_H + r_2)}{(R_H + r_2)^2 + (X_2 + X_H)^2} + \\ + j\left(X_1 - \frac{(\omega M)^2 (X_2 + X_H)}{(R_H + r_2)^2 + (X_2 + X_H)^2}\right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

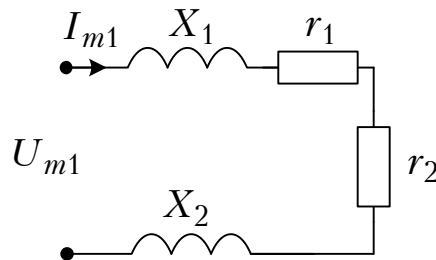


Рисунок 1.8 – Еквівалентна схема трансформатора без феромагнітного осердя

Звертаємо увагу на те, що у первинну обмотку вноситься реактивний опір, протилежний за знаком власному реактивному опору  $X_2 + X_H$  вторинної обмотки. Виходячи з рівнянь (1.11) та (1.12) матимемо схему заміщення трансформатора без феромагнітного осердя.

Тут розглядається випадок, коли осердя трансформатора виготовлене з неферомагнітного, а з діамагнітного чи парамагнітного матеріалу, відносна магнітна проникність яких  $\mu$  практично дорівнює одиниці, що не впливає на значення індуктивності котушки, яке буде дорівнювати його значенню у цій котушці без осердя.

Коефіцієнт трансформації. Будемо виходити з того, що обидві котушки намотані на одне і те ж осердя. Це означає, що потокозчеплення у первинній котушці дорівнюватиме  $W_1 \cdot \Phi$ , у вторинній –  $W_2 \cdot \Phi$ , де  $\Phi$  – магнітний потік, що зчеплюється з витками обох котушок. Тоді у вторинній котушці наводитиметься е.р.с. взаємоіндукції  $e_2 = -W_2 d\Phi/dt$ , а у первинній –  $e_1 = -W_1 d\Phi/dt$ . Звідси:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{e_2}{W_2} = \frac{e_1}{W_1}; \quad \text{або} \quad \frac{e_2}{e_1} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{U_{2M}}{U_{1M}} = n.$$

Отже, якщо на первинній обмотці такого трансформатора створена напруга  $U_1$ , то напруга на вторинній обмотці дорівнюватиме:

$$U_2 = \frac{W_2}{W_1} U_1 = n U_1.$$

де  $n$  – називається коефіцієнтом трансформації за напругою.

Якщо знехтувати втратами у трансформаторі, потужність на його вході буде дорівнювати потужності на виході, тобто:

$$P_1 = U_1 I_1 = P_2 = U_2 I_2,$$

звідки

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2}{I_1} = n.$$

Отже, якщо  $W_2 > W_1$ , то  $n > 1$  – трансформатор є підвищувальним за напругою ( $U_2 = n U_1$ ) у  $n$  разів, але оскільки  $I_2 = I_1 / n$ , цей трансформатор є знижувальним за струмом. Якщо у вторинну обмотку увімкнути опір навантаження  $R_n$  (рис. 1.7), то оскільки

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 / n}{I_2 \cdot n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{U_2}{I_2} = \frac{R_n}{n^2}.$$

можна сказати, що цей трансформатор в  $n^2$  разів є знижувальним за опором. Тобто, опір  $R_2$  буде трансформуватися і сприйматися у колі первинної обмотки, як  $R'_n = R_n / n^2$ . Знижувальний за напругою трансформатор ( $n < 1$ ) буде одночасно підвищувальним (у  $n$  разів) за струмом, та у  $n^2$  разів за опором, що використовується, наприклад, при узгодженні малого опору потужного динамічного гучномовця і високого вихідного опору каскаду звукового підсилювача.

Дві котушки вважаються увімкненими узгоджено, якщо створювані ними магнітні потоки самоіндукції та взаємоіндукції збігатимуться за напрямком. Полюси, відносно яких струми у котушках спрямовані однаково при узгодженому увімкненні котушок, називаються однойменними.

Коло вторинної обмотки трансформатора без феромагнітного осердя суттєво змінює параметри кола первинної обмотки, "вносячи" туди активний і реактивний опори, причому останній за знаком є протилежним власному індуктивному опору первинної котушки.

Напруга у колах обмоток трансформується прямопропорційно відношенню кількості витків в обмотках. Струм трансформується обернено пропорційно відношенню кількості витків в обмотках. Опір навантаження трансформується прямопропорційно квадрату відношення витків в обмотках.

## 1.5 Автотрансформатор

Автотрансформатор відрізняється від трансформатора тим, що його обмотка більш низької напруги є частиною обмотки більш високої напруги.

Позначимо загальне число витків через  $W$ , а число витків обмотки нижчої напруги (рис. 1.9,а) через  $W_2$ .

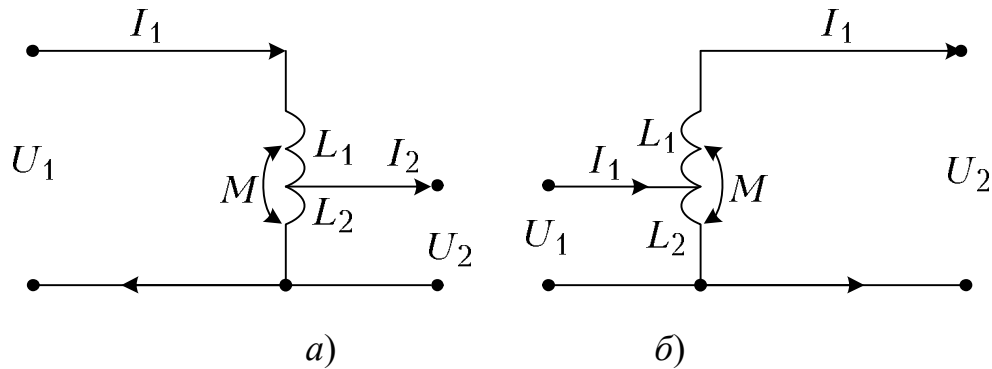


Рисунок 1.9 – Знижувальний (а) та підвищувальний (б) автотрансформатори

У режимі холостого ходу автотрансформатора (тобто при розімкнутих вихідних затискачах), коли не враховується розсіювання, відношення первинної напруги  $U_{1m}$  до вторинної  $U_{2m}$  дорівнює відношенню сумарної кількості витків загальної обмотки  $W$  до числа витків обмотки нижчої напруги  $W_2$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{W}{W_2} = n, (n > 1),$$

де  $n$  – коефіцієнт трансформації автотрансформатора.

Для схеми рис. 1.9,б, очевидно, буде справедливим співвідношення

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{W_2}{W} = n, (n < 1).$$

При навантаженні вторинної обмотки підведена до трансформатора потужність передається на вторинну сторону електромагнітною індукцією (через спільне магнітне поле) та безпосередньо через електричний зв'язок.

Застосування автотрансформатора замість звичайного трансформатора тієї ж потужності і з тим ж коефіцієнтом трансформації дає економію у міді, що йде на обмотку. Це досягається зменшенням загального числа витків і зменшенням товщини дроту вторинної обмотки, через яку проходить струм, рівний різниці первинного і вторинного струмів.

Ця економія буде тим більшою, чим ближче до одиниці коефіцієнт трансформації, бо при цьому різниця  $(I_1 - I_2)$  стає мінімальною.

## 1.6 Запитання та задачі для закріплення

1. Як застосувати трансформатор як узгоджувальний пристрій?
2. Що таке взаємоіндуктивний опір, від чого залежить його значення?
3. Принцип дії автотрансформатора.
4. Що таке схема заміщення трансформатора без осердя?
5. Побудувати векторну діаграму струмів та напруг для кола, показаного на рис. 1.7.
6. У вітку першої котушки схеми рис. 1.6,*a* послідовно увімкнено конденсатор з  $C = 5,0$  мкФ. У схемі  $r_1 = 2,0$  Ом,  $r_2 = 1,0$  Ом,  $L_1 = 0,02$  Гн,  $L_2 = 0,01$  Гн,  $M = 0,005$  Гн. Визначити напругу на конденсаторі, коли напруга  $U_m = 100$  В,  $f = 10$  кГц.
7. Трансформатор, який має дві обмотки на спільному осерді, має  $r_1 = 10$  Ом,  $L_2 = 0,1$  Гн, загальний опір вторинної обмотки  $S$  навантаження  $10$  КОм,  $W_1/W_2 = 10$ ; коефіцієнт зв'язку  $K = 0,5$ . Визначити решту параметрів трансформатора.

## 2 ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ У СИСТЕМІ ЗВ'ЯЗАНИХ КОНТУРІВ

Системою зв'язаних контурів будемо називати сукупність двох і більше контурів, увімкнених таким чином, щоб електромагнітні коливання, збуджені в одному з них, передавалися в інші і в результаті цього відбувався обмін енергіями між ними.

У цьому розділі будемо розглядати систему контурів, яка складається з двох контурів. У такій системі контур, що живиться від генератора е.р.с., будемо називати первинним, а другий контур – вторинним, який отримуватиме енергію від первинного. Загальний для обох контурів елемент будемо називати елементом зв'язку, який характеризуватиметься опором зв'язку.

### 2.1 Основні схеми систем зв'язаних контурів

В залежності від характеру опору зв'язку розрізняють схеми: з індуктивним (трансформаторним або автотрансформаторним) зв'язком, з ємнісним (внутрішньоємнісним або зовнішньоємнісним) зв'язком та з індуктивно ємнісним зв'язком.

У схемі з трансформаторним зв'язком (рис. 2.1,а) струм первинного контуру  $I_1$  збуджується генератором е.р.с.  $e_1$ , проходить через котушку індуктивності  $L_1$  з втратами  $r_1$  і збуджує магнітне поле, під дією якого у котушці  $L_2$  наводиться е.р.с. індукції (взаємоіндукції), яка, у свою чергу, збуджує (викликає) струм  $I_2$  у вторинному контурі. Далі, цей струм, проходячи через котушку індуктивності  $L_2$ , збуджує своє магнітне поле, під дією якого у котушці  $L_1$  наводиться е.р.с. індукції. Тобто, між контурами буде відбуватися обмін енергіями. Отже, у даній схемі опір зв'язку  $Z_{зв} = j\omega M$ , де  $M$  – взаємоіндуктивність між котушками  $L_1$  та  $L_2$ .

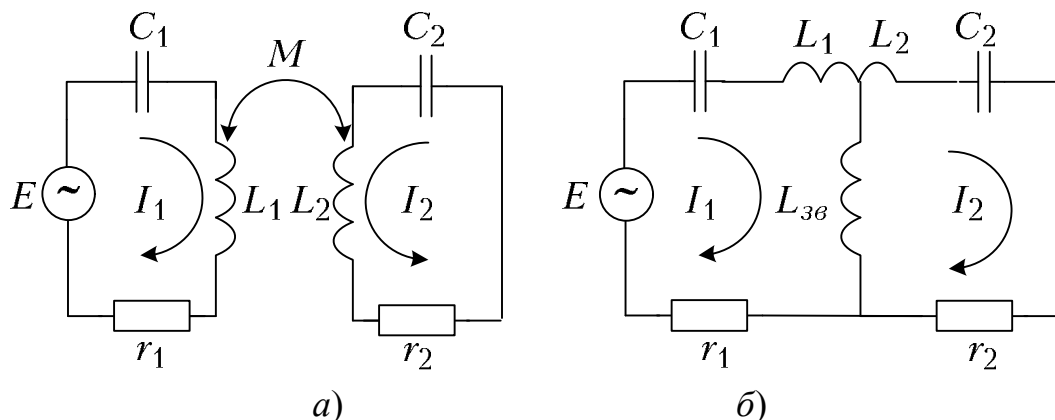


Рисунок 2.1 – Системи двох контурів: а) – з трансформаторним та б) – автотрансформаторним зв'язками

У схемі з автотрансформаторним зв'язком (рис. 2.1,б) у первинному контурі генератор е.р.с.  $e_1$  збудить її струм, збудить у котушці

$L_{3\phi}$  е.р.с. самоіндукції, яка одночасно належить і вторинному контуру і у ньому збудить струм  $I_2$ . Цей струм, протікаючи через котушку зв'язку, збудить у ній е.р.с. самоіндукції, що приводить до обміну енергіями між контурами. Очевидно, опором зв'язку у даній схемі буде  $Z_{3\phi} = j\omega L_{3\phi}$ .

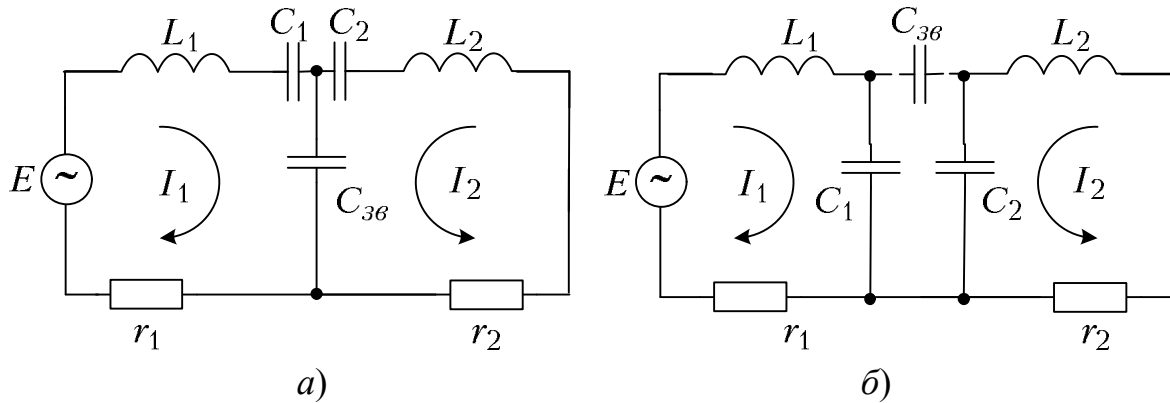


Рисунок 2.2 – Системи двох контурів: а) – з внутрішньоємнісним та б) – зовнішньоємнісним зв'язками

У схемі з внутрішньоємнісним зв'язком (рис. 2.2,а) елементом зв'язку слугує конденсатор  $C_{3\phi}$ , на якому струм первинного контуру  $I_1$  утворює напругу (цей конденсатор заряджається), яка викликає струм вторинного контуру  $I_2$ . Останній, у свою чергу, створить на конденсаторі свою напругу, яка буде впливати на струм у первинному контурі, що приводить до обміну енергіями між контурами. Опір зв'язку, очевидно,  $Z_{3\phi} = 1/j\omega C_{3\phi}$ .

У схемі із зовнішньоємнісним зв'язком (рис. 2.2,б) елементом зв'язку є конденсатор  $C_{3\phi}$  у який відійде частина струму первинного контуру  $I_1$ . На цьому конденсаторі утвориться напруга, яка викличе струм у вторинному контурі  $I_2$ . Частина цього струму відійде у конденсатор зв'язку, напруга на якому вплине на струм у первинному контурі, тобто, матимемо процес обміну енергіями між контурами. Опір зв'язку  $Z_{3\phi} = 1/j\omega C_{3\phi}$ .

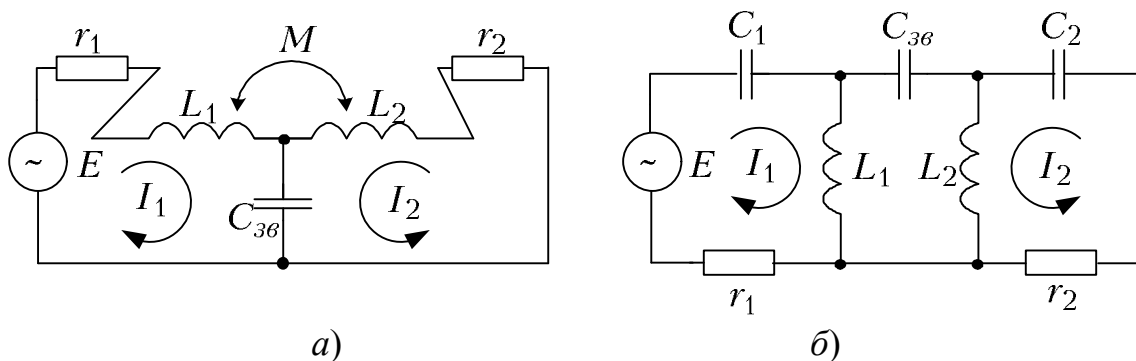


Рисунок 2.3 – Системи двох контурів з індуктивно ємнісними зв'язками



У схемах з індуктивно ємнісними (комбінованими) (рис. 2.3) зв'язками струм у первинному контурі, протікаючи через котушку  $L_1$  і конденсатор  $C_{3\phi}$  наведе у котушці  $L_2$  е.р.с. взаємоіндукції і створить напругу на конденсаторі  $C_{3\phi}$ , які і збудять струм  $I_2$  у вторинному контурі. Струм  $I_2$ , протікаючи через котушку  $L_2$  і конденсатор  $C_{3\phi}$  наведе у котушці  $L_1$  е.р.с. взаємоіндукції і створить, у свою чергу, напругу на конденсаторі  $C_{3\phi}$ , вплинувши таким чином на струм первинного контуру  $I_1$ . Отже, існуватиме обмін енергіями між контурами. Опір зв'язку  $Z_{3\phi} = j\omega M + 1/j\omega C_{3\phi}$ .

## 2.2 Коефіцієнт зв'язку

**Коефіцієнт зв'язку** є кількісною оцінкою "сили" зв'язку між контурами. При великих значеннях цього коефіцієнта говорять про сильний зв'язок, при малих – про слабкий зв'язок між контурами.

Значення коефіцієнта зв'язку  $K_{3\phi}$  отримаємо, виходячи з коефіцієнта передачі напруги від одного контуру до іншого.

Наприклад, розімкнемо вторинний контур системи з трансформаторним зв'язком і визначимо, яку частину напруги від усієї котушки індуктивності первинного контуру  $L_1$  (рис. 2.1,а) складає напруга, що знімається з опору зв'язку  $\omega M$ . Очевидно, це і є коефіцієнт передачі напруги від первинного контуру до вторинного:

$$K_{12} = \frac{U_{3\phi}}{U_{L1}} = \frac{I_1 \omega M}{I_1 \omega L_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{M}{L_I},$$

де через  $L_I$  позначена уся індуктивність первинного контуру, яка у даному прикладі дорівнює індуктивності котушки  $L_1$ .

Аналогічно, коефіцієнт передачі напруги з вторинного контуру у первинний є відношення напруги, що передається ( $U_{3\phi} = I_2 \omega M$ ) до напруги на котушці  $L_{II}$ : де  $L_2$  – вся індуктивність вторинного контуру, яка у даному прикладі дорівнює

$$K_{21} = \frac{U_{3\phi}}{U_{L2}} = \frac{I_2 \omega M}{I_2 \omega L_2} = \frac{M}{L_2} = \frac{M}{L_{II}},$$

індуктивності  $L_2$ .

Загальний коефіцієнт зв'язку  $K_{3\phi}$  підраховується як середнє геометричне від коефіцієнтів  $K_{12}$  і  $K_{21}$ .

$$K_{3\phi} = \sqrt{K_{12} \cdot K_{21}} = \frac{M}{\sqrt{L_I \cdot L_{II}}}. \quad (2.1)$$

Помноживши чисельник і знаменник виразу (2.1) на  $\omega$ , отримаємо:

$$K_{3\phi} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_I \cdot \omega L_{II}}} = \frac{X_{3\phi}}{\sqrt{X_I \cdot X_{II}}}, \quad (2.2)$$

де  $X_{3\phi}$ ,  $X_I$  та  $X_{II}$  – реактивні опори елемента зв'язку, первинного та вторинного контурів, які мають (усі три) однаковий характер реактивності (індуктивний, як у цьому прикладі).

Виходячи з цих позицій, отримаємо вирази для  $K_{3\phi}$  для схем з автотрансформаторним, внутрішньоємнісним та зовнішньоємнісним зв'язками.

Для схеми з автотрансформаторним зв'язком (рис. 2.1,б), де струм первинного контуру  $I_1$  послідовно протікає через котушки  $L_1$  та  $L_{3\phi}$ ; індуктивність  $L_I = L_1$  і  $L_{3\phi}$ ; струм  $I_2$  послідовно протікає через котушку  $L_2$  та  $L_{3\phi}$ , тому  $L_{II} = L_2 + L_{3\phi}$  і формула (2.2) запишеться так:

$$K_{3\phi} = \frac{\omega L_{3\phi}}{\sqrt{\omega(L_1 + L_{3\phi}) \cdot \omega(L_2 + L_{3\phi})}} = \frac{L_{3\phi}}{\sqrt{(L_1 + L_{3\phi}) \cdot (L_2 + L_{3\phi})}}$$

Для схеми з внутрішньоємнісним зв'язком (рис. 2.2,а), де струм  $I_1$  послідовно протікає через конденсатори  $C_1$  та  $C_{3\phi}$ , а струм  $I_2$  – через конденсатори  $C_2$  та  $C_{3\phi}$  формула (2.2) запишеться так:

$$K_{3\phi} = \frac{1}{\frac{\omega C_{3\phi}}{\sqrt{\frac{1}{\omega C_I} \cdot \frac{1}{\omega C_{II}}}}} = \frac{\sqrt{C_I \cdot C_{II}}}{C_{3\phi}} \quad (2.3)$$

де  $C_I = \frac{C_1 \cdot C_{3\phi}}{C_1 + C_{3\phi}}$  – вся ємність первинного контуру,  $C_{II} = \frac{C_2 \cdot C_{3\phi}}{C_2 + C_{3\phi}}$  – вся ємність вторинного контуру. Таким чином:

$$K_{3\phi} = \sqrt{\frac{C_1 \cdot C_2}{(C_1 + C_{3\phi})(C_2 + C_{3\phi})}} \quad (2.4)$$

На практиці найчастіше  $C_{3\phi} \ll C_1$ ,  $C_{3\phi} \ll C_2$  і тоді:  $K_{3\phi} \approx 1$ . Для схеми із зовнішньоємнісним зв'язком (рис. 2.2,б):

$$K_{3\phi} = \frac{C_{3\phi}}{\sqrt{(C_1 + C_{3\phi})(C_2 + C_{3\phi})}} \quad (2.5)$$

Коли  $C_{3\phi} \ll C_1$ ,  $C_{3\phi} \ll C_2$ ,  $K_{3\phi} \approx C_{3\phi} / \sqrt{C_1 \cdot C_2}$ .

З викладеного бачимо, що коефіцієнт зв'язку у будь-якій з розглянутих схем можна збільшити, змінюючи опір зв'язку, шляхом: збільшення взаєміндуктивності  $M$  у трансформаторній схемі; збільшення індуктивності котушки зв'язку  $L_{3\phi}$  в автотрансформаторній схемі; зменшення ємності конденсатора зв'язку у внутрішньоємнісній схемі; збільшення ємності конденсатора зв'язку у зовнішньоємнісній схемі.

### 2.3 Вхідний опір двох контурів з трансформаторним зв'язком

Розмова буде йти про схему системи двох контурів з трансформаторним зв'язком, зображену на рис. 2.1,а. Оскільки опір зв'язку

$X_{зв} = \omega L$ , то його можна уявити як опір елемента схеми через який протікають струми  $I_1$  (первинний контур) і  $I_2$  (вторинний контур), бо сам елемент зв'язку, очевидно, є спільним для обох контурів. Отже, схему системи двох трансформаторно зв'язаних контурів можна зобразити рис. 2.4 і назвати її узагальненою схемою заміщення.

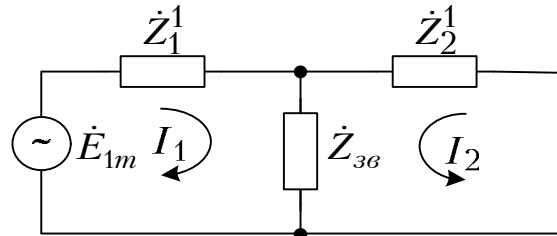


Рисунок 2.4 – Узагальнена схема заміщення системи двох зв'язаних контурів

Очевидно, у такий спосіб можна подати функціональні відношення між елементами будь-якої системи двох зв'язаних контурів, що і дозволяє у назву схеми рис. 2.4 вводити слово "узагальнена".

Оскільки початкову фазу генератора гармонічної е.р.с. можемо прийняти рівною нулю, то  $\dot{E}_{1m} = E_{1m}$ .  $Z_{зв}$  – опір зв'язку між контурами,  $\dot{Z}_1^1 + \dot{Z}_{зв} = \dot{Z}_1$  – повний опір первинного,  $\dot{Z}_2^1 + \dot{Z}_{зв} = \dot{Z}_2$  – повний опір вторинного контурів.

Запишемо другий закон Кірхгофа для цих контурів:

$$E_{1m} = (\dot{Z}_1^1 + \dot{Z}_{зв})\dot{I}_{1m} + \dot{Z}_{зв}\dot{I}_{2m} = \dot{Z}_1\dot{I}_{1m} + \dot{Z}_{зв}\dot{I}_{2m};$$

$$0 = (\dot{Z}_2^1 + \dot{Z}_{зв})\dot{I}_{2m} + \dot{Z}_{зв}\dot{I}_{1m} = \dot{Z}_2\dot{I}_{2m} + \dot{Z}_{зв}\dot{I}_{1m}.$$

З другого рівняння знайдемо  $\dot{I}_{2m} = -\dot{I}_{1m}\dot{Z}_{зв} / \dot{Z}_2$  і підставимо його у перше рівняння:

$$E_{1m} = \left( \dot{Z}_1 \dot{I}_{1m} + \frac{\dot{Z}_{зв}^2}{\dot{Z}_2} \right), \quad \dot{I}_{1m} = \dot{I}_{1m} \left( \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_{зв}^2}{\dot{Z}_2} \right).$$

В останньому виразі, у дужках, маємо опір, який буде сприймати генератор  $E_{1m}$  у точках 1-1, віддаючи струм  $I_{1m}$  у систему двох контурів (рис. 2.4), тобто:  $E_{1m} = I_{1m} Z_{ex}$ . Звідки вхідний опір системи буде комплексним і дорівнюватиме:

$$\dot{Z}_{ex} = \dot{Z}_1 - \frac{\dot{Z}_{зв}^2}{\dot{Z}_2}. \quad (2.6)$$

Для схеми рис. 2.1,а:  $r_1$  – активний опір,  $x_1 = \omega L_1 - 1/\omega C_1$  – реактивний опір первинного контуру;  $r_2$  – активний опір,  $x_2 = \omega L_2 - 1/\omega C_2$  – реактивний опір вторинного контуру,  $Z_{зв} = j\omega L$  – опір зв'язку.

Тоді рівняння (2.6) можна переписати у вигляді:

$$\dot{Z}_{\text{ex}} = r_1 + jx_1 - \frac{(jx_{3\phi})^2}{r_2 + jx_2},$$

де  $\dot{Z}_{\text{ex}}$  є комплексним числом, яке можна записати в алгебричній формі як  $R_{\text{ex}} + jX_{\text{ex}}$ , тобто

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{\text{ex}} = R_{\text{ex}} + jX_{\text{ex}} &= r_1 + jx_1 - \frac{(jx_{3\phi})^2}{r_2 + jx_2} \cdot \frac{r_2 + jx_2}{r_2 + jx_2} = \\ &= r_1 + jx_1 + \frac{x_{3\phi}^2 r_2}{r_2^2 + x_2^2} - j \frac{x_{3\phi} x_2}{r_2^2 + x_2^2} = \\ &= r_1 + \frac{x_{3\phi}^2 r_2}{r_2^2 + x_2^2} - j \left( x_1 - \frac{x_{3\phi}^2 x_2}{r_2^2 + x_2^2} \right); \end{aligned}$$

де:  $\sqrt{r_2^2 + x_2^2} = Z_2$  – модуль повного комплексного опору вторинного контуру.

З отриманого виразу маємо, що вхідний опір системи є комплексним, який складається з активної частини:

$$R_{\text{ex}} = r_1 + \frac{x_{3\phi}^2 r_2}{r_2^2 + x_2^2} \quad (2.7)$$

та реактивної частини:

$$X_{\text{ex}} = x_1 - \frac{x_{3\phi}^2 x_2}{r_2^2 + x_2^2}. \quad (2.8)$$

Комплексність вхідного опору говорить про те, що е.р.с. генератора  $e_1$  і струм генератора  $I_1$  зсунуті за фазою на кут

$$\varphi_{\text{ex}} = \text{arctg}(X_{\text{ex}}/R_{\text{ex}}). \quad (2.9)$$

#### 2.4 Внесені опори та їхній фізичний зміст

При відсутності (або роз'єднанні) вторинного контуру  $R_{\text{ex}} = r_1$  та  $X_{\text{ex}} = x_1$  ( $M = 0$ ,  $X_{\text{ex}} = 0$ ). Звідси випливає, що другі доданки у формулах (2.7) і (2.8) обумовлені вторинним контуром і називаються активною  $R_{\text{вн}}$  і реактивною  $X_{\text{вн}}$  складовими внесеного комплексного опору із вторинного контуру у первинний, тобто

$$R_{\text{ex}} = \frac{x_{3\phi}^2 r_2}{r_2^2 + x_2^2}, \quad (2.10)$$

$$X_{\text{ex}} = -\frac{x_{3\phi}^2 x_2}{r_2^2 + x_2^2}, \quad (2.11)$$

$$R_{\text{ex}} = r_1 + r_{\text{вн}}, X_{\text{ex}} = x_1 + x_{\text{вн}}. \quad (2.12)$$

Знак "мінус" у виразі (2.11) говорить про те, що реактивний опір  $x_{\text{вн}}$ , який вноситься у первинний контур із вторинного, за знаком завжди є

протилежним власному реактивному опору вторинного контуру  $x_2$ .

Отже, при розрахунку струму генератора е.р.с.  $I_{1m}$  систему двох зв'язаних контурів можна замінити одним послідовним контуром, який складатиметься із послідовно з'єднаних елементів з параметрами  $R_{ex} = r_1 + r_{en}$ ,  $X_{ex} = x_1 + jx_{en}$  (рис. 2.5).

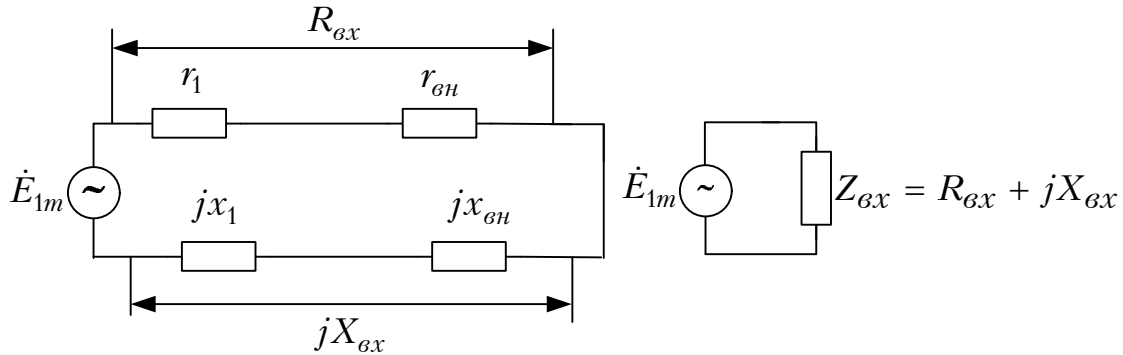


Рисунок 2.5 – Схеми заміщення системи двох зв'язаних контурів

Побудуємо векторну діаграму системи двох контурів з трансформаторним зв'язком (рис. 1.1,а), коли кожен з цих контурів порізно настроєні у резонанс на частоту генератора  $\omega_0$ , тобто  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$  (рис. 2.6,а).

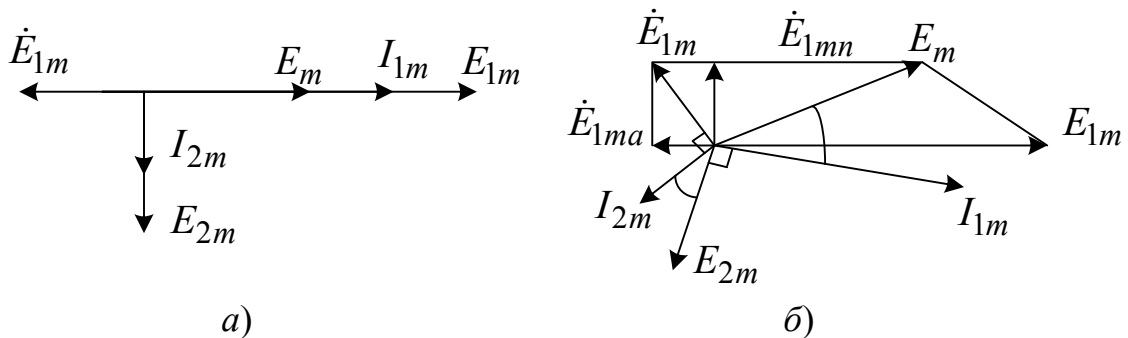


Рисунок 2.6 – Векторні діаграми струмів та е.р.с. у контурах з трансформаторним зв'язком

Вихідним (рис. 2.6,а) вважатимемо довільно зорієнтований вектор е.р.с. генератора  $E_{1m}$ . У зазначеному випадку  $x_1 = x_2 = 0$ , а тому струм первинного контуру  $I_{1m}$  збігатиметься за фазою з е.р.с. генератора. Струм  $I_{1m}$  наводить у витках котушки  $L_2$  е.р.с. взаємодукції  $\dot{E}_{2m} = -I_{1m}(j\omega_0 M) = -j\omega_0 M I_{1m} = E_{2m} e^{-j\pi/2}$  (де  $E_{2m} = \omega_0 M I_{1m}$ ), яка за фазою відставатиме від струму  $I_{1m}$  на  $90^\circ$ . Оскільки вторинний контур настроєний у резонанс, то  $X_2 = 0$ , струм у вторинному контурі збігатиметься з  $E_{2m}$  за фазою і дорівнюватиме

$$I_{2m} = \frac{E_{2m}}{r_2} = \frac{I_{1m} \omega_0 M}{r_2}.$$

У свою чергу, струм  $I_{2m}$  наведе у котушці  $L_1$  е.р.с. індукції  $\dot{E}_{1m}^1 = -I_{2m}(j\omega_0 M) = E_{1m}^1 e^{-j\pi/2}$  (де  $E_{1m}^1 = \omega_0 M I_{2m}$ ), яка за фазою відставатиме від струму  $I_{2m}$  на  $90^\circ$ , амплітуда якої дорівнюватиме

$$E_{1m}^1 = \frac{I_{1m}(\omega_0 M)^2}{r_2}.$$

З векторної діаграми видно, що е.р.с.  $E_{1m}$  генератора знаходиться у протилежній фазі з наведеною (внесеною у первинний контур) е.р.с.  $E_{1m}^1$ . Це означає, що струм генератора  $I_{1m}$  дорівнює відношенню результуючої е.р.с. у первинному контурі  $(E_{1m} = E_{1m} - E_{1m}^1)$  до опору  $r_1$ , бо  $x_1 = 0$ :

$$I_{1m} = \frac{E_{1m} - E_{1m}^1}{r_1} = \frac{E_{1m}}{r_1} - \frac{I_{1m}(\omega_0 M)^2}{r_1 \cdot r_2}.$$

Звідси:

$$E_{1m} = I_{1m} \cdot r_1 + I_{1m} \frac{(\omega_0 M)^2}{r_2} = I_{1m} \left( r_1 + \frac{(\omega_0 M)^2}{r_2} \right),$$

$$\frac{E_{1m}}{I_{1m}} = R_{ex} = r_1 + \frac{(\omega_0 M)^2}{r_2} = r_1 + r_{ен}. \quad (2.13)$$

Цей же результат легко отримати з виразів (2.10), (2.11) та (2.12), поклавши в них  $x_1 = x_2 = 0$ .

З викладеного випливає, що один і той же струм генератора можна отримати за двома формулами:

$$I_{1m} = \frac{E_{1m} - E_{1m}^1}{r_1}, \quad I_{1m} = \frac{E_{1m}}{r_1 + r_{ен}}. \quad (2.14)$$

Висновок такий: друга формула (2.14) дозволяє за заданими параметрами елементів системи зв'язаних контурів розрахувати значення струму генератора, який працює на цю систему, а перша – відображає фізичну суть ефекту зменшення струму  $I_{1m}$  при підмиканні вторинного контуру. Опір  $r_{ен}$  являє собою для генератора таке ж навантаження, як весь вторинний контур.

Іншими словами, ніякий опір  $r_{ен}$  у первинний контур не вноситься, а фізика явища полягає в індукуванні у первинному контурі протиелектрорушійної сили, що і призводить до зменшення струму у цьому контурі.

Потужність  $P_2$ , яка передається у вторинний контур, чисельно дорівнює потужності, що витрачається у еквівалентній схемі у внесеному на первинний контур опорі  $r_{ен}$ . Доведемо це. Потужність

$$P_2 = 0.5 I_{2m}^2 \cdot r_2 = 0.5 \left( I_{1m} \frac{(\omega_0 M)}{r_2} \right)^2 r_2 = 0.5 I_{1m}^2 \frac{(\omega_0 M)^2}{r_2} = 0.5 I_{1m}^2 r_{ен},$$

що і мали довести.

Тепер розглянемо загальний випадок, коли зв'язані контури настроєні довільно так, що  $\omega > \omega_{01}$ ,  $\omega > \omega_{02}$  і  $\omega_{01} \neq \omega_{02}$  (рис. 2.6,б). Первинний та вторинний контури є послідовними контурами, а тому за вибраних умов характеру їх вхідних опорів будуть індуктивними. Побудуємо векторну діаграму, довільно вибравши напрямок е.р.с.  $E_{1m}$ . Оскільки вхідний опір первинного контуру – індуктивний, то струм цього контуру  $I_{1m}$  відставатиме від е.р.с. на кут  $\varphi_{ex} = \arctg(X_{ex}/R_{ex})$ . Струм  $I_{1m}$ , протікаючи через котушку  $L_1$ , наведе у котушці  $L_2$  е.р.с. індукції  $E_{2m} = -I_{1m}j\omega M$ , яка відстане від цього струму на  $90^\circ$ . Е.р.с.  $E_{2m}$  збудить у вторинному контурі струм  $I_{2m}$ , який через індуктивний характер опору цього контуру, відстане від е.р.с.  $E_{2m}$  на кут  $\varphi_2$ . Струм  $I_{2m}$ , протікаючи через котушку  $L_2$ , наведе у котушці  $L_1$  е.р.с. індукції  $E_{1m}^1 = -I_{2m}\omega M$ , яка відстане від цього струму на  $90^\circ$ . Додавши, нарешті, вектори  $E_{1m}$  та  $E_{1m}^1$ , отримаємо результуючу е.р.с.  $E_{m1}$ , що діятиме у первинному контурі і призведе до зміни його струму. Між векторами  $E_m$  та  $I_{1m}$  буде кут  $\varphi_1 = \arctg(x_1/r_1)$ . Іншими словами, струм вторинного контуру  $I_{2m}$  наводиться е.р.с.  $E_{1m}^1$  і, таким чином, змінює струм первинного контуру  $I_{1m}$  не тільки за величиною, але і за фазою. Це підтверджується наявністю двох складових вектора  $\dot{E}'_{1m}$ : активної  $\dot{E}'_{1ma}$  та реактивної  $\dot{E}'_{1mp}$ . Напрямок активної складової протилежний напрямку вектора  $\dot{E}'_{1m}$ , що виражається у внесенні у первинний контур активного опору  $r_{ен}$ . Внесений реактивний опір  $X_{ен} = -\frac{X_2(\omega M)^2}{r_2^2 + x_2^2}$  буде мати знак, протилежний власному реактивному опору (нагадуємо, індуктивному) вторинного контуру, тобто буде мати ємнісний характер. Це і підтверджується векторною діаграмою, бо відставання, за рахунок  $\dot{E}'_{1m}$ , струму  $I_{1m}$  за фазою від е.р.с. генератора зменшилось від  $\varphi_1$ , до  $\varphi_{ex}$  (на кут  $(\varphi_1 - \varphi_{ex})$ ).

Під впливом е.р.с.  $\dot{E}'_{1m}$  струм первинного контуру змінюється до:

$$\dot{I}_{1m} = \frac{E_m}{\dot{Z}_1} = \frac{\dot{E}_{1m} + \dot{E}'_{1m}}{\dot{Z}_1} = \frac{\dot{E}_{1m} + \dot{E}'_{1m}}{r + jx_1};$$

а за рахунок внесених опорів змінюється до

$$\dot{I}_{1m} = \frac{E_m}{\dot{Z}_{ex}} = \frac{E_m}{R_{ex} + jX_{ex}} = \frac{E_1}{(r_1 + r_{ен}) + j(x_1 + x_{ен})}.$$

Таким чином, за будь-яких умов внесені опори є умовними (формальними) поняттями, за допомогою яких зручно розраховувати зміну струму  $I_{1m}$  під впливом вторинного контуру, який зводиться до наведення у первинному контурі е.р.с.

Інакше кажучи, внесений опір є формальним зручним поняттям і ніякого фізичного змісту не має.

## 2.5 Настроювання систем двох зв'язаних контурів

Розглянемо систему двох трансформаторно зв'язаних контурів як чотириполюсник (рис. 2.7).

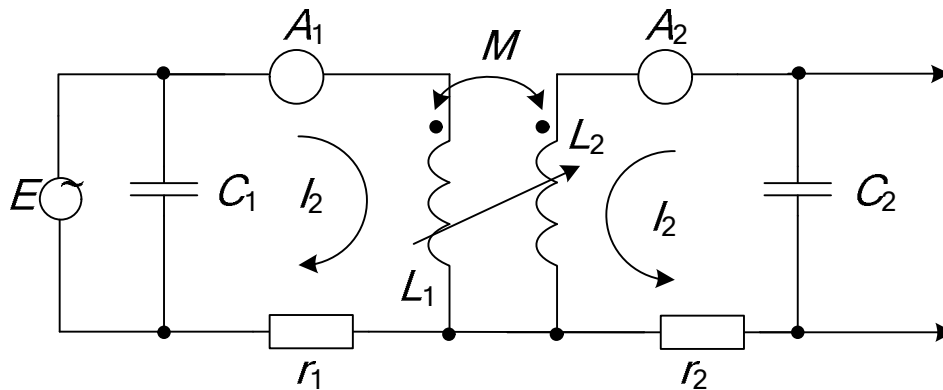


Рисунок 2.7 – Зв'язані контури як чотириполюсник

На вхідних полюсах такого чотириполюсника діє гармонічна е.р.с.  $I_1 = E_{1m} \cos(\omega t)$ , комплексна амплітуда якої дорівнює  $\dot{E}_{1m} = E_{1m}$ . Реакцією системи на цю дію будемо вважати струм у вторинному контурі  $I_{2m}$  або пропорційну йому вихідну напругу  $U_{2m}$ , яка знімається з конденсатора  $C_2$ .

Коливальна потужність  $P_k$ , що підводиться від генератора, витрачається у первинному ( $P_1$ ) та вторинному колах. Якщо система контурів використовується у потужному пристрої (у передавачеві, наприклад), то головною метою є – отримання більшої потужності  $P_2$  при можливо великому к.к.д. первинного контуру, як передавальної ланки від генератора.

Тобто к.к.д. цієї ланки:

$$\eta = \frac{P_2}{P_{k_k}} = \frac{P_k}{P_1 + P_2}. \quad (2.15)$$

Коли ж система контурів використовується у малопотужному пристрої, наприклад, у приймачеві, найважливішим є отримання максимального значення коефіцієнта передачі за напругою:

$$K = \frac{U_{2m}}{E_{1m}}.$$

Звичайно, досягти однієї будь-якої мети із зазначених вище не можливо через тісний зв'язок між ними. Наприклад, струм  $I_1$  з одного боку визначатиме і значення напруги на виході контуру  $U_2$  і значення потужності  $P_2$  (корисної частини потужності генератора  $P_k$ ) одночасно. Тому в інженерній практиці треба шукати оптимальне рішення, яке одночасно задовольнило б обидві ці вимоги, сформульовані у технічному завданні на розробку певного радіотехнічного пристрою.



Відомі чотири способи настроювання системи двох трансформаторно зв'язаних контурів (рис. 2.7) і при цьому у нас є три елементи настроювання: конденсатори змінної ємності  $C_1$  і  $C_2$  та зміна ступеня ("сили") індуктивного зв'язку між контурами  $K_{зв}$ . У будь-якому випадку метою будемо вважати – отримання максимального значення струму  $I_2$ .

**Перший частинний резонанс** досягається настроюванням тільки первинного контуру (змінюванням ємності  $C_1$ ), **другий частинний резонанс** – настроюванням лише вторинного контуру (змінюванням ємності  $C_2$ ), **повний резонанс** – настроюванням первинного потім вторинного контурів з наступним підбором ступеня зв'язку між ними (змінюванням опору зв'язку  $\omega M$ ), **складний резонанс** передбачає по чергове застосування одного з частинних резонансів і підбору ступеня зв'язку між контурами.

### 2.5.1 Перший частинний резонанс

Запишемо вирази для струмів первинного та вторинного контурів до настроювання.

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{(r_1 + r_{\text{вн}})^2 + (x_1 + x_{\text{вн}})^2}}, \quad (2.16)$$

$$I_2 = \frac{E_1 \cdot \omega M}{\sqrt{(r_1 + r_{\text{вн}})^2 + (x_1 + x_{\text{вн}})^2} \cdot Z_2}. \quad (2.17)$$

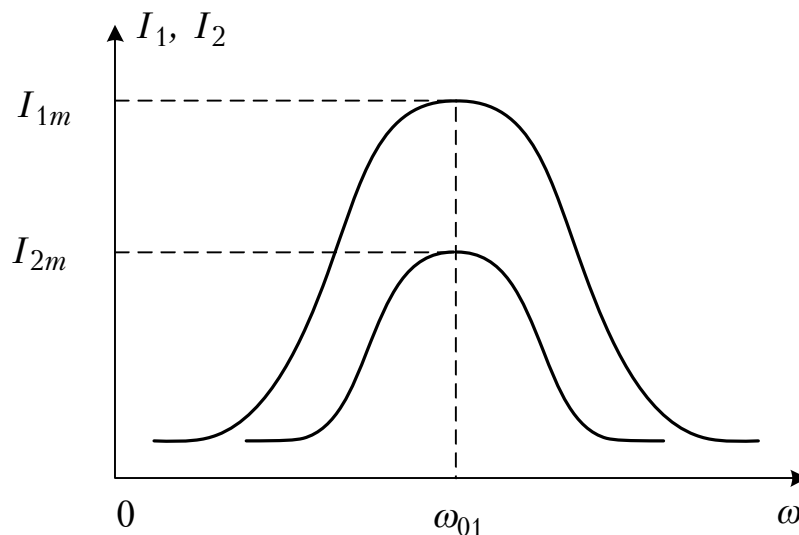


Рисунок 2.8 – Залежність струмів у контурах при настроюванні системи на 1-й частинний резонанс

Підтримуючи незмінною частоту генератора  $\omega$  та діюче значення е.р.с.  $E_1$ , змінюванням  $C_1$  будемо змінювати  $x_1$  і, коли воно дорівнюватиме  $x_{\text{вн}}$  з протилежним знаком ( $x + x_{\text{вн}}=0$ ), струми у обох контурах (рис. 2.8) зростуть до максимальних значень:

$$I_{2m} = \frac{E_1}{r_1 + r_{\text{вн}}},$$

$$I_{2m} = \frac{E_1 \cdot \omega M}{(r_1 + r_{\text{вн}}) \cdot Z_2}.$$

Максимум струмів спостерігається на частоті генератора  $\omega_{01} = \omega$ , яка є частотою власних коливань первинного контуру.

Значення цієї частоти легко визначити з умови:

$$\omega_{01} L_{01} - \frac{1}{\omega_{01} C_1} = \frac{-(\omega_{01} M)^2 \left( \omega_{01} L_2 - \frac{1}{\omega_{01} C_2} \right)}{r_2^2 + \left( \omega_{01} L_2 - \frac{1}{\omega_{01} C_2} \right)^2},$$

яка гарантує повну компенсацію власним реактивним опором первинного контуру  $x_1$  внесеного реактивного опору  $x_{\text{вн}}$  у первинний контур з вторинного. Внесений активний опір  $r_{\text{вн}}$  у сумі з власним опором  $r_1$  обмежують зростання струму  $I_1$  при настроюванні. Пропорційно струму  $I_1$  зростатиме струм  $I_2$ , значення якого завжди залишається меншим від першого.

### 2.5.2 Другий частинний резонанс

Тепер залишатимуться незмінними частота генератора  $\omega$ , реактивний опір первинного контуру  $x_1$  та діюче значення е.р.с. генератора  $E_1$ . Максимум струму  $I_{2m}$  досягнемо змінням ємності конденсатора  $C_2$  вторинного контуру. Це станеться через зменшення опору цього контуру за рахунок повної компенсації власним реактивним опором реактивного опору, внесеного з первинного контуру. Тобто, опір вторинного контуру стає чисто активним і мінімальним.

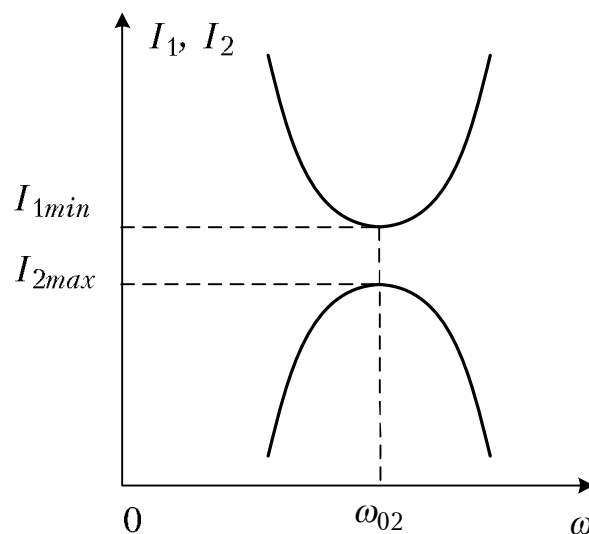


Рисунок 2.9 – Залежність струмів у контурах при настроюванні системи на 2-й частинний резонанс

Зростання струму  $I_2$  призведе до зростання е.р.с. індукції  $E_1'$  у первинному контурі (зростання активного  $r_{вн}$  та реактивного  $x_{вн}$  опорів). У результаті цього зменшуватиметься струм у первинному контурі  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{(r_1 + r_{вн})^2 + (x_1 + x_{вн})^2}}.$$

На деякій частоті  $\omega_{02}$  (власній частоті вторинного контуру), яка при резонансі у вторинному контурі дорівнюватиме частоті генератора е.р.с.  $E_1$ , струм  $I_2$  досягне максимального, а струм  $I_1$  – мінімального значення. Маємо пам'ятати, що струм  $I_1$  завжди залишатиметься більшим за струм  $I_2$ , бо:

$$I_{2m} = \frac{E_1 \cdot \omega M}{\sqrt{(r_1 + r_{вн})^2 + (x_1 + x_{вн})^2} \cdot (r_2 + r_{2вн})},$$

де  $r_{2вн}$  – активний опір, внесений у вторинний контур з первинного.

### 2.5.3 Повний резонанс

Згадаємо, що до настроювання системи двох зв'язаних контурів, струми  $I_1$  та  $I_2$  дорівнювали:

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{x_{3в}^2 \cdot r_2}{r_2^2 + x_2^2}\right)^2 + \left(x_1 - \frac{x_{3в}^2 \cdot x}{r_2^2 + x_2^2}\right)^2}},$$

$$I_2 = \frac{E_1 \cdot x_{3в}}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{x_{3в}^2 \cdot r_2}{r_2^2 + x_2^2}\right)^2 + \left(x_1 - \frac{x_{3в}^2 \cdot x}{r_2^2 + x_2^2}\right)^2} \cdot \sqrt{r_2^2 + x_2^2}}.$$

Настроювання на повний резонанс складається з трьох етапів:

1. При відімкненому вторинному контурі настроюється первинний контур і отримується у ньому значення найбільшого струму  $I_{1m}$ . Оскільки йдеться про одиничний послідовний контур, то це буде на частоті власних коливань  $\omega_0$ , яка дорівнюватиме частоті, на якій працює генератор е. р. с.  $E_1$  і при цьому  $x_1=0$ , а струм  $I_1$ :

$$I_{1m} = \frac{E_1}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{x_{3в}^2 \cdot r_2}{r_2^2 + x_2^2}\right)^2 + \left(r_1 + \frac{x_{3в}^2 \cdot r_2}{r_2^2 + x_2^2}\right)^2}}.$$

2. Між контурами встановлюємо слабкий зв'язок. Слабкий настільки, що внесеними з першого у другий контури опорами можна знехтувати і вважати, що струм  $I_2$  досягне максимального значення  $I_{2m}$  при  $x_2=0$ , як у одиничному контурі, коли його власна частота дорівнюватиме  $\omega_{02}$ . Отже, після цих двох етапів настроювання  $X_1=0$  та  $X_2=0$ , а значить:

$$X_{вн} = -\frac{X_{3в}^2 \cdot X_2}{r_2^2 \cdot x_2^2} = 0; \quad X_{вн} = X_1 + X_{вн} = 0; \quad R_{вн} = r_1 + \frac{X_{3в}^2}{r_2};$$

$$I'_{1m} = \frac{E_1}{r_1 + \frac{X_{3\phi}^2}{r_2}} = \frac{E_1}{r_1 + \frac{(\omega_0 M)^2}{r_2}};$$

$$I'_{2m} = \frac{E_1 \cdot X_{3\phi}}{\left(r_1 + \frac{X_{3\phi}^2}{r_2}\right) \cdot r_2} = \frac{E_1 \cdot \omega_0 M}{\left(r_1 + \frac{(\omega_0 M)^2}{r_2}\right) \cdot r_2}. \quad (2.18)$$

Підсилюємо зв'язок між контурами до критичного (оптимального), при якому струм у вторинному контурі досягне граничного максимального значення (максимум максиморум).

$$I_{mm} = \frac{E_1 \cdot X_{kp}}{r_1 \cdot r_2 + X_{kp}^2} = \frac{E_1 \cdot \omega_0 M_{kp}}{r_1 \cdot r_2 + (\omega_0 M_{kp})^2}. \quad (2.19)$$

### Залежність струмів у контурах від зв'язку між ними

Виходячи з (2.18) бачимо, що  $I_1$  досягає максимального значення (рис. 2.10) при  $M=0$  ( $I_{1m}=E_1/r_1$ ) і  $I_{1kp}$  при  $M=M_{kp}$ :

$$I_{1kp} = \frac{E_1}{r_1 + \frac{(\omega_0 M_{kp})^2}{r_2}}.$$

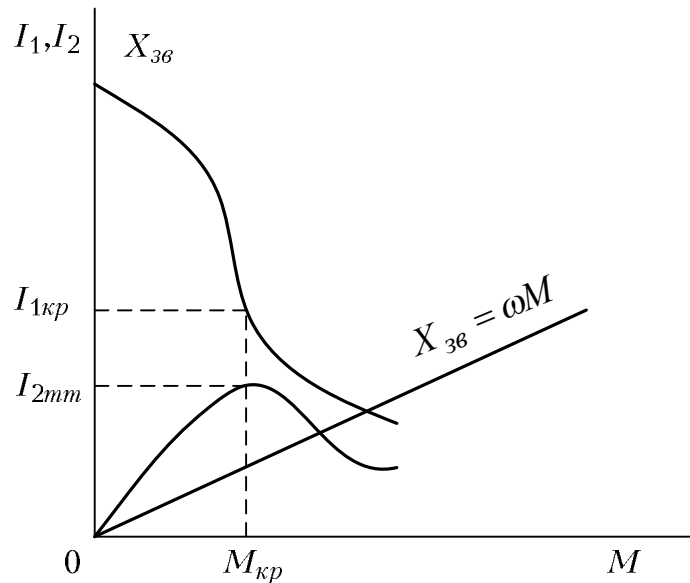


Рисунок 2.10 – Залежність струмів у контурах від взаємної індуктивності між ними

При  $M=M_{kp}$  струм  $I_2$  досягає екстремального (максимального) значення. Знайдемо значення опору зв'язку  $X_{kp}$ , при якому, перша похідна від функції  $I_2(X_{3\phi})$  за аргументом  $X_{3\phi}$  дорівнює нулю. Отже:

$$I_2(X_{3\phi}) = \frac{E_1}{r_1 \cdot r_2 + X_{3\phi}^2},$$

$$\left. \frac{dI_2(X_{36})}{dX_{36}} \right|_{X_{36}=X_{кр}} = \frac{r_1 \cdot r_2 + X_{кр}^2 - 2X_{кр}X_{36}}{(r_1 \cdot r_2 + X_{36}^2)^2} = 0,$$

звідки:

$$X_{36,кр} = X_{кз} = \sqrt{r_1 \cdot r_2}. \quad (2.20)$$

Підставивши (2.20) в (2.18) та (2.19), отримаємо значення струмів у контурах при повному резонансі:

$$I_{m1} = \frac{E_1}{r_1}; \quad I_{1кр} = \frac{E_1}{2r_1}. \quad (2.21)$$

$$I_{2mm} = \frac{E_1}{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}. \quad (2.22)$$

**Вихідна напруга** при повному резонансі  $U_{2mm}$ , яка знімається з конденсатора  $C_2$  (рис. 2.7) з опором  $\frac{1}{\omega_0 C}$  при однакових втратах ( $r_1=r_2=r$ )

та характеристичних опорах ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ), дорівнює:

$$U_{2mm} = \frac{E_1 \rho_2}{2\sqrt{r_2 r_1}} = \frac{E_1 \rho_2}{2r} = \frac{Q}{2} E_1;$$

а коефіцієнт передачі напруги:

$$K_{mm} = \frac{U_{2mm}}{E_1} = \frac{Q}{2} \quad (2.23)$$

виявився удвічі меншим, ніж резонансний коефіцієнт передачі напруги послідовного контуру.

### Енергетичні співвідношення при повному резонансі

Раніше ми пересвідчилися, що  $P_2$ , яка передається у вторинний контур, дорівнює потужності, що витрачається у внесеному опорі  $r_{вн}$ , тобто:

$$P_{2mm} = \frac{1}{2} I_{2mm}^2 \cdot r_2 = \frac{1}{2} I_{кр}^2 \cdot r_{вн}.$$

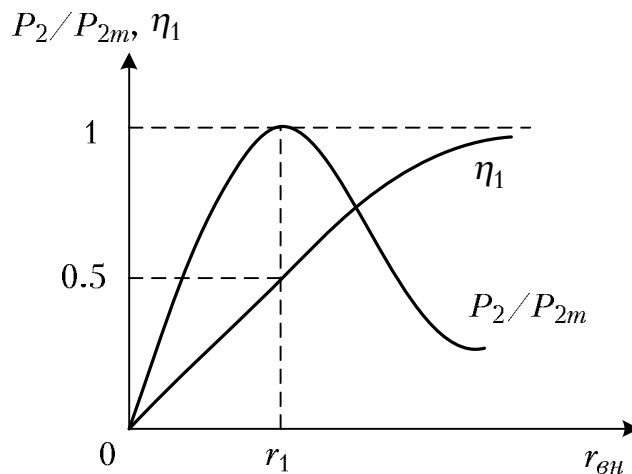


Рисунок 2.11 – Залежність енергетичних показників від активного внесеного опору

Пам'ятаючи, що  $P_k = P_1 + P_2 = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 = I_1^2 + I_2^2 r_{вн}$ ; коефіцієнт корисної дії первинного (передатної ланки) контуру:

$$\eta_1 = \frac{I_1^2 \cdot r_{вн}}{I_1^2 \cdot r_1 + I_1^2 \cdot r_{вн}} = \frac{r_{вн}}{r_1 + r_{вн}}.$$

З останнього виразу випливає, що з підсиленням зв'язку між контурами (зростанням  $r_{вн}$ ) к.к.д. неперервно зростає до 100%, приймаючи при повному резонансі значення 50% ( $r_1 = r_{вн\ кр}$ , а  $P_2 = P_1$ ).

У передавальних (потужних) пристроях особливо важливо мати високий к.к.д., а тому зв'язок між контурами вибирається закритичним ( $M > M_{кр}$ ,  $X_{зв} > X_{кр}$ ), хоч це і призводить до деякого зменшення корисної потужності  $P_2$ .

### Третя умова повного резонансу

Запишемо вираз (2.1) для схеми з трансформаторним зв'язком, настроєної у повний резонанс:

$$K_{кр} = \frac{M_{кр}}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{\omega_0 M_{кр}}{\sqrt{\omega_0 L_1 \cdot \omega_0 L_2}}.$$

Оскільки  $\omega_0 M_{кр} = X_{кр} = \sqrt{r_1 r_2}$  (2.29), то, підставивши його у останній вираз, отримаємо:

$$K_{кр} = \sqrt{\frac{(\omega_0 M_{кр})^2}{\omega_0 L_1 \cdot \omega_0 L_2}} = \sqrt{\frac{r_1 \cdot r_2}{\omega_0 L_1 \cdot \omega_0 L_2}} = \sqrt{\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2}} = \sqrt{d_1 d_2}. \quad (2.24)$$

Таким чином, до перших двох умов повного резонансу ( $X_1=0$ ,  $X_2=0$ ) додається третя:  $K_{кр} = \sqrt{d_1 d_2}$ . У випадку двох однакових зв'язаних контурів ( $d_1=d_2$ ),  $K_{кр}=d$  – повний резонанс настає, коли коефіцієнт зв'язку чисельно дорівнюватиме згасанню одного з цих контурів.

### Умова комплексно спряженого узгодження

Ще раз згадаємо, що у системі зв'язаних контурів генератор е.р.с.  $E_1$  працює на вторинний контур, який є навантаженням для нього, а первинний контур виконує роль передатної (проміжної) ланки. З першої частини посібника ми знаємо, що для виділення максимальної потужності у навантаженні його опір має бути комплексно спряженим з опором генератора. У даному випадку первинний контур має комплексний опір  $r_1 + jX_1$  при е.р.с.  $E_1$  і є генератором відносно внесеного комплексного опору  $r_{вн} + jX_{вн}$ . Отже, для отримання максимальної потужності у вторинному контурі має бути:  $r_1 = r_{вн}$ ,  $X_1 + X_{вн} = 0$ . ( $X_1 = -X_{вн}$ ).

### Частоти зв'язку

Одна з умов максимальної передачі потужності з первинного у вторинний контур ( $X_1 = -X_{вн}$ ) у застосуванні до однакових зв'язаних контурів без втрат ( $r_1 = r_{вн} = 0$ ) має вигляд:

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}};$$

або при  $L_1=L_2=L$ ;  $C_1=C_2=C$ :

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega^2 M^2}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}; \quad \omega^2 M^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2.$$

Якщо отриманий вираз розділити на  $\omega L$ , то, враховуючи що  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ ,

$\frac{M}{L} = K_{зв}$ , отримаємо:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 \pm K_{зв}.$$

Звідси, розв'язавши це рівняння, отримаємо два значення частоти генератора:

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + K_{зв}}}; \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - K_{зв}}}. \quad (2.25)$$

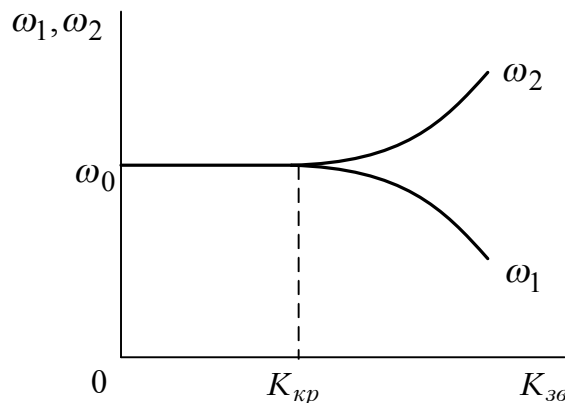


Рисунок 2.12 – Залежність частот зв'язку від  $K_{зв}$

Оскільки значення цих частот залежить від коефіцієнта зв'язку між контурами, то вони називаються частотами зв'язку. Це пояснюється таким чином: кожен зі зв'язаних контурів є послідовним; у такому разі при  $\omega < \omega_0$  опори  $X_1 < 0$ ,  $X_2 < 0$  та  $X_{вн} > 0$ . Коли ж  $\omega > \omega_0$ ,  $X_1 > 0$ ,  $X_2 > 0$  та  $X_{вн} < 0$ . Тобто, кожному коефіцієнту зв'язку  $K_{зв}$  відповідають дві частоти зв'язку ( $\omega_1 < \omega_0$ ,  $\omega_2 > \omega_0$ ), при яких  $X_1 = -X_{вн}$ . Крім того, чим більший  $K_{зв}$ , тим більший  $|X_{вн}|$  і тим більше знадобиться розстроювання, щоб повернутися до рівності  $X_1 = -X_{вн}$ . Через це при зростанні  $K_{зв}$  частоти  $\omega_1$  та  $\omega_2$  більше будуть відхилятися у різні боки від  $\omega_0$ .

В реальних контурах, які мають згасання  $d$ , розходження частот зв'язку відносно  $\omega_0$  починається не при  $K_{зв} = 0$  (як витікає з формули 2.25), а при переході від  $K_{кр}$ , (повного резонансу) до більших значень коефіцієнта зв'язку.

## 2.5.4 Амплітудно-частотні характеристики двох трансформаторно зв'язаних контурів

### Виведення рівняння АЧХ

Для системи двох однакових контурів, кожний з яких послідовний ( $r_1=r_2=r$ ,  $X_1=X_2=X$ ,  $Z_1=Z_2=Z=r(1+j\xi)$ ) та  $Z_{3\phi}=j\omega M$ , маємо:

$$I_1 = \frac{E_1}{\dot{Z}_{ex}} = \frac{E_1}{\dot{Z}_1 - \frac{(\dot{Z}_{3\phi})^2}{\dot{Z}_2}} = \frac{E_1}{\dot{Z}_1 + \frac{(\omega M)^2}{\dot{Z}}},$$

$$I_2 = \frac{I_1 \cdot \dot{Z}_{3\phi}}{\dot{Z}_{ex}} = \frac{-E_1 \cdot j\omega M}{\dot{Z}(\dot{Z} - \frac{(\omega M)^2}{\dot{Z}})} = \frac{-E_1 \cdot j\omega M}{\dot{Z}^2 + (\omega M)^2}.$$

Вихідна напруга  $\dot{U}_2$  знімається з конденсатора  $C_2$ , який має опір  $\frac{1}{j\omega C} \approx \frac{1}{j\omega_0 C} = -j\rho$ .

Тому:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= -j\rho I_2 = \frac{-E_1 \cdot \omega M \rho}{\dot{Z}^2 + (\omega M)^2} = -\frac{E_1 \cdot \omega M \rho}{r^2(1+j\xi)^2 + \omega^2 M^2} = \\ &= -\frac{E_1 \cdot \omega M \rho}{r^2 \left[ (1+j\xi)^2 + \frac{\omega^2 M^2}{r^2} \right]} = -\frac{E_1 \cdot \omega M Q}{r \left[ (1+j\xi)^2 + \frac{\omega^2 M^2}{r^2} \right]}. \end{aligned}$$

Відношення  $K_{3\phi}/K_{кр}=h$  назовемо параметром зв'язку. Тоді:

$$h = \frac{K_{3\phi}}{K_{кр}} = \frac{X_{3\phi}}{X_{кр}} = \frac{\omega M}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}} = \frac{\omega M}{r};$$

а напруга на виході системи дорівнюватиме:

$$\dot{U}_2 = -\frac{E_1 \cdot Qh}{(1+j\xi)^2 + h^2} = -\frac{E_1 \cdot Qh}{1+2j\xi - \xi^2 + h^2} = -\frac{E_1 \cdot Qh}{1+h^2 - \xi^2 + j2\xi}.$$

Модуль цього комплексу дорівнює:

$$U_2 = \frac{E_1 \cdot Qh}{\sqrt{(1+h^2 - \xi^2)^2 + j4\xi^2}}. \quad (2.26)$$

Розглянемо 3 випадки: між контурами зв'язок слабкий, критичний та закритичний.

#### 1. Дуже слабкий зв'язок ( $K_{3\phi}=K_1 \ll K_{кр}$ , $h \ll 1$ ).

У такому разі вираз (2.26), при нехтуванні  $h^2$  у знаменнику, переписеться так:

$$U_2 = \frac{E_1 \cdot Qh}{\sqrt{1-2\xi^2 + \xi^4 + j4\xi^2}} = \frac{E_1 \cdot Qh}{\sqrt{1+2\xi^2 + \xi^4}} = \frac{E_1 Qh}{1+\xi^2},$$



$$\text{де } \xi = 2Q \frac{\Delta f}{f_0} = Q \frac{2\Delta f}{f_0}.$$

Ширина смуги пропускання визначається з умови (рис. 2.13):

$$\begin{aligned} U_2' &= 0.707U_{2m}'; \\ U_{2m}' &= U_2(\xi = 0) = EQh; \\ \frac{U_2}{U_{2m}'} &= \frac{1}{1 + \left(Q \frac{\Delta f}{f_0}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} 1 + Q^2 \frac{(\Delta f)^2}{f_0^2} &= \sqrt{2}; \\ \Delta f_{np}^2 &= \left(\frac{f_0}{Q}\right)^2 \cdot (\sqrt{2} - 1); \\ \Delta f_{np}^2 &= 0.41 \left(\frac{f_0}{Q}\right)^2 = 0.41 \Delta f_{np1}^2; \\ \Delta f_{np} &= 0.64 \Delta f_{np1}. \end{aligned}$$

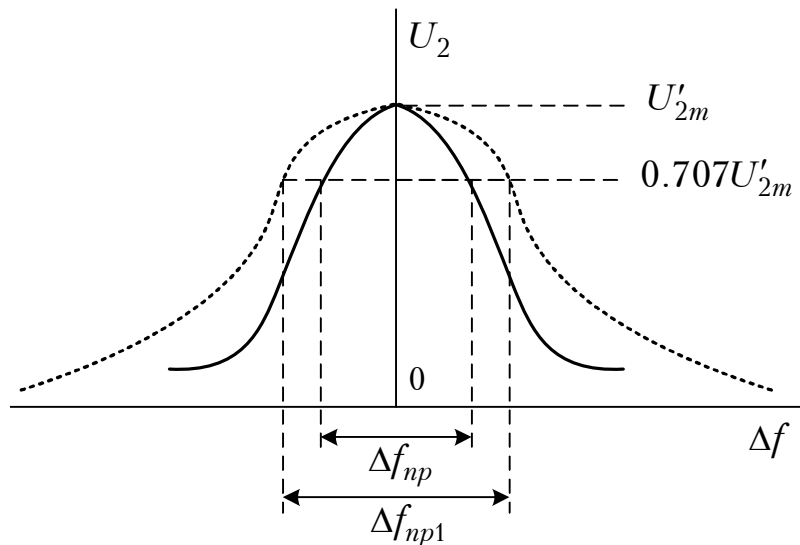


Рисунок 2.13 – Залежність вихідної напруги системи двох зв'язаних контурів (суцільна крива) та одиничного контуру (пунктир)

Останній результат говорить, що смуга пропускання двох трансформаторно зв'язаних контурів (суцільна крива) вужча за смугу пропускання кожного з однакових контурів (пунктирна крива) як одиничних послідовних. Через мале значення параметра зв'язку ( $h \ll 1$ ) вихідна напруга буде теж малою навіть при резонансі ( $\xi=0$ ). Отже, висока вибірність досягається ціною зменшення коефіцієнта передачі за напругою.

$$U_{2mm} = I_{2mm} \cdot \rho = \rho \frac{E_1}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}.$$

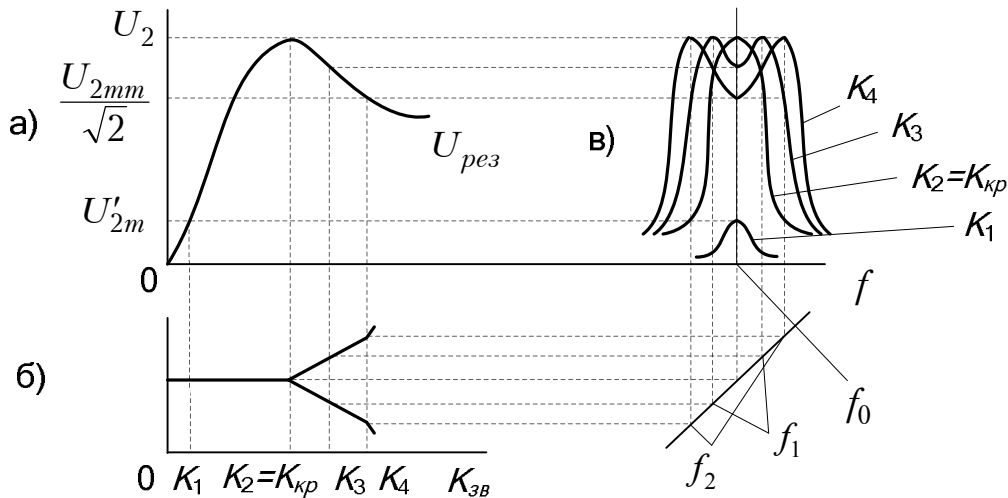


Рисунок 2.14 – Змінювання форми АЧХ двох зв'язаних контурів при збільшенні коефіцієнта зв'язку

## 2. Критичний зв'язок ( $K = K_{кр}$ , $h=1$ ).

Для такого випадку вираз (2.26) маємо переписати так:

$$U_2 = \frac{E_1 \cdot Q}{\sqrt{(2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} = \frac{E_1 \cdot Q}{\sqrt{\xi^2 + 4}},$$

$$U_{2mm} = \frac{E_1 \cdot Q}{2}.$$

Зростання коефіцієнта зв'язку до критичного  $K_2 = K_{кр}$  супроводжується зростанням струму  $I_2$  вторинного контуру (рис. 2.14), резонансна частота залишається незмінною  $f_0$ , графік АЧХ залишається одновершинною кривою.

Ширину смуги пропускання визначимо за умови, що на її краях вихідна напруга зменшиться у  $\sqrt{2}$  раза у порівнянні з резонансною  $U_{2mm}$ :

$$\frac{E_1 \cdot Q}{\sqrt{1 + \left(Q \frac{\Delta f_{нркр}}{f_0}\right)^2 + 4}} = \frac{E_1 \cdot Q}{2\sqrt{2}}; \quad \left(Q \frac{\Delta f_{нркр}}{f_0}\right)^4 + 4 = 8;$$

$$\Delta f_{нркр}^4 \cdot \left(\frac{Q}{f_0}\right)^4 = 4; \quad \Delta f_{нркр} = \sqrt{2} \cdot \frac{f_0}{2} = 1.41 \Delta f_{нр1}.$$

Отже, при критичному зв'язку смуга пропускання системи двох трансформаторно зв'язаних однакових контурів стає у 1,41 раза ширшою за її значення для одного з одиничних контурів цієї системи. При збільшенні зв'язку до критичного смуга пропускання зростає через те, що зростає внесений активний опір.

### 3. Зв'язок закритичний ( $K_3 \gg K_{кр}$ , $h \gg 1$ ).

Зростання коефіцієнта зв'язку понад  $K_{кр}$  супроводжується появою частот зв'язку (рис. 2.14,б). Із зростанням  $K_{зв}$  частоти зв'язку  $f_1$  і  $f_2$  все більше віддаляються від резонансної частоти  $f_0$  (рис. 2.14,в), але амплітуда напруги  $U_2$  на цих частотах зберігається незмінною і дорівнює найбільшому значенню  $E_1 Q/2$  (рис. 2.14,а). Це пояснюється різким зростанням активної складової внесеного опору на резонансній частоті при збільшенні  $K_{зв}$  над значенням  $K_{кр}$ . У результаті АЧХ набуває вигляду двовершинної кривої з провалом на резонансній частоті. При подальшому зростанні  $K_{зв}$  провал у центральній частині поглиблюється, а максимуми кривої розсовуються.

Зростання  $K_{зв}$  призводить до розширення смуги пропускання. Можливості розширення смуги пропускання обмежується тим, що при  $K_{зв} > K_{кр}$  одночасно збільшується провал у центральній частині резонансної кривої. При досить сильному зв'язку зі смуги пропускання випадає область частот, яка прилягає до резонансної частоти, що є недопустимим. А тому можемо говорити про  $K_{зв} = K_{зв \max}$ , при якому дно впадини центральної частини кривої досягає рівня  $0.707 U_{2mm}$ .

Для отримання значення параметрів зв'язку  $h_{\max} = K_{зв \max} / K_{кр}$ , прирівняємо (2.26) до  $\frac{U_{2mm}}{\sqrt{2}}$

$$\frac{E_1 Q h_{\max}}{1 + h_{\max}^2} = \frac{E_1 Q}{2\sqrt{2}},$$

$$1 + h_{\max}^2 = 2\sqrt{2} h_{\max}; \quad h_{\max}^2 - 2\sqrt{2} h_{\max} + 1 = 0.$$

Розв'язавши останнє квадратне рівняння відносно  $h_{\max}$ , отримаємо:  $h_{\max} = 2.41$ .

На краях смуги пропускання:

$$\frac{E_1 Q \cdot 2.41}{\sqrt{(1 + 2.41^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} = \frac{E_1 Q}{2\sqrt{2}}.$$

Звідси:

$$(1 + 2.41^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2 = 2.41^2 \cdot 8$$

Розв'язавши це рівняння відносно  $\xi$  та підставивши  $\xi = Q \frac{\Delta f_{np \max}}{f_0}$

отримаємо:

$$\Delta f_{np \max} \approx 3.1 \Delta f_{np1}.$$

Отже, зв'язані контури порізно настроєні на частоту  $f_0$ , мають однакові параметри, можуть мати, в залежності від величини коефіцієнта зв'язку  $K_{зв}$ , смуги пропускання шириною від  $0.64 \Delta f_{np1}$  до  $3.1 \Delta f_{np1}$ , де  $\Delta f_{np1}$  – смуга пропускання одного з контурів системи як одиничного контуру.

### 2.5.5 Вибірність зв'язаних контурів

Щоб зробити більш очевидним вплив зв'язку (параметра  $h$ ) на форму АЧХ знайдемо вираз для модуля коефіцієнта передачі за напругою, розділивши (2.26) на  $E_1$ :

$$K = \frac{Qh}{\sqrt{(1+h^2-\xi^2)^2+4\xi^2}} \quad (2.27)$$

Максимально можливе його значення  $K = \frac{Q}{1+h^2}$  (при  $h=1, \xi=0$ ).

На резонансній частоті  $K = K_0 = \frac{Qh}{1+h^2}$ , тому нормований коефіцієнт передачі  $\frac{K}{K_0}$  дорівнює:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1+h^2}{\sqrt{(1+h^2-\xi^2)^2+4\xi^2}}$$

Система зв'язаних контурів при певних значеннях коефіцієнта зв'язку має резонансні характеристики більш близькі до ідеальної П-подібної, ніж характеристики одного контуру.

На (рис. 2.15) зіставлені резонансні характеристики одного із зв'язаних контурів при фіксованій смузі пропускання  $\Delta f_{np}$ .

Резонансна характеристика одиничного контуру дуже відрізняється від ідеальної П-подібної як в межах смуги пропускання, так і поза нею, де вона є дуже пологою. Використовуючи систему двох зв'язаних контурів з рівними (але більшими, ніж у одиничного контуру) добротностями, можна, шляхом підбирання величини коефіцієнта зв'язку, отримати ту ж смугу пропускання при більш-менш рівномірному її ході у межах смуги пропускання і більш крутих спадах поза смугою пропускання. Ці особливості резонансних характеристик зв'язаних контурів сприяють їх застосуванню, наприклад, у підсилювачах коливань радіочастот.

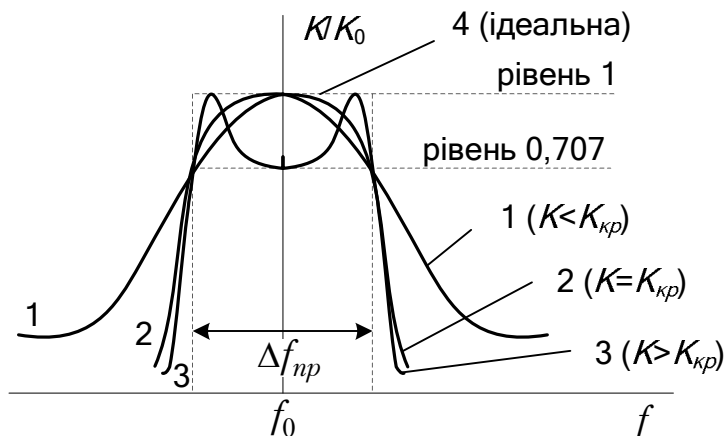


Рисунок 2.15 – Криві вибірності коливальних контурів

Є чотири основних схеми системи зв'язаних контурів: з трансформаторним, автотрансформаторним, внутрішньоємнісним та зовнішньоємнісним зв'язками.
При обміні енергіями вносяться у контури з трансформаторним зв'язком е.р.с. індукції, які проявляють себе як внесені туди активний та реактивний опори.
Є чотири способи настроїти систему двох контурів з трансформаторним зв'язком: 1-й частинний, 2-й частинний, повний та складний резонанси.
При повному резонансі на резонансній частоті $\omega_0$ , а при складному на частотах зв'язку $\omega_1$ , $\omega_2$ струм у вторинному контурі досягає максимально можливого значення і дорівнює: $I_{2\text{max}} = \frac{E_1}{2\sqrt{r_1 r_2}}$ .
Ширина смуги пропускання системи двох однакових контурів може змінюватись від $0.64 \Delta f_{\text{np1}}$ при дуже слабкому зв'язку, через $1.41 \Delta f_{\text{np1}}$ при критичному зв'язку, до $3,1 \Delta f_{\text{np1}}$ при максимально допустимому зв'язку між контурами де: $\Delta f_{\text{np1}}$ – смуга пропускання одного з контурів системи як одиничного контуру.

## 2.6 Запитання та задачі для закріплення

1. Що називається системою зв'язаних контурів, опором зв'язку?
2. Зобразити схеми двох зв'язаних контурів. Написати вирази для визначення коефіцієнтів зв'язку.
3. Написати вирази для  $r_{\text{вн}}$ ,  $x_{\text{вн}}$ ,  $R_{\text{вх}}$ ,  $X_{\text{вх}}$ ,  $Z_{\text{вх}}$ . Пояснити фізичний зміст внесених опорів.
4. У чому полягають способи настроювання системи двох контурів у 1-й та 2-й частинний резонанс? Співвідношення між струмами у контурах?
5. У чому полягає спосіб настроювання у повний та складний резонанси?
6. Енергетичні співвідношення при повному резонансі, к.к.д.
7. Ширина смуги пропускання системи при  $K_{\text{зв}} \ll K_{\text{кр}}$ ,  $K_{\text{зв}} = K_{\text{кр}}$ ,  $K_{\text{зв}} \gg K_{\text{кр}}$ . У чому причина зростання ширини смуги при зростанні  $K_{\text{зв}}$ ?
8. Причина появи провалу у центрі АЧХ при  $K_{\text{зв}} \gg K_{\text{кр}}$ .
9. Дати якісне (фізичне) пояснення виконання умов комплексно-спряженого узгодження на частотах зв'язку при  $K_{\text{зв}} \gg K_{\text{кр}}$ .
10. Струми у трансформаторно з'єднаних контурах, що живляться е.р.с.  $e = E_m \cos \omega t$ , вимірюються амперметрами (рис. 2.7). Визначити активний і реактивний внесені опори у первинний контур, коефіцієнт зв'язку  $K_{\text{зв}}$ , коли відомо:  $L_1 = L_2 = L = 300$  мкГн,  $C_1 = C_2 = C = 500$  пФ,  $r_1 = 8$  Ом,  $r_2 = 10$  Ом,  $I_{A1} = 100$  мА,  $I_{A2} = 40$  мА.
11. При змінюванні в широких межах частоти  $\omega$  генератора е.р.с

$e = E_m \cos \omega t$  (рис. 2.7), в системі контурів настроєних порізно на одну і ту ж частоту, амперметр  $A_2$  дає максимальне показання на єдиній частоті  $\omega_1$  ( $I_{A2}=70$  мА).

1) визначити  $K_{зв}$  коли відомо:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 1.5 \text{ В};$$

$$d_1 = d_2 = d = 0.015,$$

$$r_1 = 10 \text{ Ом}; \quad r_2 = 5 \text{ Ом};$$

$$\omega_1 = 10^6 \text{ рад/с}.$$

2) як зміниться показання  $A_2$ , коли  $K_{зв}$  збільшити у чотири рази?

12. Визначити коефіцієнт передачі напруги на резонансній частоті зв'язаних контурів (рис. 2.7) при максимальній смузі пропускання, коли:  $L_1=L_2=L=300$  мкГн;  $C_1=C_2=C=1000$  пФ;  $r_1=r_2=r_2=6$  Ом.

## 3 ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ

### 3.1 Призначення і класифікація фільтрів

#### Основні означення

Електричним фільтром називається один чи ряд чотиріполіусників, які призначені для передачі коливань з максимальним коефіцієнтом передачі ( $k = 1$ ) у заданій частині спектра і мінімальним коефіцієнтом передачі ( $k = 0$ ) на решті частот спектра. Перша область частот називається смугою прозорості (пропускання) інша – смугою непрозорості (затримання). Частоти  $\omega_{зр} = 2\pi f_{зр}$ , які розділяють ці області, називаються частотами зрізу або частотами фільтра.

Про фільтр судять, перш за все, за його АЧХ, яка виражає залежність коефіцієнта передачі від частоти  $\omega$  вхідної напруги (рис. 3.1).

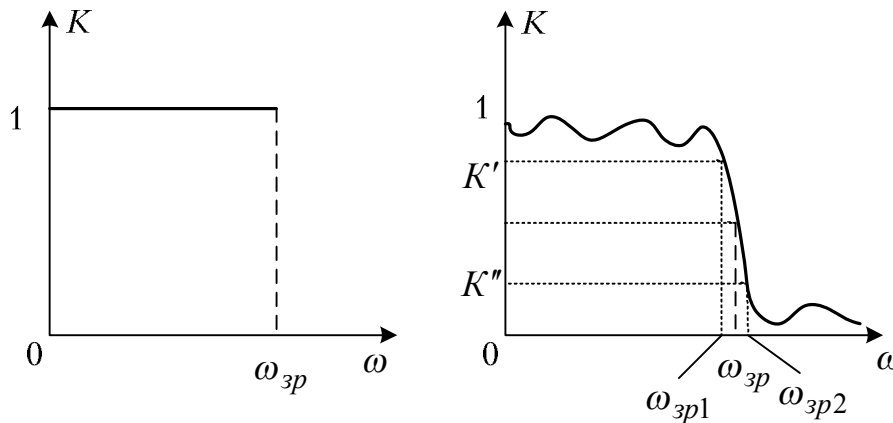


Рисунок 3.1 – АЧХ фільтрів нижніх частот: а) – ідеального, б) – реального

Ідеальним буде фільтр, у смузі прозорості якого (рис. 3.2)  $U_{2m} = U_{1m}$ , а у смузі непрозорості  $U_2 = 0$  при  $U_1 \neq 0$ , а перехід від однієї смуги до іншої здійснюється стрибком на частоті зрізу (рис. 3.1,а).

Велике наближення до показників рис. 3.1,а забезпечують фільтри, побудовані за ланцюговою (каскадною) схемою.

Принцип дії фільтра можна подати так, що електромагнітні коливання, виникнувши у будь-якій ланці, поширюються від неї у протилежних напрямках: до навантаження, утворюючи прохідну хвилю напруги, і до джерела, утворюючи відбиту хвилю. В ідеальному фільтрі хвилі, відбиті в усіх ланках фільтра, досягають входу фільтра з однаковими фазами у смузі непрозорості і повністю компенсуються у смузі прозорості.

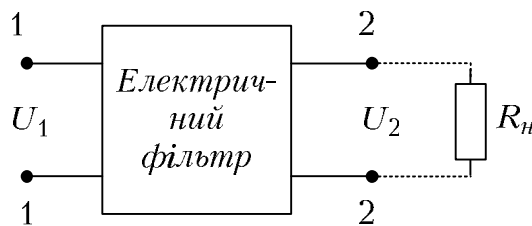


Рисунок 3.2 – Фільтр як чотиріполіусник

Прохідні ж хвилі, досягнувши навантаження, збігаються за фазами у смузі прозорості і повністю компенсуються у смузі непрозорості.

Це рівносильно тому, що там, де фільтр прозорий, вхідний опір усіх його ланок однаковий, активний і рівний опору навантаження  $R_n$ , а там, де фільтр непрозорий, його вхідний опір чисто реактивний.

Фільтр, усі ланки якого мають у смузі пропускання однаковий вхідний опір, рівний опору навантаження, називається узгодженим, а вхідний опір такого узгодженого фільтра називається характеристичним або хвильовим опором  $Z_0$ .

Важливо пам'ятати, що незважаючи на рівність опорів  $Z_0$  і  $R_n$  природа їхня різна. Характеристичний опір активний у тому розумінні цього слова, що в утвореній ланці реактивних елементів  $L$  і  $C$  зосереджена однакова кількість енергії електричного і магнітного полів, завдяки чому і забезпечується повна передача електромагнітної енергії від однієї ланки до другої у смузі прозорості. Опір же  $R_n$  активний, оскільки це параметр навантаження, яке є резистором або еквівалентне йому і тому поглинає енергію хвилі, яка пройшла через фільтр до навантаження.

### Класифікація електричних фільтрів

Електричні фільтри за різними ознаками поділяються на:

1. Активні і пасивні - за ознакою наявності чи відсутності активних елементів (наприклад, транзисторів). Подалі будемо розглядати лише пасивні фільтри.

2. Фільтри нижніх частот (ФНЧ) зі смугою прозорості від 0 до  $f_{зр}$ , фільтри верхніх частот (ФВЧ) зі смугою прозорості від  $f_{зр}$  до  $\infty$ , смугові фільтри (СФ) зі смугою прозорості від  $f_{зр1}$  до  $f_{зр2}$ , загороджувальні або режекторні фільтри (ЗФ або РФ) зі смугою непрозорості від  $f_{зр1}$  до  $f_{зр2}$  (рис. 3.3) – за взаємним розташуванням смуг прозорості і непрозорості.

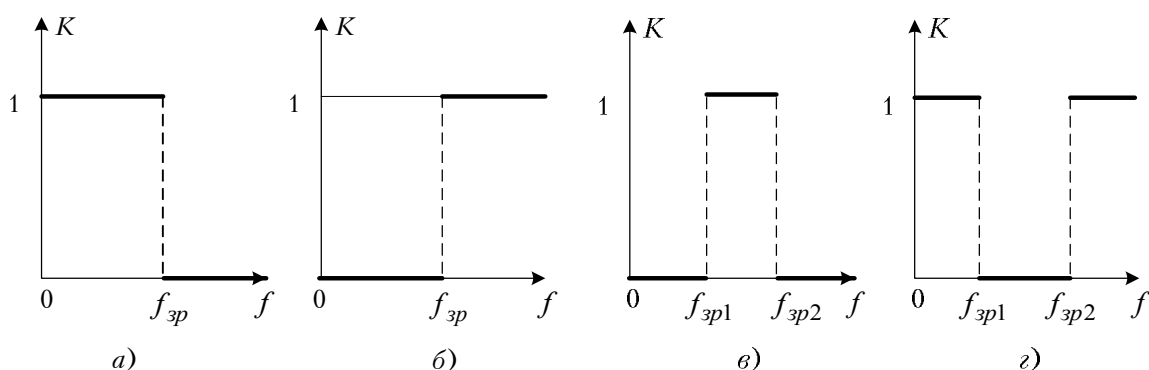


Рисунок 3.3 – АЧХ: а) – ФНЧ, б) – ФВЧ, в) – СФ, з) – ЗФ (РФ)

3. Г-подібні, Т-подібні, П-подібні (рис. 3.4) – за взаємним розташуванням двополюсників. Г-подібна ланка містить найменшу кількість елементів (два), а Т-подібна чи П-подібна ланки еквівалентні двом Г-подібним, що досить зрозуміло з рисунка.



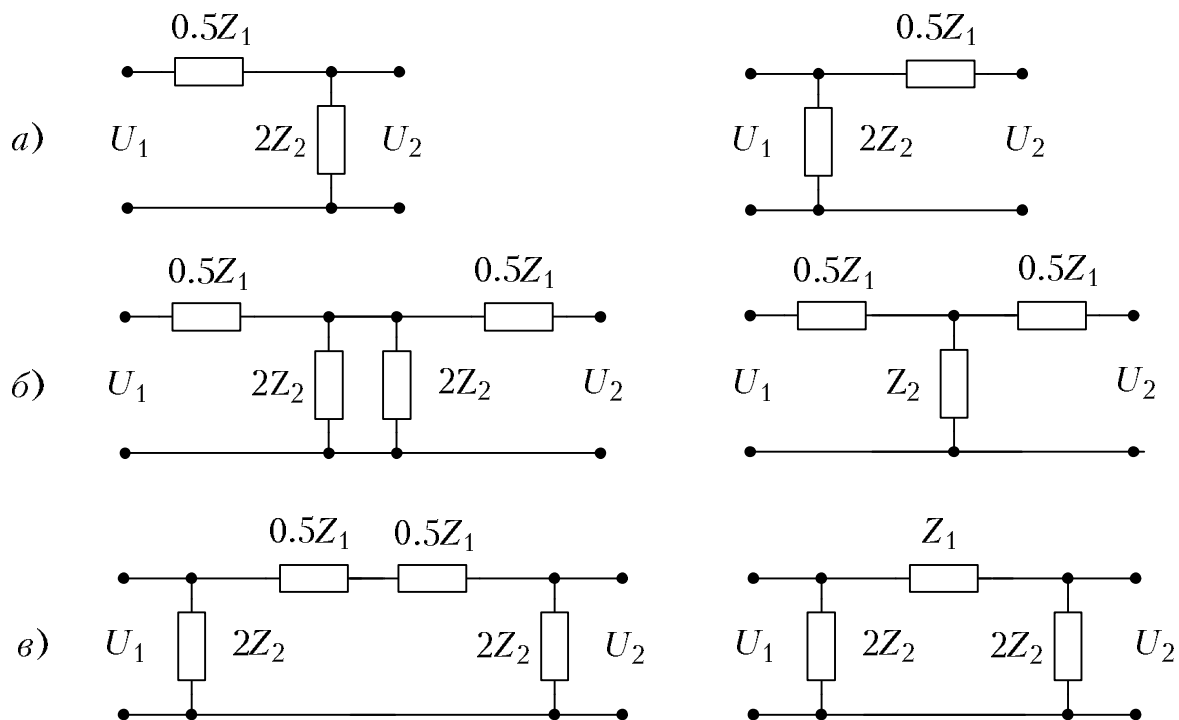


Рисунок 3.4 – *a)* – Г-подібні ланки, *б)* – утворення Т-подібної ланки з двох Г-подібних, *в)* – утворення П-подібної ланки з двох Г-подібних

4. Реактивні, що складаються з елементів  $L$  і  $C$ , та резистивно-ємнісні, що складаються з елементів  $R$  і  $C$ , п'єзоелектричні (кварцові пластини), магнітострикційні (стрижні з феромагнітного матеріалу) – за характером параметрів елементів фільтрів.

5. Фільтри типу  $k$ , у яких добуток  $Z_1 Z_2$  є величиною незалежною від частоти – константа (звідси і назва) та фільтри  $m$  типу – за додатковими ознаками.

### АЧХ реальних фільтрів

В реальних фільтрах у смузі прозорості коефіцієнт передачі за напругою не дорівнює точно одиниці, а в смузі непрозорості - точно нулю. Це викликається такими причинами:

- не існують чисто реактивні опори, бо реальні котушки індуктивності і конденсатори мають (хоч і незначні практично) втрати, а опори цих елементів є активно-реактивними;

- повне узгодження фільтра з генератором, з одного боку, та навантаженням, з другого, можливе лише на деяких частотах;

- перехід від смуги прозорості до смуги непрозорості і навпаки є поступовим і границя між ними стає "розмитою" у межах якої коефіцієнт передачі за напругою змінюється від приблизно одиниці до приблизно нуля.

### Вхідний узгоджений опір фільтра

Характеристичний (хвильовий) опір фільтра, який дорівнює  $\sqrt{L/C}$ , позначимо через  $Z_0$ .

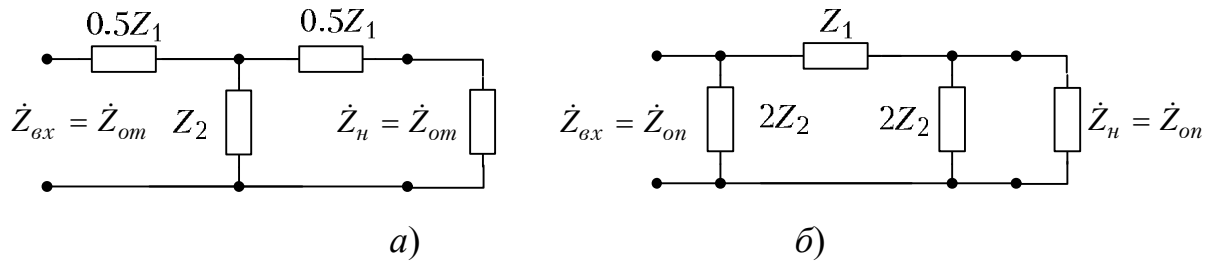


Рисунок 3.5 – Узагальнені схеми: *а)* – Т-ланки, *б)* – П-ланки, узгоджених з навантаженням і генератором напруги

Відповідно, вхідний узгоджений опір Т-подібного фільтра (рис. 3.5,*а*) позначимо через  $Z_{0T}$ , а П-подібного фільтра (рис. 3.5,*б*) – через  $Z_{0П}$ . Позначення на цих рисунках введені з урахуванням того, що вхідний опір кожної ланки фільтра  $Z_{ex}$ , навантаженого на свій характеристичний опір  $Z_{0T}$  або  $Z_{0П}$ , дорівнює  $Z_0 = \sqrt{L/C}$ .

Для Т-подібного фільтра узгоджений вхідний опір дорівнює:

$$\dot{Z}_{0T} = 0.5\dot{Z}_1 + (0.5\dot{Z}_1 + \dot{Z}_{0T}) \cdot \dot{Z}_2 / (0.5\dot{Z}_1 + \dot{Z}_{0T} + \dot{Z}_2)$$

або

$$\begin{aligned} & 0.5\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_{0T} + \dot{Z}_{0T}^2 + \dot{Z}_{0T}\dot{Z}_2 = \\ & = 0.25\dot{Z}_1^2 + 0.5\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_{0T} + 0.5\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 + 0.5\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_{0T}\dot{Z}_2 \end{aligned}$$

звідки:

$$\dot{Z}_{0T} = \sqrt{0.25\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2} \quad (3.1)$$

Для П-подібного фільтра, аналогічно, маємо:

$$Z_{0П} = \frac{\left[ 0.5\dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_{0П} \cdot 2\dot{Z}_2}{\dot{Z}_{0П} + 2\dot{Z}_2} \right] \cdot 2\dot{Z}_2}{\left[ 0.5\dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_{0П} \cdot 2\dot{Z}_2}{\dot{Z}_{0П} + 2\dot{Z}_2} \right] + 2\dot{Z}_2}; \quad \dot{Z}_{0П} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{1 + \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}}} \quad (3.2)$$

У праву частину (3.1) та (3.2) входять опори  $\dot{Z}_1$  та  $\dot{Z}_2$ , які залежать від частоти, тоді як характеристичний опір фільтра  $\dot{Z}_{0П}$  та  $\dot{Z}_{0T}$  повинен в усій смузі прозорості дорівнювати активному опору  $R_n$ , який від частоти не залежить. Значить точна рівність  $\dot{Z}_{0П} = R_n$  або  $\dot{Z}_{0T} = R_n$  досягається тільки на одній частоті смуги прозорості. В реальних фільтрах існує частотний інтервал  $\omega'_{зр} \dots \omega''_{зр}$ , на якому перехід від смуги прозорості до смуги непрозорості (і навпаки) відбувається поступово, коефіцієнт передачі напруги змінюється від  $K'$  до  $K''$  (і навпаки), що видно на рис. 3.1,*б*.

### 3.2 Реактивні фільтри типу $k$

Ці фільтри так називаються, бо добуток опору послідовного плеча  $\dot{Z}_1$  та опору паралельного плеча  $\dot{Z}_2$  є величиною, яка не залежить від частоти,

дорівнює  $\sqrt{L/C}$  і позначається через  $k$  завдяки тому, що опори  $\dot{Z}_1$  та  $\dot{Z}_2$  в реактивних фільтрах протилежно залежать від частоти. Коли  $\dot{Z}_1 = j\omega L_1$ , то  $\dot{Z}_2 = 1/j\omega C_2$  і навпаки.

### 3.2.1 Фільтри нижніх частот

#### Схеми і частотні характеристики

На рис. 3.6 показані ланки фільтрів нижніх частот типу  $k$ . Елементи фільтрів позначені з урахуванням того, що загальна індуктивність ланки дорівнює  $L$ , а загальна ємність -  $C$ : Т-подібна ланка містить дві ділянки по  $0,5L$  кожна і ємність  $C$ , а П-подібна – одну ділянку з індуктивністю  $L$  і дві ділянки з ємностями по  $0,5C$ .

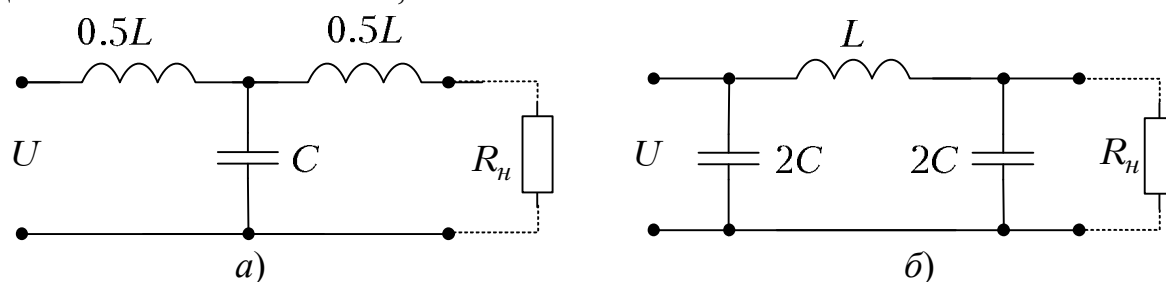


Рисунок 3.6 – Схеми ланок ФНЧ

Опори ланок відповідно дорівнюють  $\dot{Z}_1 = j\omega L$ ,  $\dot{Z}_2 = 1/j\omega C$ , а вхідний узгоджений опір Т-подібного фільтра:

$$\dot{Z}_{0T} = \sqrt{0.25\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_1\dot{Z}_2} = \sqrt{j\omega L / j\omega C - 0.25\omega^2 L^2} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}. \quad (3.3)$$

Залежність узгодженого вхідного опору  $\dot{Z}_{0T}$  від частоти показана на рис. 3.7, яка розрахована за формулою 3.3. При  $\omega = 0$ ,  $\dot{Z}_{0T} = \sqrt{L/C}$ . Зі зростанням частоти  $\dot{Z}_{0T}$  спочатку зменшується до нуля (на частоті зрізу  $\omega_{зр}$ ), а потім  $\omega^2 L^2 / 4$  стає більшим за одиницю, тоді:

$$\dot{Z}_{0T} = j\sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}},$$

що говорить про індуктивний характер опору ланки фільтра.

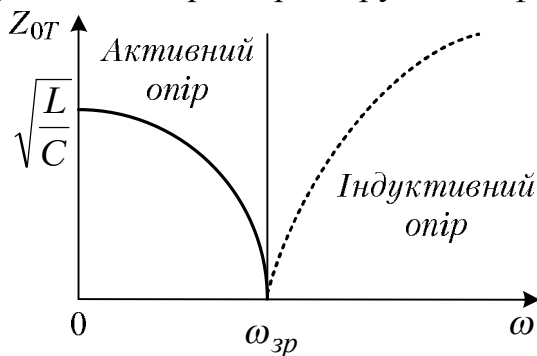


Рисунок 3.7 – Частотна залежність  $\dot{Z}_{0T}$  Т-ланки ФНЧ

Значення частоти зрізу знайдемо, виходячи з умови  $\dot{Z}_{0T}=0$ :

$$\dot{Z}_{0T} = \sqrt{\frac{\omega_{зр}^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}} = 0,$$

звідки:

$$\omega_{зр} = \sqrt{\frac{4L^2}{LC}} = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (3.4)$$

Для П-подібної ланки використаємо формулу 3.2:

$$\dot{Z}_{0П} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{1 + \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{j\omega L}{j\omega C}}{1 + \frac{j\omega L \cdot j\omega C}{4}}} = \sqrt{\frac{\frac{L}{C}}{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}}. \quad (3.5)$$

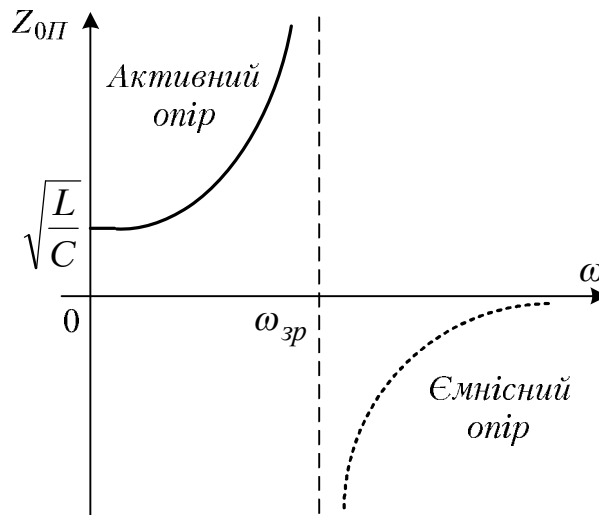


Рисунок 3.8 – Частотна залежність  $\dot{Z}_{0П}$  П-ланки ФНЧ

При  $\omega = 0$ ,  $\dot{Z}_{0П} = \sqrt{L/C}$ . Зі зростанням частоти  $\dot{Z}_{0П}$  зростає і при  $\omega \rightarrow \omega_{зр}$ ,  $\dot{Z}_{0П} \rightarrow \infty$ , а при подальшому збільшенні частоти опір:

$$\dot{Z}_{0П} = -j \sqrt{\frac{\frac{L}{C}}{\frac{\omega^2 LC}{4} - 1}}$$

і стає ємнісним. Значення частоти зрізу знаходимо з умови:

$$\omega_{зр}^2 LC / 4 - 1 = 0,$$

Звідки

$$\omega_{зр} = 2 / \sqrt{LC}. \quad (3.6)$$

### Розрахунок параметрів ФНЧ

На практиці розрахунок фільтра полягає у визначенні його параметрів  $L$  і  $C$  за заданими значеннями частоти зрізу  $f_{зр}$  та опору навантаження  $R_n$ . Для знаходження двох невідомих  $L$  і  $C$  складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2\pi f_{зр} = \frac{2}{\sqrt{LC}}, \\ R_n = \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

розв'язок якої буде таким

$$L = R_n / \pi f_{зр}. \quad (3.7)$$

$$C = 1 / R_n \pi f_{зр}. \quad (3.8)$$

На рис. 3.9 подано АЧХ реального фільтра нижніх частот, де видно, що повне узгодження має місце лише на частоті  $f=0$  ( $k=1$ ,  $\dot{Z}_{0T} = \dot{Z}_{0П} = \sqrt{L/C}$ ). Зі збільшенням частоти узгодженість порушується, зростає спад напруги на послідовно увімкнених котушках індуктивності (зростає опір  $\omega L$ ) і зменшується спад напруги на паралельно увімкнених конденсаторах (зменшується опір  $1/\omega C$ ), що призводить до того, що  $k$  стає меншим одиниці, починаючи з частоти  $f = 0$ .

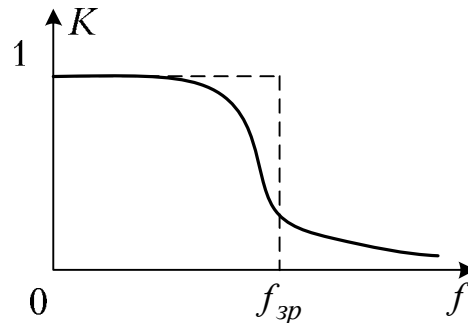


Рисунок 3.9 – АЧХ реального ФНЧ

### 3.2.2. Фільтри верхніх частот

#### Схеми і частотні характеристики

На рис. 3.10 подані ланки фільтрів високих частот  $k$  типу. У цих фільтрах послідовно увімкнені елементи з ємнісним характером опору, а паралельно увімкнені – з індуктивним. Виходячи з того, що у даному випадку  $\dot{Z}_1 = 1/j\omega C$ ,  $\dot{Z}_2 = j\omega L$ . Т-подібна ланка складається з двох конденсаторів по  $2C$  ємністю кожний і однієї котушки індуктивності  $L$ , а П-подібна ланка — з одного конденсатора ємністю  $C$  і двох котушок з індуктивностями по  $2L$  кожна.

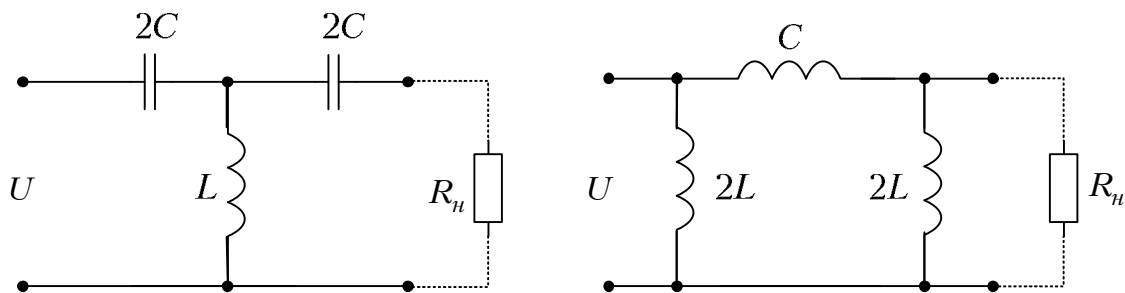


Рисунок 3.10 – Схеми ланок ФВЧ

Підставивши  $\dot{Z}_1 = 1/j\omega C, \dot{Z}_2 = j\omega L$  у формулу (3.1), знайдемо узгоджений вхідний опір Т-подібної ланки ФВЧ:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{0T} &= \sqrt{0.25\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}} = \sqrt{\frac{L}{C} \left[ 1 - \frac{1}{4\omega^2 LC} \right]}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

залежність якого від частоти показана на рис. 3.11. На частоті  $\omega_{зр} = 1/2\sqrt{LC}$ , опір  $\dot{Z}_{0T} = 0$ . При зростанні частоти цей опір зростає і асимптотично наближається до значення  $\sqrt{L/C}$ , залишаючись активним за характером. При  $\omega < \omega_{зр}$ , опір  $\dot{Z}_{0T}$  стає індуктивним, прямуючи до нескінченності при наближенні частоти  $\omega$  до нуля.

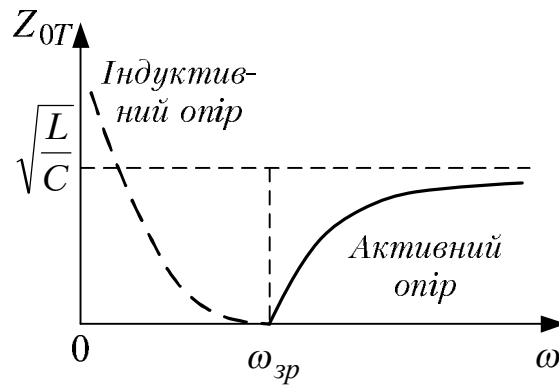


Рисунок 3.11 – Частотна залежність  $Z_{0T}$  Т-подібної ланки ФВЧ

Підставивши  $\dot{Z}_1 = 1/j\omega C, \dot{Z}_2 = j\omega L$  у формулу (3.2), знайдемо узгоджений вхідний опір П-подібної ланки ФВЧ:

$$\dot{Z}_{0\Pi} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{1 + \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{j\omega L}{j\omega C}}{1 + \frac{1}{4j\omega C \cdot j\omega L}}} = \sqrt{\frac{\frac{L}{C}}{1 - \frac{1}{4\omega^2 CL}}} \quad (3.10)$$

залежність якого від частоти показана на рис. 3.12. На частоті зрізу  $\omega_{зр} = 1/2\sqrt{LC}$ , опір  $\dot{Z}_{0\Pi} = \infty$ . При зростанні частоти він зменшуватиметься, наближаючись асимптотично до значення  $\sqrt{L/C}$ , залишаючись активним за характером. При  $\omega < \omega_{зр}$ , опір  $\dot{Z}_{0\Pi}$  стає ємнісним, прямуючи до нуля при зменшенні частоти до нуля.

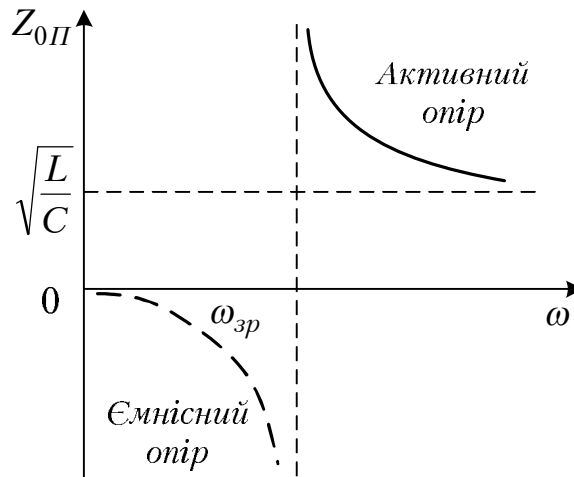


Рисунок 3.12 – Частотна залежність  $Z_{0П}$  П-подібної ланки ФВЧ

### Розрахунок параметрів ФВЧ

Задача полягає у визначенні параметрів  $L$  і  $C$  фільтра за заданими  $f_{зр}$ , і  $R_n$ . Для цього скористаємося такими рівняннями:

$$\begin{cases} 2\pi f_{зр} = 1/2\sqrt{LC}, \\ R_n = \sqrt{L/C} \end{cases}$$

звідки:

$$L = R_n / 4\pi f_{зр}, \quad C = 1/4R_n \pi f_{зр}. \quad (3.11)$$

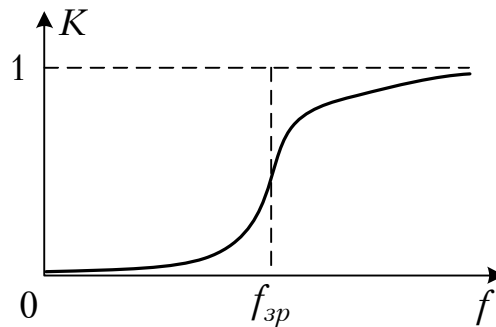


Рисунок 3.13 – АЧХ реального ФВЧ

При зменшенні частоти (рис. 3.13) послідовно увімкнені конденсатори збільшують свій опір, а паралельно увімкнені котушки – зменшують. На конденсаторах спад напруги зростає, а на котушках – зменшується, і вихідна напруга спадає. Особливо різко цей спад відбувається на частотах близьких до частоти зрізу  $f_{зр}$ .

### 3.2.3 Смугові та загороджувальні фільтри

Смуговими фільтрами називаються фільтри, смуга прозорості яких обмежена двома частотами зрізу  $\omega_{зр1}$  та  $\omega_{зр2}$ .

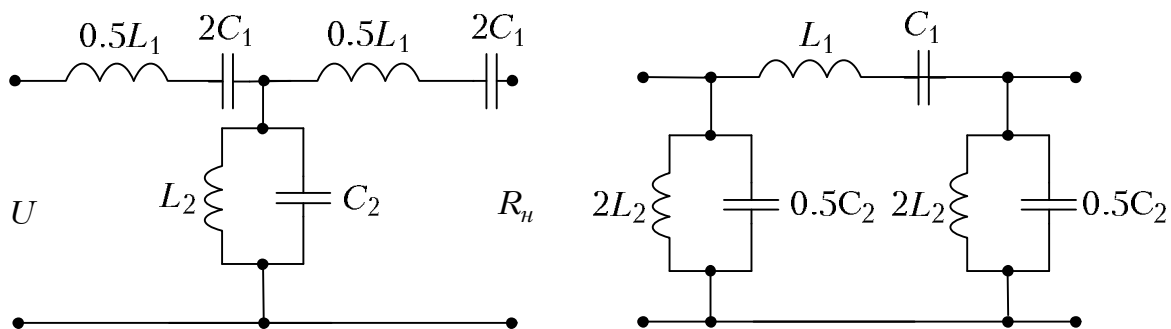


Рисунок 3.14 – Схеми Т-подібної та П-подібної ланок СФ

Ланки смугового фільтра (СФ) складаються з послідовного контуру  $L_1C_1$ , який має опір  $\dot{Z}_1$  і паралельного контуру  $L_2C_2$ , з опором  $\dot{Z}_2$  (рис. 3.14). Обидва контури, найчастіше, мають однакові резонансні частоти:

$$\omega_{zp} = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}. \quad (3.12)$$

Смуговий фільтр можна подати як сукупність двох фільтрів: фільтра верхніх частот з параметрами  $L_2C_1$  та частотою зрізу  $\omega_{zp1} = 1/2\sqrt{L_2C_1}$ , фільтра нижніх частот з параметрами  $L_1C_2$  та частотою зрізу  $\omega_{zp2} = 2/\sqrt{L_1C_2}$  (рис. 3.15).

Причому, параметри фільтра  $L_2, C_1, L_1, C_2$  підбираються таким чином, щоб частота  $\omega_{zp2}$  була більшою, ніж  $\omega_{zp1}$ . Різниця ж між ними  $\omega_{zp2} - \omega_{zp1}$  і є потрібною смугою прозорості (пропускання) фільтра.

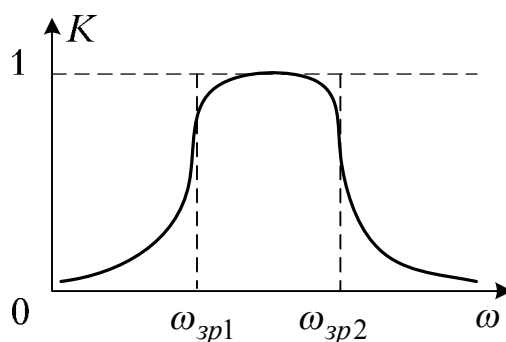


Рисунок 3.15 – АЧХ реальних СФ

На АЧХ (рис. 3.15) смугового фільтра ліва вітка відповідає елементам, які утворюють фільтр верхніх частот з частотою зрізу  $\omega_{zp1}$ , а права – елементам фільтра нижніх частот з частотою зрізу  $\omega_{zp2}$ . Між частотами зрізу коефіцієнт передачі напруги максимальний ( $k = 1$ ). Чим більше частота  $\omega$  відрізняється від  $\omega_{zp1}$  (у бік менших частот) і від  $\omega_{zp2}$  (у бік верхніх частот), тим більший вхідний опір послідовних контурів і менший – паралельних, у зв'язку з чим вихідна напруга зменшується.



Розрахунок параметрів  $L_1, C_2$  ведеться за заданою частотою зрізу  $\omega_{зр2}$  та  $R_n$  за формулами (3.7) і (3.8), а параметрів  $L_2, C_1$  за заданою частотою зрізу  $\omega_{зр1}$  та  $R_n$  за формулами (3.11).

**Загороджувальні фільтри** на відміну від смугових мають мінімальний коефіцієнт передачі напруги ( $k \approx 0$ ) у смузі між частотами  $\omega_{зр1}$  та  $\omega_{зр2}$ , максимальний ( $k \approx 1$ ) – за межами цієї смуги. Для цього фільтр складають з паралельних контурів  $L_1C_1$ , увімкнених послідовно з навантаженням і послідовних контурів  $L_2C_2$ , увімкнених паралельно з навантаженням (рис. 3.16).

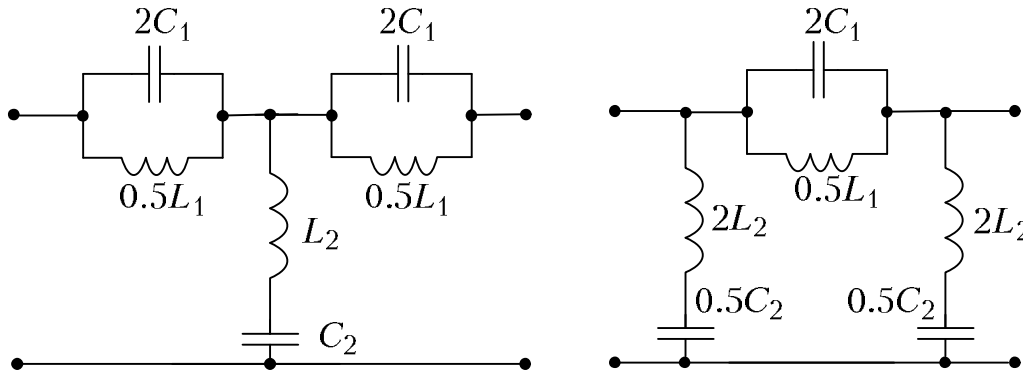


Рисунок 3.16 – Схеми Т-подібної та П-подібної ланок 3Ф

Загороджувальний фільтр (рис. 3.16, 3.17), як і смуговий, можна представити таким, що складається з двох фільтрів: фільтра нижніх частот  $L_1C_2$  з частотою зрізу  $\omega_{зр1}$  (ліва вітка АЧХ) та фільтра верхніх частот  $L_2C_1$  з частотою зрізу  $\omega_{зр2}$  (права вітка АЧХ).

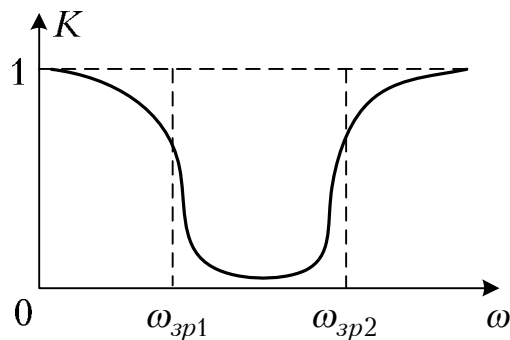


Рисунок 3.17 – АЧХ реального 3Ф

Розрахувати параметри  $L_1C_2$  можна за заданими частотами зрізу  $\omega_{зр1}$  та  $R_n$  за формулами (3.7) та (3.8), а параметри  $L_2C_1$  – за заданою частотою  $\omega_{зр2}$  та  $R_n$  за формулами (3.11) та (3.12).

Усі контури настроєні у резонанс з частотою  $\omega_0 = \sqrt{\omega_{зр1} \cdot \omega_{зр2}}$ , на якій послідовно увімкнені елементи (паралельні контури) мають максимальний вхідний, а паралельно увімкнені елементи (послідовні контури) – мінімальний вхідний опір, а тому напруга на виході фільтрів буде мінімальною. Такий фільтр стає прозорим на частотах  $\omega < \omega_{зр1}$  та  $\omega > \omega_{зр2}$ .

### 3.3 Реактивні фільтри типу $m$

#### Перехід від фільтра типу $k$ (прототипу) до фільтра типу $m$

Розглянемо цей перехід на прикладі П-ланки ФНЧ  $k$  типу (рис. 3.18,*a*) до послідовно-похідної (рис. 3.18,*б*) і паралельно-похідної (рис. 3.18,*в*) ланок.

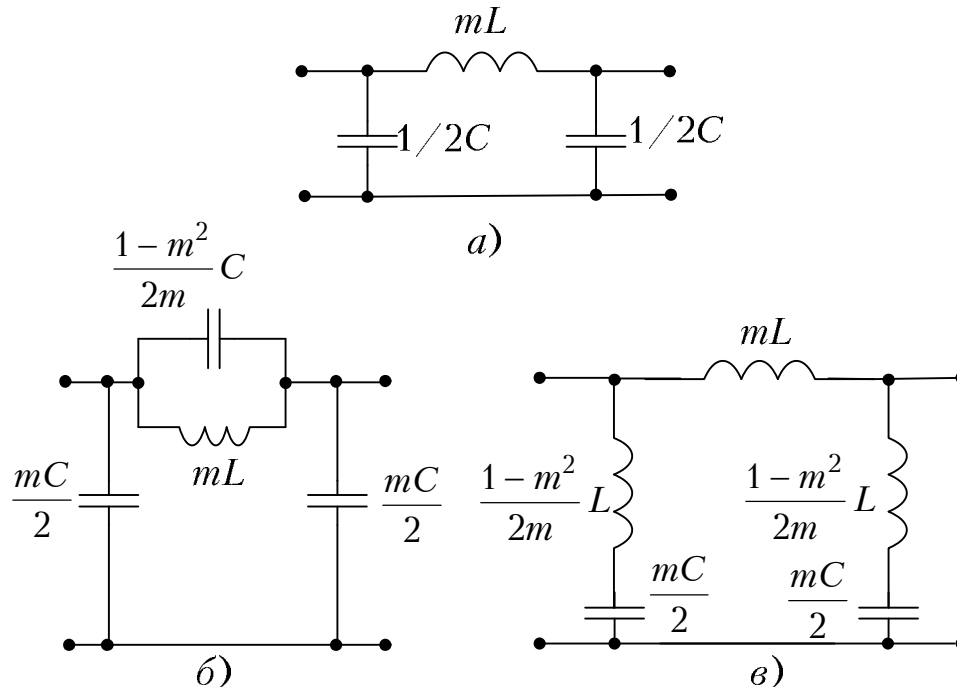


Рисунок 3.18 – Перехід від фільтра типу  $k$  до фільтра типу  $m$ : *a*) – схема П-ланки ФНЧ типу  $k$ , *б*) – послідовно-похідної, *в*) – паралельно-похідної ланок ФНЧ типу  $m$

У послідовно-похідній ланці котушка з індуктивністю  $L$  замінена на котушку з індуктивністю  $mL$ , а у кожену вітку замість конденсатора ємністю  $C/2$  увімкнені між собою послідовно котушка з індуктивністю  $(1-m^2)L/2m$  і конденсатор ємністю  $mC/2$ , у результаті чого утворюється послідовний контур з власною частотою

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-m^2)L}{2m} \cdot \frac{mC}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{LC} \sqrt{1-m^2}} = \frac{\omega_{zp}}{\sqrt{1-m^2}} \quad (3.13)$$

де  $\omega_{zp}=2/\sqrt{L/C}$  – частота зрізу ФНЧ типу  $k$  (прототипу);  $m=0\dots 1$  – параметр переходу до фільтра  $m$  типу. При  $m=1$ , до речі, з  $m$  фільтра отримуємо прототип.

Паралельно-похідна ланка (рис. 3.18,*в*) утворюється заміною котушки  $L$  паралельним контуром з елементами  $mL$  та  $(1-m^2)C/4m$  і збільшенням ємності віток у  $m$  разів. Очевидно, резонансна частота паралельного контуру також буде дорівнювати  $\omega_0=\omega_{zp}/\sqrt{1-m^2}$  і мати таку ж частоту зрізу  $\omega_{zp}$ , а узгоджений вхідний опір  $\dot{Z}_{0П}$  такий, як і у прототипу.

### Частотні характеристики ФНЧ $m$ типу

З рис. 3.19 бачимо, що вибором параметра переходу  $m$  можна досягти того, що  $Z_{0П}$  буде мало відрізнятися від  $\sqrt{L/C}$  майже в усій смузі прозорості фільтра. Це значення параметра дорівнює 0,6 і називається оптимальним.

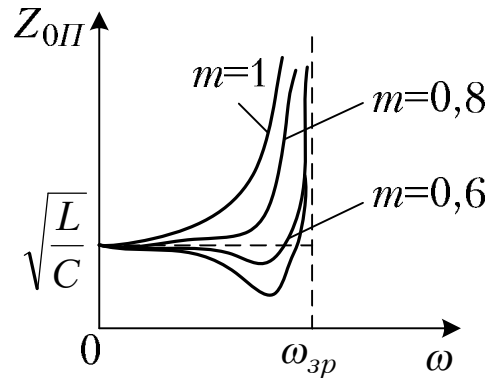


Рисунок 3.19 – Залежність узгодженого входного опору П-ланки ФНЧ типу  $m$  від частоти у смузі прозорості

На рис. 3.20 показано, що у межах смуги прозорості коефіцієнт передачі напруги однаковий і дорівнює одиниці. Коли ж частота  $\omega$  зростає від  $\omega_{зр}$  до  $\omega_0$ , коефіцієнт передачі різко зменшується, прямуючи до нуля з наближенням до резонансу контурів фільтра. Вхідний опір послідовно-похідної ланки прямує до нуля, а паралельно-похідної ланки – до нескінченності. Тому  $\omega_0$  називають частотою нескінченного згасання ( $k = 0$ ). Різкий спад АЧХ біля  $\omega_{зр}$  – друга перевага фільтрів  $m$  типу.

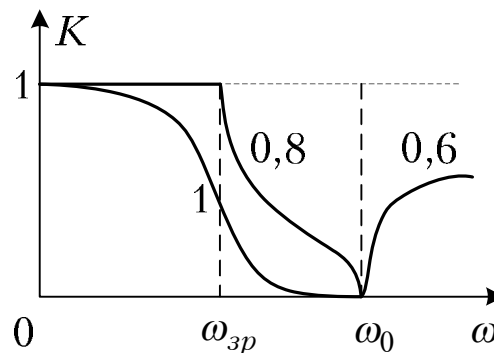


Рисунок 3.20 – АЧХ ланки ФНЧ типу  $m$

Але ці фільтри мають і недоліки: а) схеми фільтрів  $m$  типу складніші (самі фільтри дорожчі та менш надійні); б) при зростанні частоти більше  $\omega_0$  (смуга непрозорості) коефіцієнт передачі напруги зростає.

Такі недоліки усуваються застосуванням комбінованих ( $k - m$ ) фільтрів, де об'єднуються кращі сторони фільтрів обох типів.

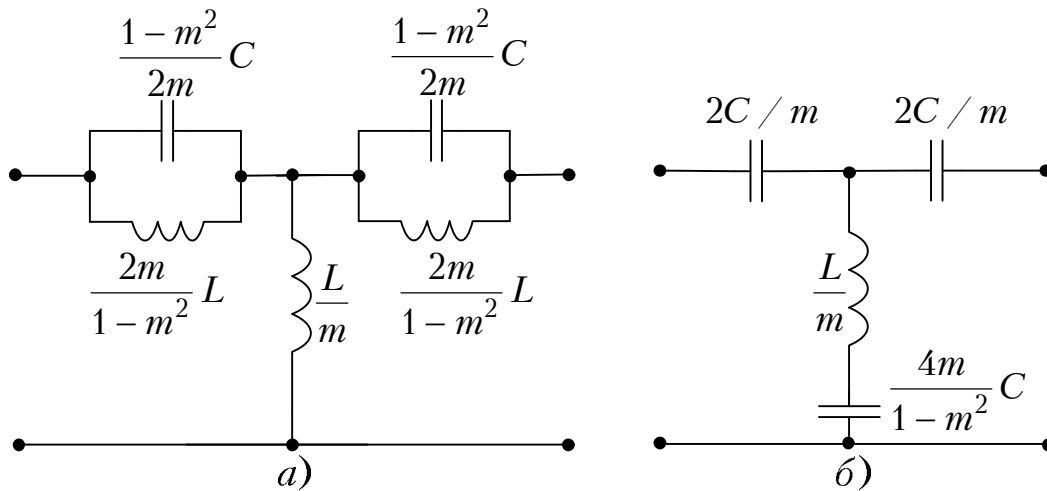


Рисунок 3.21 – Схеми Т-ланок ФВЧ типу  $m$ : а) – паралельно-похідна, б) - послідовно-похідна ланка

### 3.4 Резистивно-ємнісні фільтри

Виготовлення котушок індуктивності для фільтрів, які працюють в діапазонах інфранизьких (менше 3 кГц) і дуже низьких (3...30 кГц) частот, пов'язане з труднощами, особливо коли котушки повинні мати велику індуктивність при високому значенні їх добротності. Збільшення поперечного перерізу дроту обмотки збільшує масу, розміри та вартість котушки. Застосування ж феромагнітних осердь призводить до залежності індуктивності від величини струму, що протікає в обмотці.

Щоб позбутися громіздких фільтрів з низькою добротністю котушок, застосовуються резистивно-ємнісні фільтри (RC-фільтри) які складаються з резисторів і конденсаторів. Усі RC-фільтри розділяються на фільтри верхніх частот (ФВЧ), фільтри нижніх частот (ФНЧ), смугові фільтри (СФ) та загороджувальні фільтри (ЗФ).

#### 3.4.1 RC-фільтри верхніх частот

На рис. 3.22 зображена схема Г-подібної ланки RC-фільтра верхніх частот. На вході ланки діє гармонічна напруга  $u_1(t)$  з комплексною амплітудою  $\dot{U}_{1m}$ . Ця напруга прикладена до послідовно з'єднаних конденсатора  $C$  та резистора  $R$ , розподіляється між конденсатором і резистором й частина  $u_2(t)$  з комплексною амплітудою ( $\dot{U}_{2m}$  знімається з резистора  $R$  і є вихідною напругою фільтра.

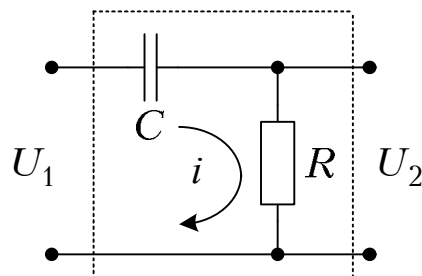


Рисунок 3.22 – Схема RC-фільтра верхніх частот

Комплексний коефіцієнт  $\dot{K}$  передачі напруги фільтра дорівнює відношенню комплексної амплітуди вихідної напруги до комплексної амплітуди вхідної.

Оскільки через конденсатор і резистор (з'єднаних послідовно) протікає один і той же струм, то:

$$\dot{K} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{R - \frac{j}{\omega C}} = \frac{1}{1 - \frac{j}{\omega RC}}$$

Комплексна величина може бути записана у показниковій формі:

$$\dot{K} = Ke^{j\varphi}, \quad (3.14)$$

де  $K$  – модуль цієї комплексної величини,  $\varphi$  – її аргумент.

Модуль дробу виразу (3.14) дорівнює модулю чисельника 1 поділеному на модуль знаменника  $\sqrt{1 + (1/\omega RC)^2}$ :

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}}. \quad (3.15)$$

Аргумент дробової комплексної величини дорівнює аргументу чисельника (у даному випадку  $\varphi_{чис} = 0$ ) мінус аргумент знаменника (у даному випадку  $\varphi_{зн} = \text{arctg}(1/CR\omega)$ ):

$$\varphi = \varphi_{чис} - \varphi_{зн} = \text{arctg}(1/\omega RC) \quad (3.16)$$

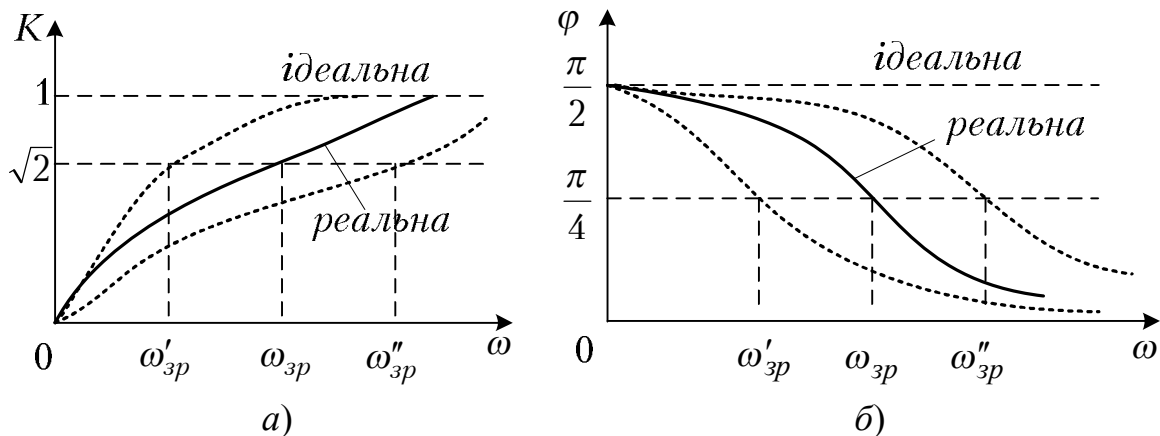


Рисунок 3.23 – а) – АЧХ і б) – ФЧХ RC-фільтра ВЧ

Залежність модуля коефіцієнта передачі  $K$  від частоти  $\omega$  називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ), а залежність аргументу  $\varphi$  від частоти  $\omega$  – фазочастотною характеристикою (ФЧХ) фільтра (рис. 3.23).

Змінюючи частоту  $\omega$  від 0 до  $\infty$ , отримуємо з виразів (3.15), (3.16), що модуль  $K$  зростає від 0 до 1 і аргумент  $\varphi$  зменшиться від  $\pi/2$  до 0. Дійсно, при частоті  $\omega = 0$  опір конденсатора  $C$  нескінченно великий у порівнянні з

опором резистора  $R$ , і тому модуль  $K = 0$ , а аргумент  $\varphi = \arctg \infty = \pi/2$  (вся напруга спаде на конденсаторі, а  $U_2 = 0$ ).

На усіх частотах, коли  $\omega RC \ll 1$  струм  $i$  у колі матиме ємнісний характер, вихідна напруга  $U_2 = i \cdot R$  випереджатиме за фазою вхідну напругу  $U_1$  на  $90^\circ$ . Зі зростанням частоти ємнісний опір зменшується і все більша частина вхідної напруги припадатиме на елемент  $R$ . Це, відповідно, призведе до зростання модуля  $K$  і зменшення аргументу  $\varphi$  комплексного коефіцієнта передачі напруги. При  $\omega \rightarrow \infty$ , опір конденсатора падає до нуля і уся вхідна напруга передається на вихід ( $K = 1$ ), струм у колі носить чисто активний характер і спад напруги  $U_2 = i \cdot R$  збігається за фазою з вхідною напругою  $U_1$  ( $\varphi = 0$ ). Вид АЧХ (рис. 3.23,а) показує, що розглянутий фільтр є фільтром верхніх частот.

Недоліком цього фільтра є відсутність різкого переходу від смуги непрозорості до смуги прозорості. Частоту зрізу прийнято визначати такою, при якій модуль  $K$  дорівнює  $1/\sqrt{2} = 0,707$ . Підставивши  $\omega = \omega_{зр}$  і  $K = 1/\sqrt{2}$  у вираз (3.15), отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_{зр} RC}\right)^2}}; \quad \omega_{зр} = 1/RC = 1/\tau_\phi. \quad (3.17)$$

Таким чином, частота зрізу фільтра  $\omega_{зр}$ , має величину, обернену його сталій часу  $\tau_\phi = RC$ . Коли  $\omega = \omega_{зр} = 1/RC$ , опір конденсатора

$$X_c = 1/\omega_{зр} C = RC/C = R$$

і тоді:

$$\varphi = \arctg(1/\omega_{зр} RC) = \arctg(R/R) = \arctg 1 = 45^\circ,$$

тобто вихідна напруга випереджає вхідну за фазою на  $45^\circ$ .

### 3.4.2 RC-фільтри нижніх частот

На рис. 3.24 зображена схема Г-подібної ланки RC-фільтра нижніх частот. Тут вхідна напруга  $u_1(t)$  підводиться теж до послідовно увімкнених резистора  $R$  і конденсатора  $C$ , але вихідна напруга знімається з конденсатора з опором  $1/j\omega C$ . Тому комплексний коефіцієнт передачі напруги фільтра:

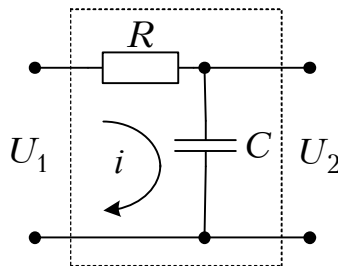


Рисунок 3.24 – Схема RC-фільтра нижніх частот

$$\dot{K} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j\tau_\phi}, \quad (3.18)$$

де  $\tau_\phi = RC$  – стала часу кола.

Визначимо модуль  $K$  та аргумент  $\varphi$  коефіцієнта передачі напруги у той же спосіб, що і в п. 3.4.1:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega CR}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega\tau_\phi}}, \quad (3.19)$$

$$\varphi = \text{arctg}(-\omega RC) = \text{arctg}(-\omega\tau_\phi). \quad (3.20)$$

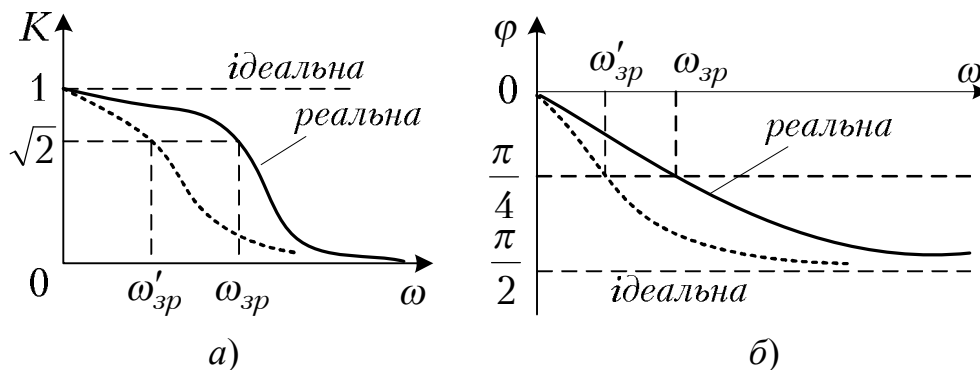


Рисунок 3.25 – а) – АЧХ та б) – ФЧХ RC-фільтра НЧ

Частотні характеристики фільтра подані на рис. 3.25. Зі зростанням частоти від 0 до  $\infty$  модуль  $K$ , як випливає із формули (3.19), зменшується від 1 до нуля, а аргумент  $\varphi$  (3.20) – від нуля до мінус  $90^\circ$ . Дійсно, при  $\omega = 0$  ємнісний опір набагато більший за опір  $R$ , через що вихідна напруга фільтра дорівнює вхідній ( $K = 1$ ) і збігається з нею за фазою ( $\varphi = 0$ ). Зі зростанням частоти до нескінченності ємнісний опір конденсатора зменшується до нуля ( $U_2 \rightarrow 0$ ), а з ним і модуль  $K \rightarrow 0$ , струм  $i$  визначається величезним (відносно  $X_C$ ) активним опором  $R$  і збігається із вхідною напругою за фазою. Вихідна ж напруга, яка знімається з конденсатора, стає нескінченно малою за амплітудою та відставатиме від вхідної на  $90^\circ$  ( $\varphi = -90^\circ$ ).

Частота зрізу фільтра  $\omega_{zp}$ , при якій  $K = 1/\sqrt{2}$ , визначається за співвідношенням:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_\phi)^2}};$$

з якого витікає, що

$$\omega_{zp} = 1/RC = 1/\tau_\phi, \quad (3.21)$$

тобто частота зрізу фільтра нижніх частот є величина обернена його сталій часу.

На частоті зрізу опір  $R = 1/\omega_{зр}C$ , а тому аргумент  $\varphi = \arctg(-\omega_{зр}\tau_{\phi}) = \arctg(-\tau_{\phi}\tau_{\phi}) = \arctg(-1) = -90^\circ$ , тобто вихідна напруга відстає за фазою від вхідної на кут  $90^\circ$ .

### 3.4.3 Смугові та загороджувальні RC-фільтри

Смуговий фільтр (рис. 3.26) – це касадно з'єднані ФВЧ ( $C_1R_2$ ) та ФНЧ ( $R_1C_2$ ).

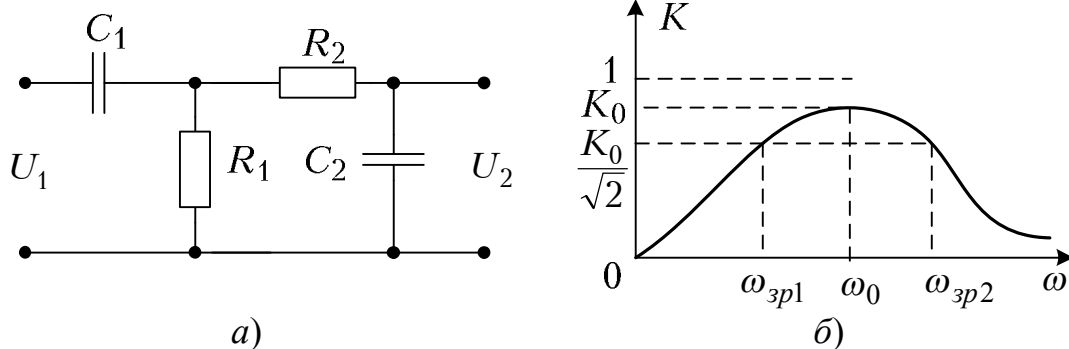


Рисунок 3.26 – Реальний смуговий фільтр: а) – схема, б) – АЧХ

Максимальний коефіцієнт передачі напруги  $K_0 \leq 1$  досягається на частоті генератора  $\omega = \omega_0 = \sqrt{R_1R_2C_1C_2}$ . На частоті  $\omega = 0$  уся вхідна напруга фактично зосереджена на конденсаторі  $C_1$  і тому  $U_2 = 0$  ( $K = 0$ ). При дуже високих частотах  $\omega \rightarrow \infty$  ємнісний опір конденсатора  $C_2$  буде нескінченно малим, що і призводить до спаду модуля  $K$  ( $K \rightarrow 0$ ). Крутість гілок АЧХ такого фільтра невелика.

Прикладом загороджувального (режекторного) фільтра є схема RC-фільтра, яка має назву "подвійний Т-подібний міст" (рис. 3.27,а). Він складається з двох паралельно увімкнених чотиріполюсників, один з яких є фільтром нижніх частот  $R_1C_2$ , а другий – фільтром верхніх частот  $C_1R_2$ . У відповідності до властивостей мостових схем на певній частоті  $\omega_0 = 1/RC$  струми  $i_2'$  та  $i_2''$  виявляються чисельно рівними, протифазними і у сумі дадуть  $i_2 = i_2' + i_2'' = 0$ . Ця частота  $\omega_0$  називається частотою балансу мосту. При відхиленні  $\omega$  від  $\omega_0$  у будь-який бік коефіцієнт передачі зростає, що і забезпечує смугу непрозорості у діапазоні частот  $\omega_{зр2} \dots \omega_{зр1}$

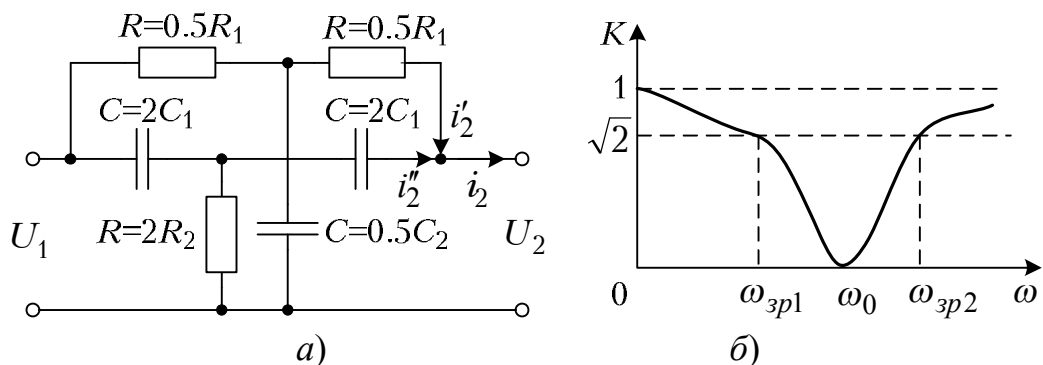


Рисунок 3.27 – Загороджувальний фільтр: а) – схема та б) – АЧХ



### 3.5 Фільтри зосередженої селекції

Фільтри зосередженої селекції (ФЗС) застосовуються у таких каскадах радіопередавачів, радіоприймачів або радіовимірювальних пристроїв, де необхідно забезпечити вузьку смугу пропускання при високій стабільності цієї смуги і високій вибірності фільтра (прямокутній частотній характеристиці).

Основними схемами ФЗС є:

- ланка каскадно-з'єднаних високодобротних контурів;
- п'єзоелектричні (кварцові) фільтри.

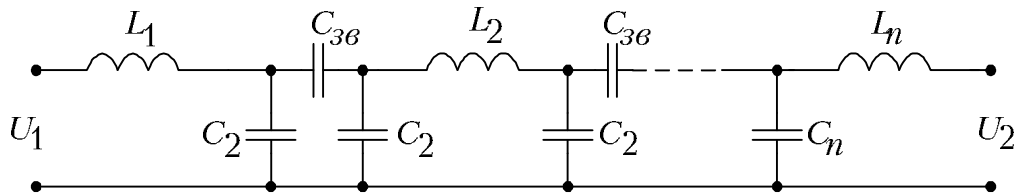


Рисунок 3.28 – Схема багатоконтурного ФЗС

На рис. 3.28 подана схема п'ятиконтурного ФЗС, що являє собою систему каскадно з'єднаних коливальних контурів із зовнішньоємнісим зв'язком. Крайні контури є Г-подібними, а середні - П-подібними ланками. Контури цього фільтра мають високу добротність і настроєні на частоти  $\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{05}$ , що забезпечує у смугі частот  $\omega_{01} \dots \omega_{05}$  високу прямокутність АЧХ (рис. 3.29), тобто високу вибірність.

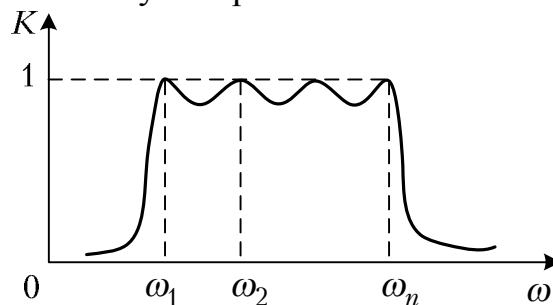


Рисунок 3.29 – АЧХ п'ятиконтурного ФЗС

Але найвужчу смугу пропускання (менше 1 кГц) можна отримати за допомогою кварцових резонаторів, дія яких основана на прямому та оберненому п'єзоелектричних ефектах.

#### Принцип дії кварцового резонатора

Прямий п'єзоелектричний ефект – поява електричних зарядів на обкладинках кварцоутримувача при механічних деформаціях кварцової пластини. Зворотний п'єзоэффект – механічна деформація пластини, коли до неї прикладено напругу. Якщо ця напруга змінна, то кварцова пластинка здійснює механічні коливання, які, у свою чергу, викликають змінні заряди.

Кварцова пластинка є пружним тілом і має яскраво виражену резонансну частоту  $f_0$ , яка залежить від товщини пластини  $d$  і визначається за формулою:

$$f_0(\text{МГц}) = (1,6 \dots 3,6)/d (\text{мм}) \quad (3.22)$$

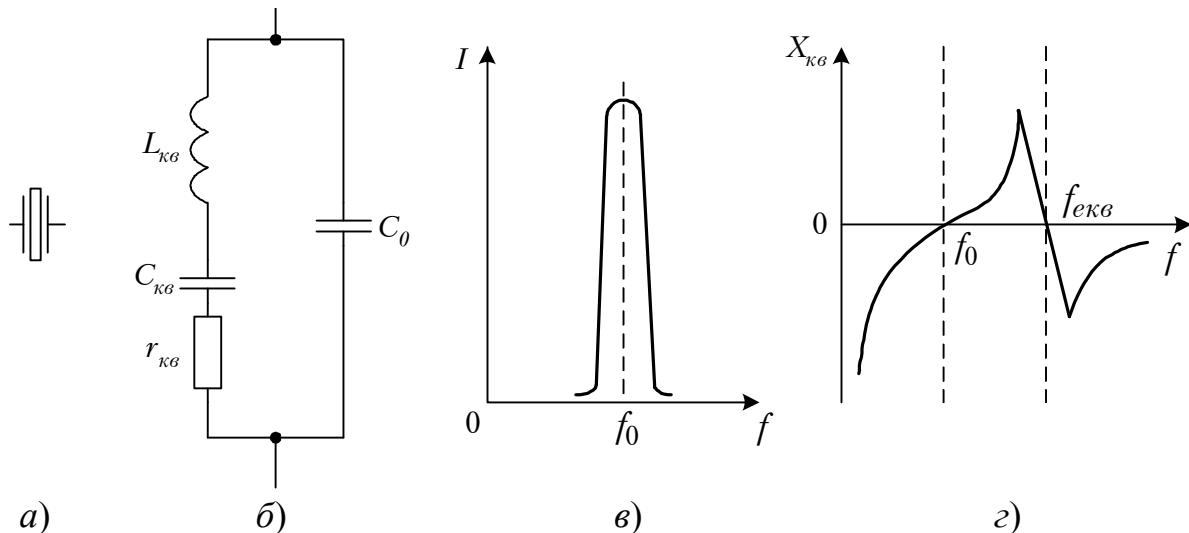


Рисунок 3.30 – Кварцовий резонатор: а) – умовне позначення; б) - еквівалентна схема резонатора; в) – залежність струму через кварц від частоти прикладеної напруги; г) – залежність реактивної складової вхідного опору резонатора від частоти прикладеної напруги

Значення числового коефіцієнта в (3.22) визначається типом зрізу кварцової пластини.

Коли частота прикладеної напруги  $f=f_0$ , то механічні коливання пластини особливо інтенсивні. Струм через кварцову пластину (рис. 3.30,в) стає максимальним і збігається за фазою з прикладеною напругою. При відхиленні частоти  $f$  від резонансної електричний струм різко зменшується. В області  $f < f_0$  струм випереджає за фазою напругу, а при  $f > f_0$  – відстає від напруги.

Такими властивостями характеризується, як відомо, послідовний коливальний контур. Параметри цього контуру називаються динамічними і мають величини:  $L_{kv}$  досягає декількох тисяч генрі, ємність  $C_{kv}$  не перевищує сотих часток пікофарада, активний опір  $r_{kv}$  може бути від десятка до тисяч омів. Тому добротність контуру, еквівалентного кварцовому резонатору, велика  $Q=10^4 \dots 10^6$ .

Крім динамічних параметрів  $L_{kv}$ ,  $C_{kv}$ ,  $r_{kv}$  еквівалентна схема кварцового фільтра містить активну ємність п'єзоелемента і кварцоутримувача  $C_0$ , яка вимірюється одиницями або десятками пікофарад. У зв'язку з цим розрізняють частоту резонансу послідовного контуру  $L_{kv}$ ,  $C_{kv}$ ,  $r_{kv}$ , яка дорівнює:

$$f_0 = 1/2\pi \sqrt{L_{kv} C_{kv}}$$

та частоту резонансу паралельного контуру III виду, рівну:

$$f_{0ekv} = 1 / 2\pi \sqrt{L_{kv} C_{ekv}},$$

де  $C_{ekv} = C_{kv} C_0 / C_{kv} + C_0$  – загальна ємність паралельного контуру.

Оскільки  $C_{кв} \ll C_0$ , то  $C_{екв} \approx C_{кв}$  і резонансні частоти  $f_0$  і  $f_{0екв}$  дуже мало відрізняються між собою.

При частотах, близьких і особливо менших  $f_0$ , струм вітки  $C_0$  настільки малий, що властивості схеми практично визначаються послідовним контуром  $L_{кв}, C_{кв}, r_{кв}$ . Це проявляється у тому, що, коли частота напруги  $f$  збільшується і проходить через  $f_0$ , реактивна складова вхідного опору усієї схеми  $X_{екв}$  проходить через нуль, змінюючи свій характер з ємнісного на індуктивний. В області більш високих частот уже відчувається струм через  $C_0$  і на частоті паралельного резонансу  $f_{0екв}$ , опір  $X_{кв}$  знову стає рівним нулю, але характер цього опору змінюється з індуктивного на ємнісний, як у будь-якому паралельному контурі.

Ширина смуги пропускання кварцового фільтра  $f_{0екв} - f_0$ , і, оскільки ці частоти відрізняються дуже мало, то смуга прозорості кварцового фільтра дуже вузька, а висока добротність кварцового резонатора забезпечує високу стабільність цієї смуги навіть при перепадах температури навколишнього середовища.

У смугі прозорості (пропускання) коефіцієнт передачі напруги приблизно дорівнює одиниці, а у смугі непрозорості - нулю.
---

У смугі пропускання вхідний узгоджений опір фільтра є активним, а у смугі непрозорості - реактивним.
--

Строго узгодженим цей опір є лише на одній частоті вхідного сигналу і дорівнює характеристичному опору фільтра $-\sqrt{L/C}$ .
--

### 3.6 Запитання та задачі для закріплення

1. Що називається електричним фільтром?
2. Як трактуються фізичні процеси в фільтрах у смугах прозорості та непрозорості?
3. Що таке АЧХ та ФЧХ фільтра?
4. Фізичний зміст модуля і аргументу комплексного коефіцієнта передачі напруги.
5. Переваги та недоліки реактивних та RC-фільтрів.
6. Переваги та недоліки реактивних фільтрів  $k$  та  $m$  типів.
7. Принцип дії та еквівалентні параметри кварцового резонатора.
8. Розрахувати параметри реактивного фільтра НЧ типу  $k$ , коли частота зрізу  $f_{зр} = 30$  кГц,  $R_n = 100$  Ом.
9. Розрахувати параметри реактивного фільтра ВЧ типу  $k$  за умовою попередньої задачі.
10. Розрахувати параметри смугового фільтра  $k$  типу, коли  $f_{зр1} = 50$  кГц,  $f_{зр2} = 100$  кГц,  $R_n = 75$  Ом.
11. Розрахувати значення добротності кварцового резонатора, використавши значення його еквівалентних параметрів.

## 4 РАДІОТЕХНІЧНІ ПРОЦЕСИ ТА ЗАДАЧІ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

### 4.1 Поняття інформації, повідомлення, сигналу

Термін “сигнал” часто зустрічається не тільки у науково-технічних питаннях, а і у повсякденному житті. Інколи, не думаючи про строгість термінології, ми ототожнюємо такі поняття як **сигнал, повідомлення, інформація**. Зазвичай це не призводить до непорозумінь, оскільки слово “сигнал”, яке походить від латинського терміна “signum” – “знак”, має широкий змістовий діапазон. Але, приступаючи до систематизованого вивчення радіотехніки, слід чітко уявляти внутрішній зміст цих трьох понять.

Під **інформацією** розуміється сукупність відомостей про предмети, події, процеси і факти, які мають місце навколо нас. Ці відомості подаються у формі **повідомлень**: мови, тексту телеграми, оптичного зображення, цифрових даних і т. ін. Повідомлення надходять за призначенням, тобто до споживача за двох умов:

- є хвильовий процес (акустичні чи електромагнітні хвилі), який здатний поширюватись від джерела інформації до її споживача;
- принаймні один з параметрів несучих коливань буде змінюватись у відповідності до повідомлення, яке передається.

Таким чином отримується **сигнал** – коливання, у якому відображено повідомлення шляхом відповідного змінювання одного з параметрів цього коливання. Основною особливістю радіотехніки є те, що носієм інформації при її передаванні, прийманні і добуванні є радіохвилі, які вільно поширюються у вільному просторі або спрямовуються по лініях (хвильоводах) передачі.

Радіочастоти, при яких уже можливий безпроводний зв'язок за рахунок радіохвиль згідно з рекомендаціями МККР (Міжнародного консультативного комітету радіозв'язку), поділяються на діапазони (див. табл. 4.1)

Таблиця 4.1

Найменування діапазону хвиль	Діапазон хвиль	Діапазон частот	Найменування діапазону частот
Міріаметрові	100...10 км	3...30 кГц	Дуже низькі
Кілометрові	10...1 км	3...30 0 кГц	Низькі
Гектометрові	1000...100 м	300...3000 кГц	Середні
Декаметрові	100...10 м	3...30 МГц	Високі
Метрові	10...1 м	30...300 МГц	Дуже високі
Дециметрові	100...10 см	300...3000 МГц	Ультрависокі
Сантиметрові	10...1 см	3...30 ГГц	Надвисокі

Узагальнена структурна схема передавання інформації (рис. 4.1) складається: з джерела повідомлень, передавального пристрою, проміжного середовища, приймального пристрою і отримувача інформації.

Передавальний пристрій перетворює повідомлення в сигнал, який, поширюючись у фізичному середовищі, досягає приймального пристрою, а він з прийнятого сигналу відновлює повідомлення.

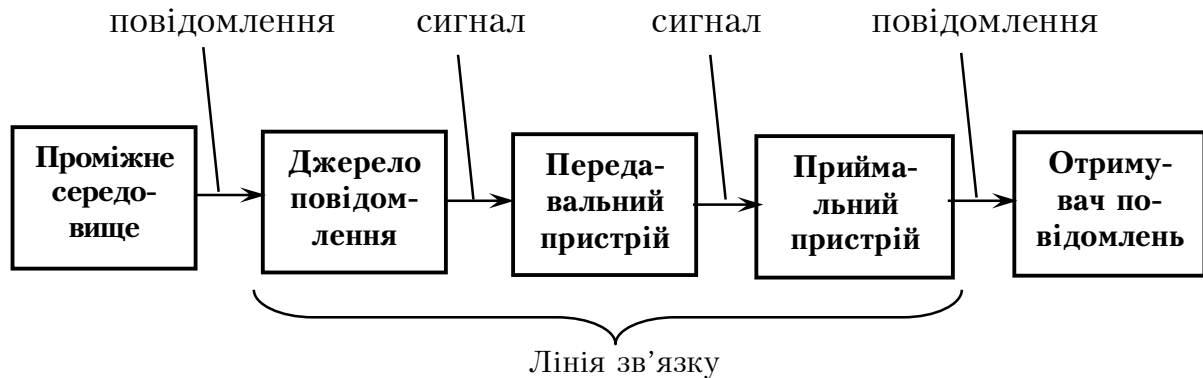


Рисунок 4.1 – Узагальнена структурна схема передавання інформації

Використані при цьому технічні засоби і середовище утворюють **стовбур лінії зв'язку**. Якщо ця лінія розрахована на одночасне передавання декількох повідомлень, то вона називається **багатоканальною**, а частина її, по якій проходить одне повідомлення – **каналом зв'язку**.

## 4.2 Телефонія

Найпростіший канал телефонного провідного зв'язку (рис. 4.2) складається з мікрофону  $M$ , джерела постійної напруги  $U_0$ , двопровідної лінії  $Ln$  і телефону  $T$ .

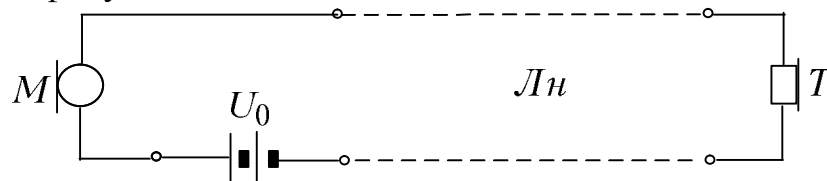


Рисунок 4.2 – Схема телефонного зв'язку

До появи від джерела повідомлення (людини, що говорить, наприклад) звука перед мікрофоном ( $t < t_0$ ) звуковий тиск  $p_m$  на мембрану мікрофону буде постійним, а тому електричний опір кола, підімкненого до джерела  $U_0$  не буде змінюватись, в колі протікатиме постійний струм  $i = I_0$  і мембрана телефону буде нерухомою (рис. 4.3,а). Починаючи з моменту  $t = t_0$ , коливання повітря, якими супроводжуються звукові хвилі, передаються мембрані мікрофону, вугільний порошок мікрофону то ущільнюється, то розрихлюється, опір порошку змінюється у такт зі звуковими коливаннями і відповідно змінюватиметься струм  $i$  (рис. 4.3,б).

Оскільки цей струм протікає по обмотці електромагніту телефону, то мембрана останнього робитиме механічні коливання з миттєвим значенням тиску  $p_m$  на повітря (рис. 4.3,в), що відтворить переданий звук.

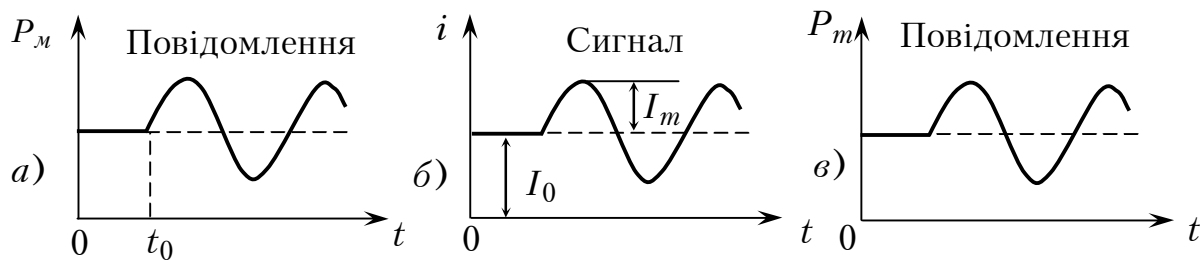


Рисунок 4.3 – Ілюстрації до пояснення дії лінії зв'язку

Струм  $i = i(t)$  відображає повідомлення і є **електричним сигналом**. Якщо це повідомлення є звуком чистого тону, то сигнал при  $t > t_0$  має змінюватись за гармонічним законом

$$i = I_0 + I_m \sin \Omega (t - t_0) = I_0 + I_m \sin 2\pi F (t - t_0),$$

де  $i$  – миттєве значення струму;

$I_0$  – струм при відсутності звукового повідомлення;

$I_m$  – амплітуда змінної складової струму;

$F$  – частота звукового повідомлення;

$\Omega = 2\pi F$  – кругова (циклічна) частота цього повідомлення;

$t_0$  – час початку звукового повідомлення.

Чим голосніше звукове повідомлення, тим більше змінюватиметься тиск на вугільний порошок мікрофону і тим більшим буде амплітуда струму у колі. Чим вищий тон звуку, тим частіші коливання повітря і мембрани мікрофону і тим більша частота сигналу  $F$ . Людське вухо реагує на звукові коливання у частотному діапазоні приблизно від 16 до 16 тисяч герців ( $F_{min} = 16$  Гц,  $F_{max} = 16$  кГц).

### 4.3 Основні радіотехнічні процеси

Сигнал у процесі його передавання по каналу зв'язку зазнає різноманітних перетворень. Деякі з цих процесів є обов'язковими для більшості радіотехнічних систем незалежно від їх призначення, а також від характеру повідомлень, які передаються. Назвемо ці фундаментальні процеси і водночас зазначимо їх основні властивості, наприклад, що стосується узагальненої схеми радіотехнічного каналу, поданої на рис. 4.2.

#### Перетворення вихідного повідомлення в електричний сигнал і кодування

При передаванні мови і музики таке перетворення здійснюється за допомогою мікрофону при передаванні телевізійних зображень за допомогою передавальних трубок. При передаванні письмового повідомлення (радіотелеграфія) спочатку здійснюється кодування, яке полягає у тому, що кожна літера абетки замінюється комбінацією

стандартних символів (наприклад, точок, тире і пауз у коді Морзе), які потім перетворюють у стандартні електричні сигнали (наприклад, точці відповідатиме короткий імпульс, тире – імпульс втричі довший і т.п.).

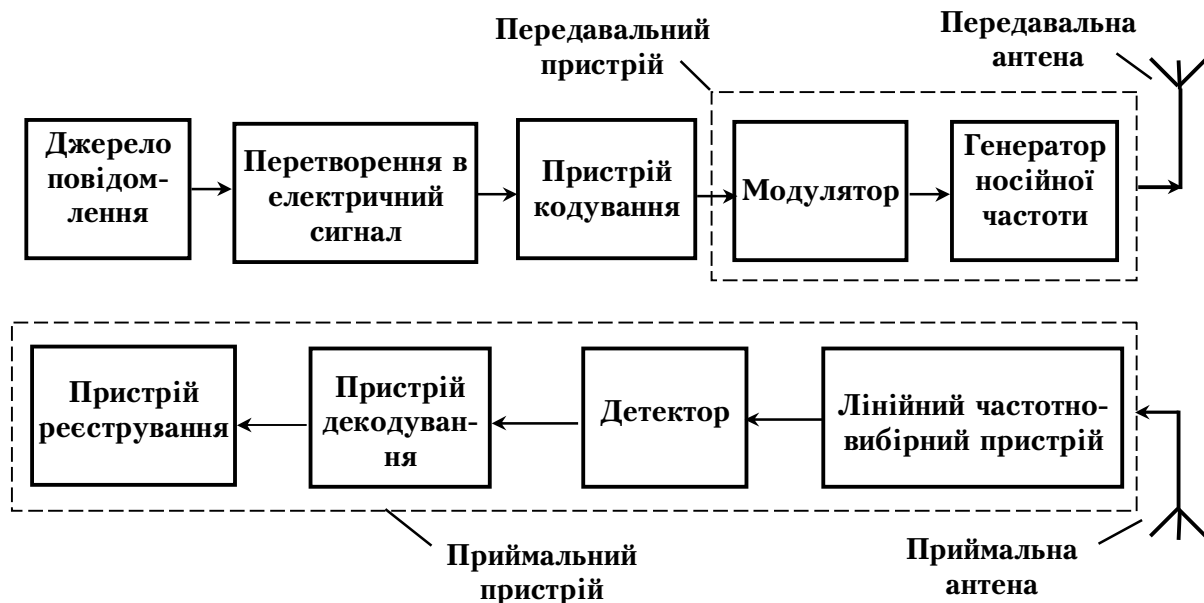


Рисунок 4.2 – Узагальнена структурна схема радіотехнічного каналу зв'язку

### Генерування високочастотних коливань

Високочастотний генератор є джерелом коливань несучої частоти. В залежності від призначення каналу радіозв'язку потужність коливань змінюється від тисячних часток вата до мільйонів ват. Значення несучої частоти визначається радіочастотним діапазоном, у якому працює радіопередавальний пристрій (див. табл. 4.1).

### Керування коливаннями (модуляція)

Процес модуляції полягає у змінненні одного чи декількох параметрів високочастотного коливання за законом повідомлення, що передається. Частота сигналу модулювання значно менша (у десять і більше разів) від несучої частоти генератора. Для здійснення модуляції використовують різні способи, зазвичай основані на змінюванні потенціалів електродів електронних ламп чи транзисторів, які входять до схеми радіопередавального пристрою. Основна характеристика процесу модуляції – ступінь відповідності між змінням параметра високочастотного коливання і сигналом моделювання.

### Підсилення слабких сигналів у приймальному пристрої

Приймальна антена уловлює незначну частку енергії, яку випромінює передавальна антена. В сучасних радіоприймальних пристроях реєстрація сигналів забезпечується при напругах на вході порядку мікрвольт. На виході ж (вході у реєструвальний пристрій) має бути сигнал з напругою порядку вольт або десятки вольт. Таким чином потребується підсилення до величини порядку  $10^6 \dots 10^7$  разів за напругою.

### **Перетворення частоти**

У передавальному пристрої сигнал високочастотної несучої частоти повинен характеризуватись високою стабільністю, наприклад, відхилення її від номінального (заданого) значення не повинно перевищувати  $\pm 0,0001\%$ .

Забезпечити ж такі вимоги при потребі роботи на високих несучих частотах дуже важко. Тому застосовують відносно низькочастотні генератори (так звані задавальні генератори), де таку вимогу до стабільності легко виконати, а потім цю частоту збільшують у декілька разів, використовуючи процес множення частоти.

У сучасних радіоприймальних пристроях для отримання високостабільного підсилення радіосигналів у широкому частотному діапазоні, використовується перетворення частоти з утворенням певного значення так званої проміжної частоти, незалежної від частоти прийнятого сигналу. І, таким чином, основне підсилення радіосигналу відбувається у підсилювачі проміжної частоти (ППЧ).

### **Виділення повідомлення з високочастотного коливання (детектування і декодування)**

Детектування є процесом, зворотним відносно модуляції. У результаті детектування має бути отримана напруга (струм), яка змінювалась би у часі так само, як змінюється один з параметрів (амплітуда, частота, початкова фаза) модульованого коливання. Іншими словами, є відновлення повідомлення, яке передавалось. Детектор, як правило, вмикається на виході приймального пристрою, а отже, до нього підводиться модульоване коливання, уже попередньо підсилене ППЧ, наприклад. Основна вимога до детектора – точне відтворення форми модулюючого (керуючого) сигналу.

Після детектування здійснюється декодування сигналу, тобто процес зворотний кодуванню. У багатьох радіотехнічних каналах кодування і декодування не використовується.

Окрім згаданих процесів, у такий чи інший спосіб пов'язаних з перетворенням частотних спектрів сигналів, у радіотехнічних пристроях широке застосування знаходить підсилення коливань без трансформації частоти, яке здійснюється у різних підсилювачах:

- низькочастотних підсилювачах керуючих сигналів, які використовуються перед модулятором у передавальному пристрої або після детектора – у радіоприймальному пристрої;

- високочастотні підсилювачі потужності у радіопередавальних пристроях;

- високочастотні та низькочастотні підсилювачі, які застосовуються у різноманітних вимірювальних пристроях.



## 4.4 Радіотелефонія і радіотелеграфія

### Радіотелефонія

До моменту часу  $t=t_0$  у передавальний пристрій ще не надходило повідомлення від джерела інформації (рис. 4.3).

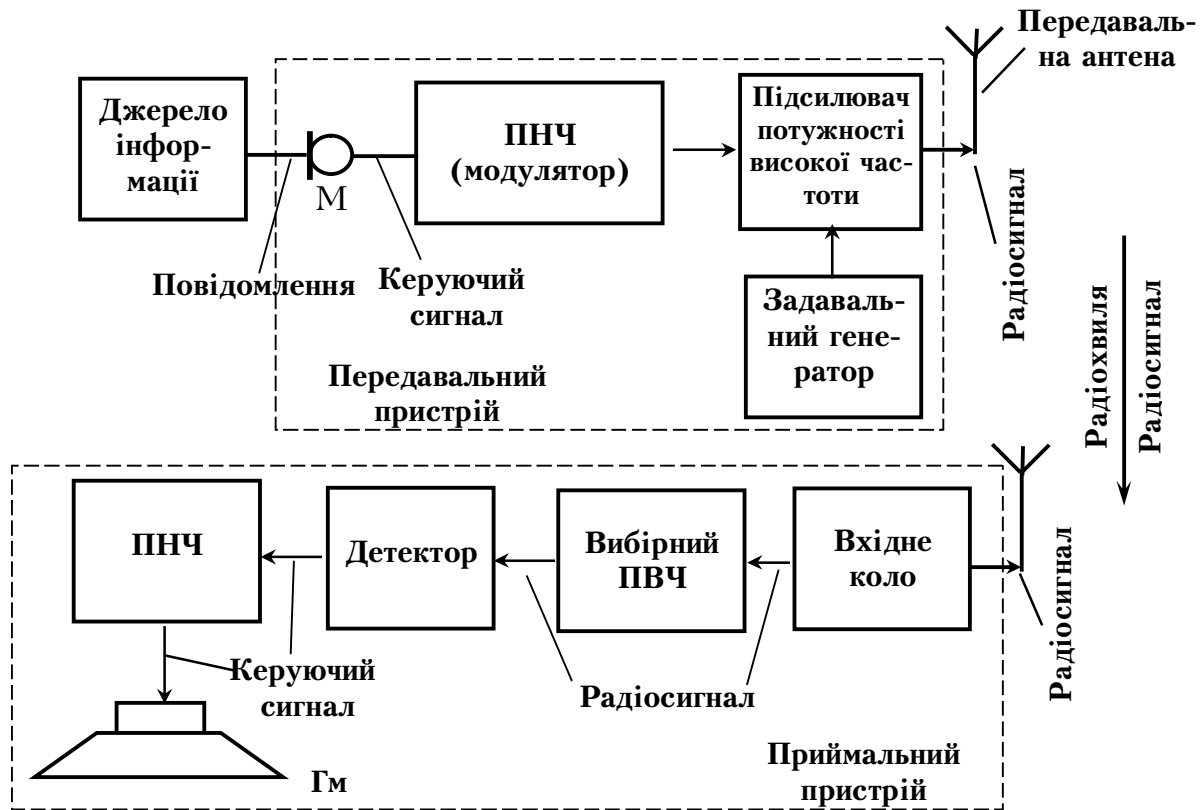


Рисунок 4.3 – Структурна схема каналу радіотелефонного зв'язку

Тому напруга, яка знімається з мікрофону, залишається постійною  $U_k=U_0$  (рис. 4.4,а). Відповідно напруга радіосигналу  $U$  (рис. 4.4,б), яку генератор високої (несучої) частоти створює на вході передавальної антени, має постійну амплітуду  $U_{om}$  і частоту  $\omega_0=2\pi f_0$ .

З моменту надходження звукового повідомлення ( $t=t_0$ ) воно перетворюється мікрофоном на керуючий сигнал низької частоти (НЧ)  $U_k = U_k(t)$ . Цей сигнал підсилюється підсилювачем низької частоти (ПНЧ) і модулює високочастотні коливання за амплітудою (рис. 4.4,б). Обвідна модульованого сигналу (пунктирна лінія) обмежує розмах високочастотних коливань за амплітудою. Частота цих коливань  $\omega_0$  залишається незмінною. Отриманий радіосигнал підсилюється за потужністю, подається в передавальну антену, випромінюється нею і поширюється у вигляді радіохвилі у вільному просторі.

Досягнувши приймальної антени, радіохвилі збуджують на її затискачах напругу – маленький за розмахом амплітуди модульований сигнал, подібний до зображеного на рис. 4.4,б. З багатьох радіосигналів,

які вловлює антена, вхідне коло приймального пристрою виділить потрібний (з частотою  $f_0$ ) і подасть на вибірний підсилювач, настроєний на сигнал саме цієї частоти. Підсилений радіосигнал після детектора перетворюється на низькочастотний сигнал, який є відтвореним керуючим сигналом. Після підсилення в підсилювачі низької частоти (ПНЧ) він поступає на гучномовець  $\Gamma_m$  і ми чуємо (сприймаємо) звукове повідомлення.

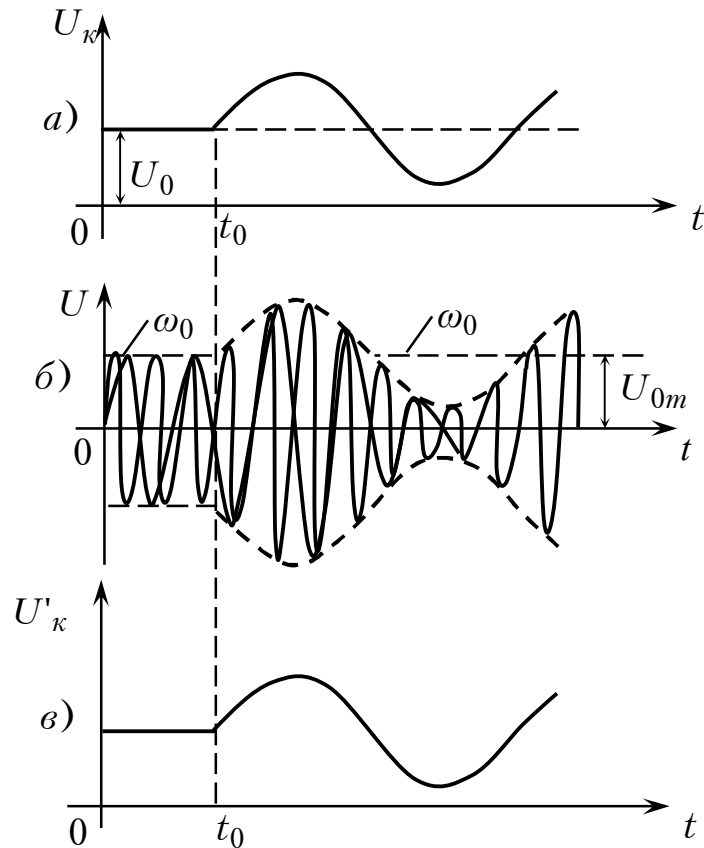


Рисунок 4.4 – Ілюстрація до пояснення принципу дії радіоканалу

### Радіотелеграфія

Кожній літері радіограми відповідає певна послідовність електричних імпульсів, яка називається *ковою комбінацією*. Сукупність цих послідовностей називається *кодом*. У телеграфії найпоширенішими є коди Бодо і Морзе. За Морзе, наприклад, точці відповідає короткий імпульс, тире – втричі довший, коротка пауза відділяє імпульси у межах однієї літери, а довга – пауза між літерами. За Бодо кожній літері ставиться у відповідність комбінація імпульсів і пауз однакової тривалості, а кожна кодова комбінація складається з п'яти таких знаків (імпульсів + пауз).

Щоб з'ясувати принцип організації радіотелеграфного зв'язку, розглянемо структурну схему (рис. 4.5). У радіотелеграфному каналі за джерелом повідомлення знаходиться пристрій кодування (*кодер*), призначений для отримання керуючих імпульсів, якими кодується

повідомлення. У передавачі ці імпульси модулюють, наприклад, амплітуду високочастотного сигналу несучої частоти.

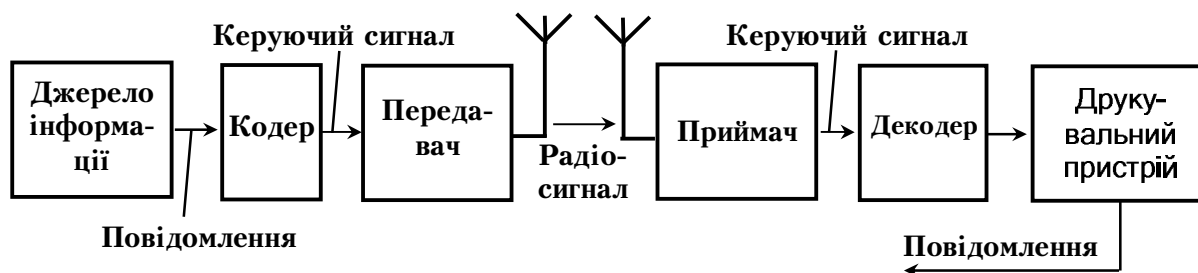


Рисунок 4.5 – Структурна схема радіотелеграфного каналу зв'язку

На рисунку 4.6,*а* зображено кодову комбінацію (точка і тире) керуючих імпульсів  $U_k$ , яка відповідає літері А за азбукою Морзе. На рисунку 4.6,*б* – радіоімпульси, утворені модуляцією високочастотного гармонічного коливання несучої частоти за амплітудою керуючими імпульсами.

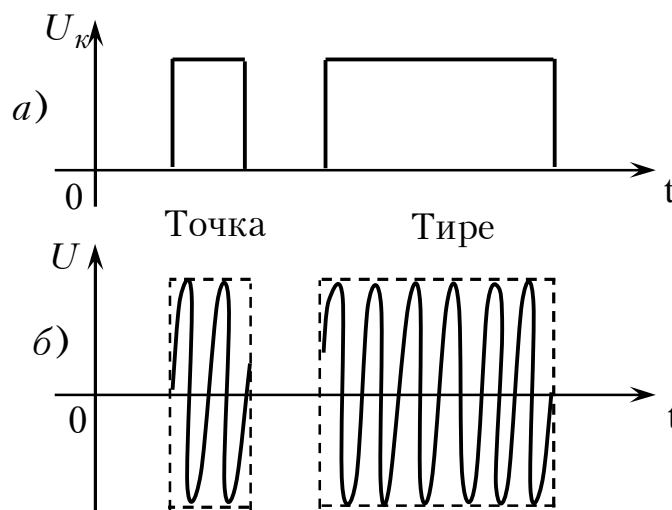


Рисунок 4.6 – Ілюстрація до пояснення принципу дії радіотелеграфного каналу зв'язку

Після детектування виділяться (відтворюються) імпульси, які збігаються за формою з керуючими. Декодувальний пристрій перетворить кодові комбінації на відповідні літери, а друкувальний пристрій телеграфного апарата надрукує текст повідомлення (телеграми).

#### 4.5 Радіолокація

*Радіолокація* – це процес виявлення і вимірювання координат і параметрів руху об'єктів за допомогою радіотехнічних засобів. Найпростіша імпульсна радіолокаційна станція (РЛС) (рис. 4.7) має одну антену, яка використовується і для випромінювання, і для приймання радіохвиль, відбитих від об'єкта. Генератор тактових (зондувальних) відеоімпульсів виробляє періодичну послідовність імпульсів з періодом  $T$  та дуже малою тривалості  $t_i$  (рис. 4.8,*а*).

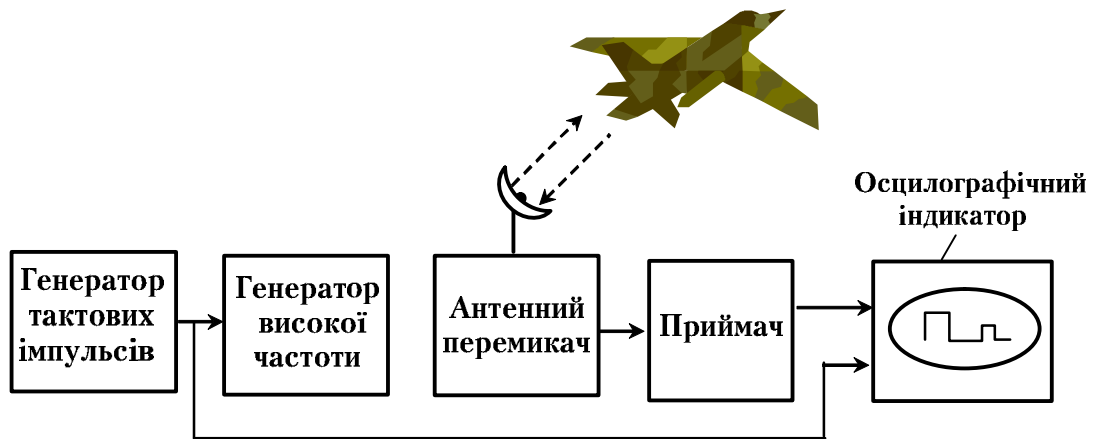


Рисунок 4.7 – Спрощена структурна схема імпульсної РЛС

Ці імпульси модулюють сигнал генератора високої частоти, після якого потужні зондувальні радіоімпульси через антенний перемикач надходять до антени і випромінюються у формі електромагнітної хвилі у напрямку об'єкта.

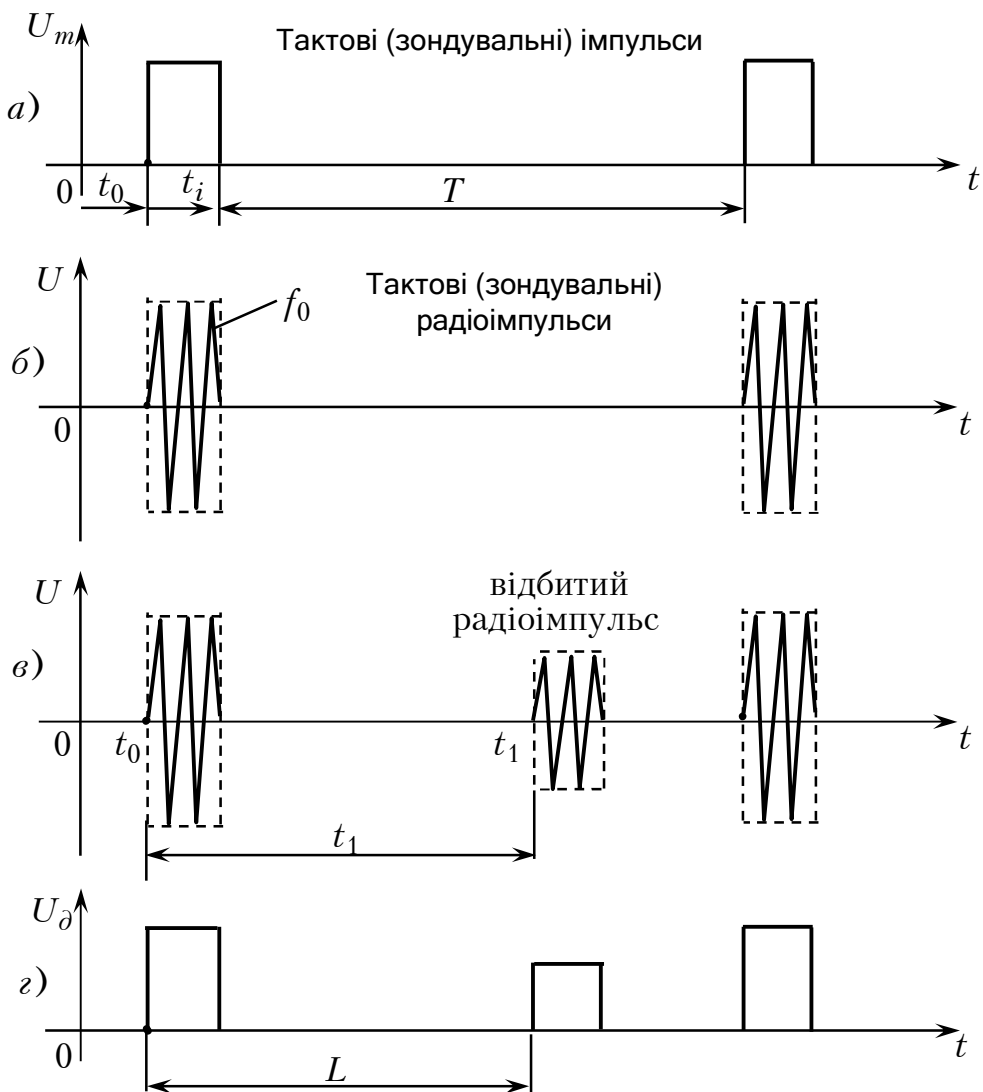


Рисунок 4.8 – Ілюстрація до пояснення принципу дії імпульсної РЛС

Паралельно з цим тактовий (зондувальний) імпульс надходить у блок осцилографічного індикатора і запускає розгортку променя електронно-променевої трубки у той самий момент, коли відповідний радіоімпульс покидає антену і починає рухатися до об'єкта (момент  $t_0$  на рис. 4.8). На екрані індикатора на початку лінії розгортки з'явиться після детектора зображення зондувального імпульсу  $U_3$ .

В інтервалах між зондувальними радіоімпульсами антенний перемикач автоматично підмикає антену до входу приймача. Зондувальні радіоімпульси досягають об'єкта, відбиваються від нього у різні боки (розсіюються) і частина з них повернеться і буде уловлена антеною РЛС. Прийнятий радіоімпульс, який називається відбитим (рис. 4.8,в) і зондувальний будуть розділеними у часі, який дорівнює інтервалу часу, витраченого радіоімпульсом на проходження відстані від антени до цілі  $l$  двічі (до цілі і назад), а значить:

$$t - t_0 = \frac{2l}{c},$$

де  $l$  – відстань до цілі (об'єкта);  
 $c$  – швидкість радіохвилі (радіоімпульса);  
 $t$  – час, затрачений при цьому.

З отриманого результату відстань до цілі дорівнюватиме

$$l = \frac{c}{2}(t_1 - t_0).$$

Таким чином, відстань до об'єкта прямо пропорційна (бо  $c/2 = \text{const}$ ) відрізку часу ( $t_1 - t_0$ ), який дорівнює часовій дистанції між зондувальним і відбитим радіоімпульсами, зображеними на екрані індикатора. Отже, проградувавши лінію розгортки у одиницях  $l$  (метрах, кілометрах), отримуємо можливість безпосередньо зчитувати значення відстані до об'єкта з екрана індикатора (рис. 4.8,г).

Інформація про кутове положення об'єкта локації отримується, наприклад, завдяки просторовій напрямленості випромінювання антени. При цьому електромагнітна енергія, що випромінюється, концентрується у вузькому просторовому промені. Коли антену повертати і максимум променя збігається з ціллю, відбитий промінь матиме найбільшу амплітуду і мітка на індикаторі буде максимальною. За кутовим положенням антени визначають кутове положення об'єкта.

## 5 СИГНАЛИ

### 5.1 Класифікація сигналів

Приступаючи до вивчення будь-яких нових об'єктів чи явищ, у науці прагнуть провести їх попередню класифікацію. Попробуємо це зробити стосовно електричних сигналів (у подальшому просто сигналів). Основна мета – вироблення ознак класифікації, а також, що дуже важливо для подальшого, установлення певної термінології.

#### Математичні моделі сигналів

Сигнали як фізичні процеси можна вивчати за допомогою різних приладів і пристроїв – електронних осцилографів, вольтметрів, вимірювальних приймачів. Такий емпіричний (експериментальний) метод має суттєвий недолік. Явища, які спостерігаються експериментатором, завжди виступають як часткові, одиничні прояви, позбавлені узагальненості, яка дозволила б міркувати про їх фундаментальні властивості, передбачати результати у змінених умовах.

Для того, щоб зробити сигнали об'єктами теоретичного вивчення і розрахунків, потрібно визначити спосіб їх математичного опису або, говорячи мовою сучасної науки, створити **математичну модель** досліджуваного сигналу.

Математичною моделлю сигналу може бути, наприклад, функціональна залежність, аргументом якої є час. Як правило, у подальшому такі математичні моделі сигналів будуть позначатися символами латинської абетки:  $U(t)$ ,  $i(t)$ ,  $f(t)$  і т. ін.

Так, запис:

$$u(t) = U_m \cos \omega_0 t$$

є формула як модель гармонічної напруги з миттєвим значенням  $u(t)$ , амплітудою  $U_m$  та круговою частотою  $\omega_0$ .

Суттєва сторона методу дослідження сигналів, який базується на понятті математичної моделі, полягає у тому, що ми отримуємо можливість описувати саме ті властивості сигналів, які об'єктивно виступають як визначально важливі. При цьому ігноруються більшість другорядних ознак. Наприклад, у переважній більшості випадків вкрай важко підібрати точні функціональні залежності, які б відповідали електричним коливанням, що спостерігаються експериментально (скажімо, на екрані осцилографа). Тому дослідник, керуючись усією сукупністю даних, вибирає з наявного арсеналу математичних моделей сигналу ту, яка у конкретній ситуації найкращим і найпростішим чином описує фізичний процес. Отже, вибір моделі – процес значною мірою творчий.

Знаючи математичні моделі, можна порівнювати сигнали між собою, знаходити їх тотожність і відмінність, проводити класифікацію.

### Детерміновані і випадкові сигнали

У розподіленні сигналів на детерміновані (регулярні) і випадкові (нерегулярні) лежить принцип можливості чи неможливості точного передбачення їх миттєвих значень у будь-які моменти часу.

Якщо математична модель сигналу дозволяє здійснити таке передбачення, то сигнал називається **детермінованим** у інших випадках – **випадковим**.

Раніше ми визначили сигнал як електричне коливання, яке несе повідомлення (інформацію). Детерміновані сигнали ніякої інформації не несуть, окрім факту наявності самого коливання, бо відому функцію часу (математичну модель) можна створити і не приймаючи випромінювання. Отже, передавати по лінії зв'язку можна лише ті повідомлення, які заздалегідь на приймальному кінці лінії не можливо передбачити. Для отримувача повідомлень вони є випадковими і це дозволяє стверджувати, що тільки **випадкові коливання несуть інформацію**.

Випадкові коливання описуються за допомогою теорії ймовірностей. Іноді для спрощення розрахунків рівняння випадкових коливань записують дещо наближено – як суму множини детермінованих коливань. Маючи це на увазі, будемо називати сигналом не тільки випадкові коливання, а й детерміновані, хоча це не є точним.

Детерміновані сигнали описуються певними функціями часу. Тому сигнали, математичні моделі яких є періодичними функціями часу:

$$f(t) = f(t \pm nT),$$

де:  $T$  – період функцій;

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ; називаються **періодичними сигналами**. У протилежному випадку – **неперіодичними сигналами**.

Сигнали, які описуються парними функціями:

$$f(t) = f(-t)$$

називаються **парними сигналами**, а сигнали, які описуються непарними функціями:

$$f(t) = -f(-t)$$

називаються **непарними сигналами**.

### Аналогові, дискретні і цифрові сигнали

Часто фізичний процес, який породжує сигнал, розвивається у часі таким чином, що значення сигналу можна вимірювати у будь-які моменти часу. Сигнали такого класу прийнято називати **аналоговими** (континуальними).

Термін “аналоговий сигнал” підкреслює, що такий сигнал “аналогічний”, повністю подібний до фізичного процесу, який його породив. Аналоговий сигнал наочно подається своїм графіком (рис. 5.1,а), який може бути як неперервним, так і з точками розриву.

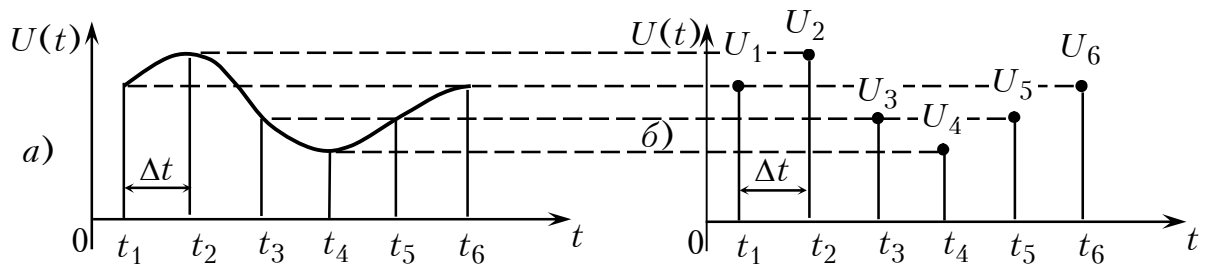


Рисунок 5.1 – Моделі сигналів: а) – аналогового, б) – дискретного

Спочатку у радіотехніці використовувались сигнали виключно аналогового типу. Такі сигнали дозволяли успішно розв’язувати відносно нескладні технічні задачі (радіозв’язок, телебачення). Аналогові сигнали було просто генерувати, приймати і обробляти за допомогою доступних на ті роки засобів.

На зміну аналоговим у ряді випадків прийшли імпульсні системи, робота яких ґрунтується на використанні **дискретних сигналів**. Найпростіша математична модель дискретного сигналу – це множина точок  $t_1, t_2, t_3, \dots$  на осі часу, у кожній з яких визначено певне значення сигналу  $U_1, U_2, U_3, \dots$  (рис. 5.1,б). Як правило, **крок дискретизації**  $\Delta t$  для кожного сигналу постійний.

Однією з переваг дискретних сигналів у порівнянні з аналоговими є відсутність необхідності відтворення сигналу неперервно в усі моменти часу. За рахунок цього з’являється можливість по одній і тій самій радіолінії передавати повідомлення від різних джерел, організувавши багатоканальний зв’язок з розділенням каналів у часі.

Слід зауважити, що, виходячи із визначення аналогового сигналу, який є подібним до фізичного процесу, який його породив, такий сигнал може бути неперервним (рис. 5.1,а; рис. 5.2) та перервним (рис. 5.2,б).

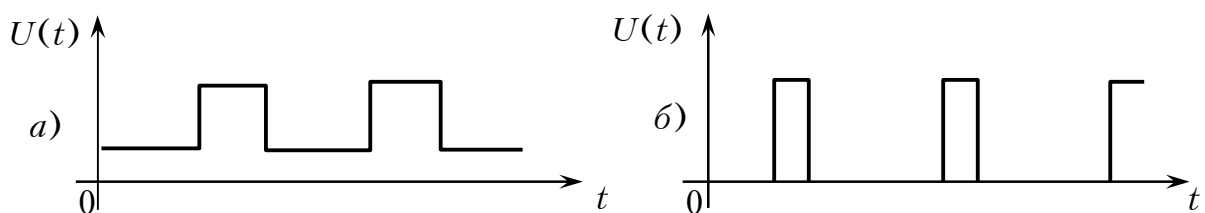


Рисунок 5.2 – Моделі аналогових сигналів: а) – неперервного, б) – перервного імпульсних

Сигнали, зображені на рисунку 5.2, є характерними для більшості імпульсних пристроїв радіотехніки, автоматики і т. ін.

Особливим різновидом дискретних сигналів є *цифрові сигнали*. Порівняємо дискретні сигнали, моделі яких зображені на рис. 5.3. На рис. 5.3,а поданий сигнал, заданий при дискретних значеннях часу ( $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ ), величина ж сигналу у цих точках може приймати будь-які значення. Таким чином, термін “дискретний” характеризує не сигнал, а спосіб його задання на осі часу.



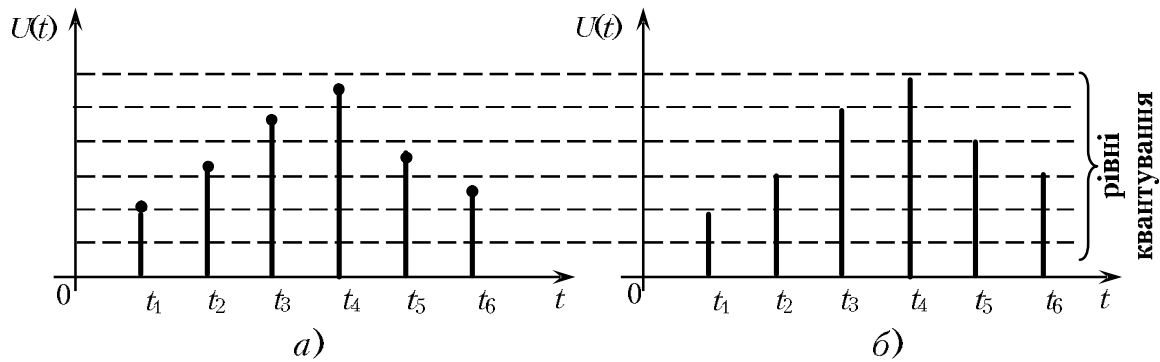


Рисунок 5.3 – Приклади моделей сигналів: *a)* – дискретного, *б)* – цифрового

На рис. 5.3,*б* поданий сигнал може приймати лише дискретні значення, “прив’язані” до рівнів квантування. У таких випадках говорять про сигнал, *квантований за рівнем з кроком квантування  $\Delta U$* .

У подальшому термін “дискретний” будемо застосовувати тільки стосовно дискретизації у часі (з інтервалом дискретизації  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ ), а дискретність за рівнем будемо позначати терміном “квантування” (з кроком  $\Delta U$ ).

Квантування, як це ми з’ясуємо пізніше, використовують при поданні сигналів у цифровій формі за допомогою цифрового кодування і тому дискретний у часі та квантований за рівнем *сигнал* (рис. 5.3,*б*) у подальшому будемо називати *цифровим*.

Слід мати на увазі, що по суті будь-який дискретний чи цифровий сигнал (мова йде про сигнал – фізичний процес, а не про математичну модель) є сигналом аналоговим. Наприклад, повільно змінному часі аналоговому сигналу можна поставити у відповідність його дискретний образ, який має вигляд послідовності прямокутних імпульсів однакової тривалості (рис. 5.4,*а*), висота яких пропорційна значенням  $U(t)$  у точках відліку. Однак можна зробити по-іншому, зберігаючи висоту імпульсів постійною, але змінюючи їх тривалість у відповідності до поточного відлікового значення (рис. 5.4,*б*).

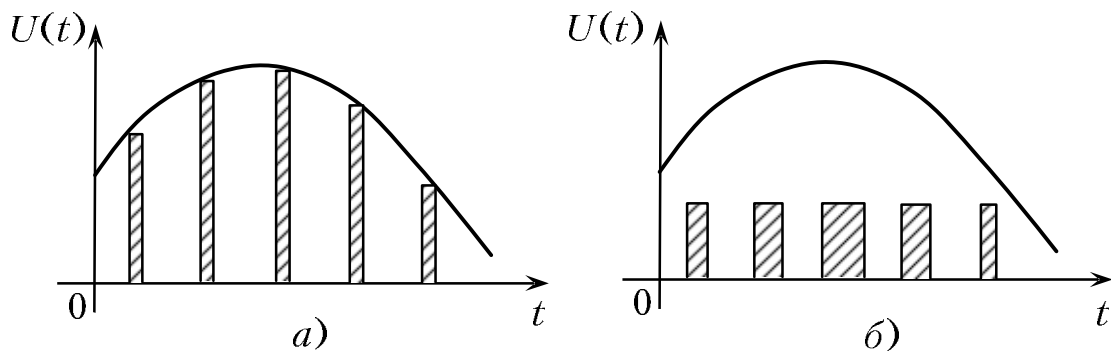


Рисунок 5.4 – Дискретизація аналогового сигналу: *a)* – при змінній амплітуді; *б)* – при змінній тривалості імпульсів відліку

Обидва подані тут способи дискретизації аналогового сигналу у точках дискретизації **пропорційні площі** окремих відео-імпульсів.

### Імпульсно-модульовані сигнали

У результаті дискретизації сигналу у часі він перетворюється у послідовність імпульсів. Вихідною для такого перетворення є періодична послідовність імпульсів, які називаються *тактовими*. Модуляція таких імпульсів здійснюється пристроєм, узагальнена схема якого зображена на рис. 5.5.

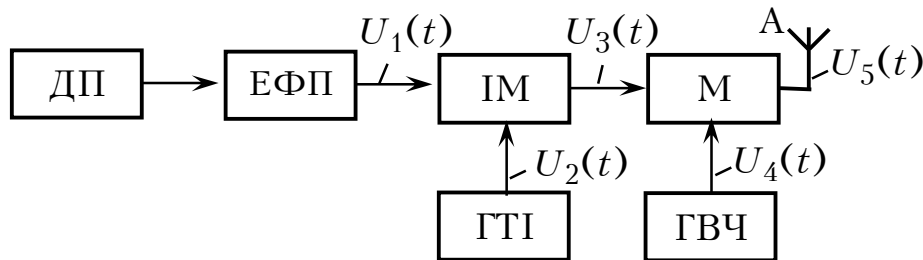


Рисунок 5.5 – Структурна схема передавального пристрою з імпульсною модуляцією

Повідомлення від його джерела (ДП) за допомогою електро-фізичного перетворювача (ЕФП) приймає форму керуючої напруги  $U_1(t)$ , яка в імпульсному модуляторі (ІМ) керує тактовими імпульсами  $U_2(t)$ , які створюються генератором тактових імпульсів (ГТІ). З виходу імпульсного модулятора знімаються модульовані відеоімпульси  $U_3(t)$ , які у каскаді модуляції (М) самі модулюють неперервні гармонічні коливання  $U_4(t)$  несучої частоти  $f_0$ , які генеруються генератором високої частоти (ГВЧ). Отримані радіоімпульси  $U_5(t)$  випромінюються антеною А у простір.

На часових діаграмах (рис. 5.6) показані: напруга  $U_1(t)$ , що відповідає повідомленню, яке передається; тактові відеоімпульси  $U_2(t)$ , з постійними параметрами  $t_i$ ,  $T_T$ ,  $U_m$  та відеоімпульси  $U_3(t)$ , які відрізняються від тактових тим, що промодульовані пропорційно напрузі  $U_1(t)$ , за амплітудою у випадку амплітудно-імпульсної модуляції (АІМ), за тривалістю (шириною) імпульсів при широтно-імпульсній модуляції (ШІМ), за частотою прямування імпульсів при частотно-імпульсній модуляції (ЧІМ), за фазою, точніше за часом ( $\Delta t_{\text{фім}}$ ) відставання імпульсів при фазово-імпульсній модуляції (ФІМ), за кодом після квантування, за рівнем при кодово-імпульсній модуляції (КІМ).

Імпульсна модуляція відкриває великі можливості для багатоканального зв'язку, коли по одній лінії передачі одночасно передаються багато повідомлень (каналів). У таких системах широко використовується часове розділення каналів. При цьому прямування тактових імпульсів  $T_T$  має бути достатньо великим, щоб за час  $T_T$  можна було почергово передавати окремі імпульси чи кодові комбінації усіх каналів.

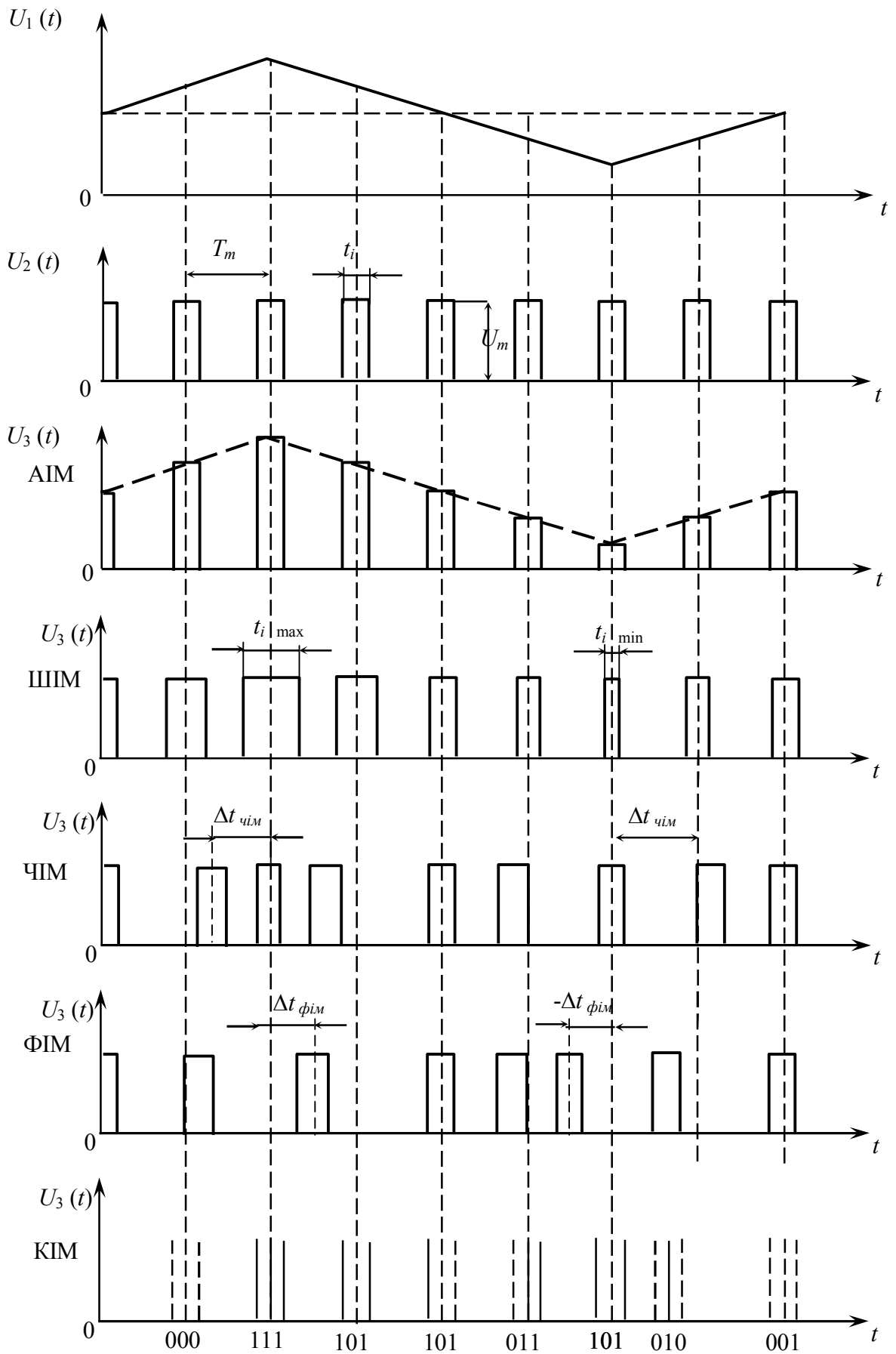


Рисунок 5.6 – Часові діаграми модуляції імпульсних коливань

Для позначення виду імпульсної модуляції у радіосистемі використовують запис у вигляді дроби, чисельник якого показує, яка модуляція застосовується на тактовій частоті  $F_T = 1/T_T$ , а знаменник – яка на несучій частоті  $f_0$ : АІМ/ЧМ, КІМ/АМ, ШІМ/ФМ і т.ін.

## 5.2 Амплітудно– і фазочастотний спектри

### Поняття про спектри періодичних сигналів

Розглянемо напругу періодичного сигналу, математичною моделлю якого є періодична функція часу  $u(t)$  така, що

$$u(t) = U(t \pm nT),$$

де  $T$  – період цього процесу,

$n = 0, 1, 2, 3 \dots n$  – будь-яке дійсне ціле число.

З курсу вищої математики відомо, що така функція розкладається у ряд Фур'є, тобто на нескінченно велике число гармонічних складових:

– постійну складову  $U_0$  (нульову гармоніку), яка дорівнює середньому значенню сигналу за період;

– першу гармоніку  $u_1(t)$ , з амплітудою  $U_{1m}$ , початковою фазою  $\varphi_1$  і частотою  $\omega_1$ , яка дорівнює частоті повторення сигналу  $\omega$ ;

– другу гармоніку  $u_2(t)$  з амплітудою  $U_{2m}$ , початковою фазою  $\varphi_2$  і частотою  $\omega_2 = 2\omega$ ;

– третю гармоніку  $u_3(t)$  з амплітудою  $U_{3m}$ , початковою фазою  $\varphi_3$  і частотою  $\omega_3 = 3\omega$  і т.ін.

Таким чином можемо записати:

$$U(t) = U_0 + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + U_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots,$$

або скорочено:

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin(n\omega + \varphi_n), \quad (5.1)$$

де  $n$  – натуральний ряд чисел.

Можна виключити початкові фази з ряду Фур'є (5.1), якщо використати відоме у тригонометрії перетворення:

$$\begin{aligned} U_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n) &= U_{nm} \sin n\omega t \cdot \cos \varphi_n + U_{nm} \cos n\omega t \cdot \sin \varphi_n = \\ &= U'_{nm} \sin n\omega t + U''_{nm} \cos n\omega t, \end{aligned}$$

де  $U'_{nm} = U_{nm} \cdot \cos \varphi_n$ ,  $U''_{nm} = U_{nm} \cdot \sin \varphi_n$  – постійні величини, які виражають відповідно амплітуди напруги  $n$ -ої гармоніки для синусних і косинусних складових:

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U'_{nm} \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} U''_{nm} \cos n\omega t. \quad (5.2)$$

### Спектри парних і непарних сигналів

Остання форма запису ряду Фур'є є особливо зручною у випадку парних і непарних сигналів (парних і непарних функцій часу  $u(t)$ ).

Нагадаємо, що для парних сигналів виконується умова:

$$u(t) = u(-t),$$

а для непарних:

$$u(t) = -u(-t).$$

Крім цього згадаємо, що для парних сигналів у ряді вигляду (5.2) усі коефіцієнти  $U'_{nm} = 0$ . Тому для парних сигналів ряд Фур'є має вигляд:

$$U(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U''_{nm} \cos n\omega t, \quad (5.3)$$

а для непарних:

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U''_{nm} \sin n\omega t, \quad (5.4)$$

Інакше кажучи, парні сигнали можна подати рядом Фур'є, який має лише парні гармонічні функції (косинусні), а непарні рядом Фур'є, який матиме лише непарні (синусні) гармоніки.

### Амплітудно-частотний і фазочастотний спектри

Сигнал  $U$  можна розглядати як функцію часу  $u(t)$  або частоти  $u(\omega)$ . Відповідно розрізняють два методи подання і дослідження сигналів: **часовий і спектральний**.

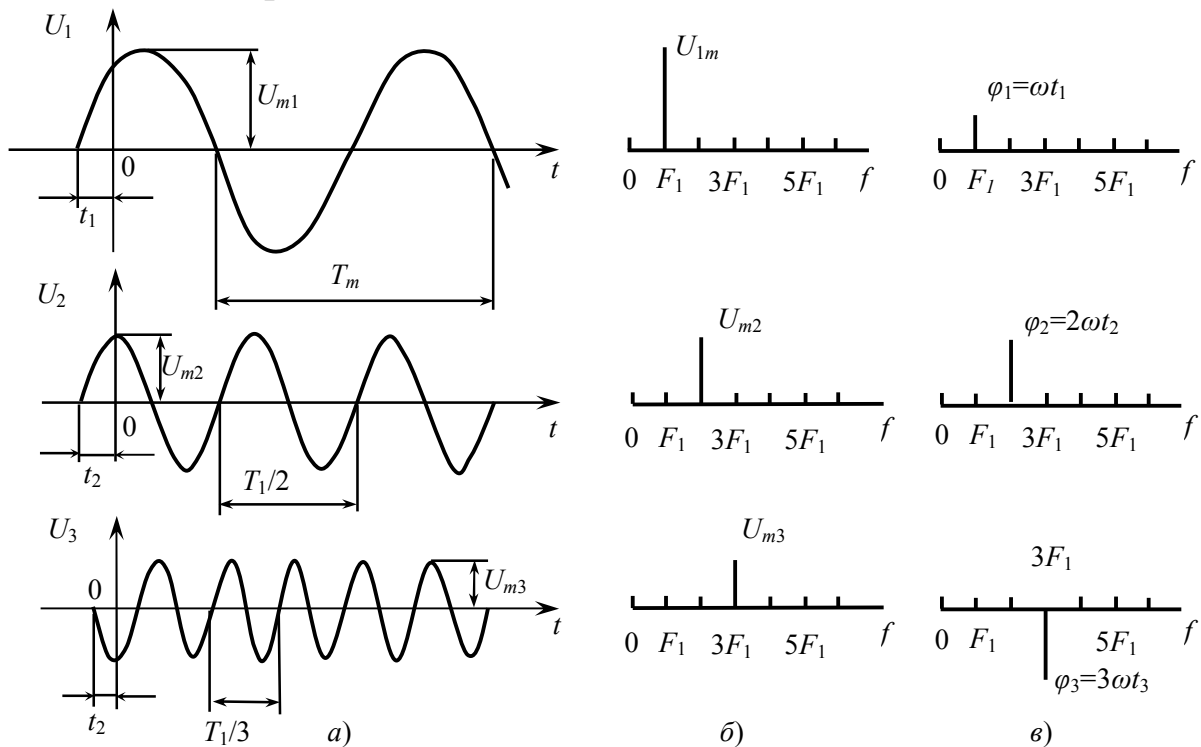


Рисунок 5.7 – Три перших гармоніки несинусоїдального коливання:

а) – часові діаграми; б) – амплітудно-частотні спектри;

в) – фазочастотні спектри

У часовому поданні гармонічний сигнал – це синусне або косинусне коливання (напруги, струму і т. ін.)

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi),$$

де  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

У спектральному поданні такий сигнал задається одним значенням частоти (монохроматичний сигнал). Спектр сигналу зображується двома діаграмами, з яких одна називається **амплітудно-частотним спектром (АЧС)**, а друга – **фазочастотним спектром (ФЧС)**.

На цих діаграмах вісь абсцис утворює шкалу частот  $f = n \cdot F_1$ , а по осі для кожної з  $n$  гармонік відкладаються відрізки, довжина яких пропорційна їх амплітуді  $U_{mn}$  (для АЧС, рис. 5.7,б) або початковій фазі  $\varphi_n$  (для ФЧС, рис. 5.7,в).

На рис. 5.7 та 5.8 подані **графічні моделі** сигналів: часові діаграми (рис. 5.7,а) амплітудно-частотні характеристики (рис. 5.7,б; 5.8,а) та фазочастотні характеристики (рис. 5.7,в; 5.8,б).

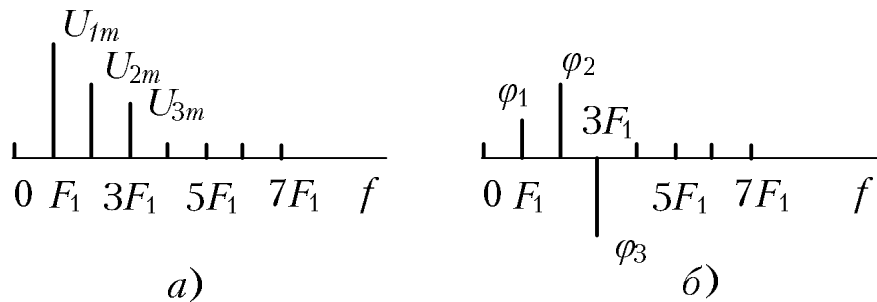


Рисунок 5.8 – Спектри несинусоїдального періодичного сигналу:  
а) – амплітудно-частотний; б) – фазочастотний

Очевидно, на рис. 5.8 зображено графічні моделі періодичного несинусоїдального сигналу, який складається з трьох гармонік, графічні моделі яких зображено на рис. 5.7.

### 5.3 Спектральний аналіз періодичної послідовності прямокутних імпульсів

Поставимо задачу так: задана періодична послідовність прямокутних відеоімпульсів (рис. 5.9), а необхідно:

- визначити спектральні складові цього сигналу;
- побудувати амплітудно-частотний спектр;
- прослідкувати зв'язок між формою сигналу та його спектром;
- проаналізувати вплив параметрів сигналу на форму його спектра.

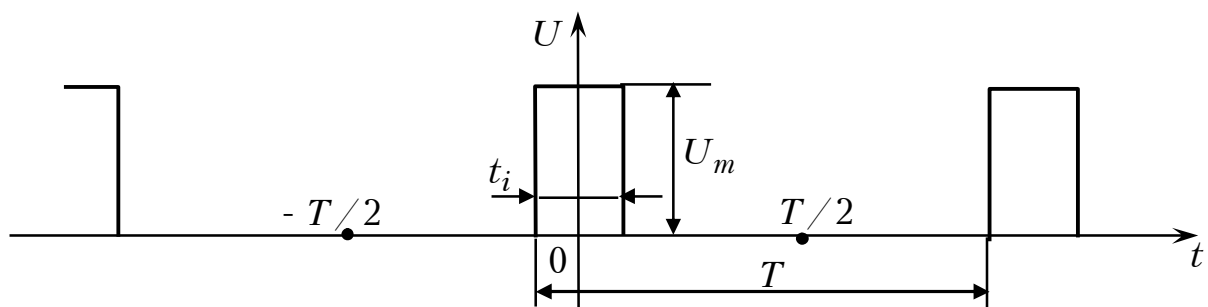


Рисунок 5.9 – Часова діаграма періодичної послідовності прямокутних імпульсів

### Вирази для складових спектра і його побудова

Заданий сигнал є парним і розкладається у ряд Фур'є вигляду:

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \cos n\Omega t, \quad (5.5)$$

де  $\Omega = 2\pi F$ ,  $F=1/T$  – частота прямування імпульсів у заданій послідовності.

Постійна складова сигналу  $U_0$  дорівнює середньому його значенню за період (на інтервалі  $-T/2, +T/2$ ):

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} U_m \cdot dt = \frac{1}{T} \left( \frac{t_i}{2} + \frac{t_i}{2} \right) \cdot U_m = \frac{t_i}{T} \cdot U_m = \frac{U_m}{q},$$

де  $q = t_i/T$  – шпаруватість імпульсної послідовності.

Амплітуда  $n$ -ої гармоніки ряду (5.5), як відомо з курсу вищої математики,  $U_{nm}$  дорівнює:

$$U_{nm} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) \cdot \cos n\Omega t \cdot dt$$

у конкретному випадку:

$$\begin{aligned} U_{nm} &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) \cos n\Omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} U_m \cos n\Omega t dt = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{U_m}{n\Omega} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} \cos n\Omega t d(n\Omega t) = \frac{2}{T} \cdot \frac{U_m}{n\Omega} \sin n\Omega t \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{U_m}{n\Omega} 2 \sin n\Omega \frac{t_i}{2}. \end{aligned}$$

Помноживши і розділивши отриманий результат на  $t_i/2$ , матимемо:

$$U_{nm} = \frac{2U_m}{q} \cdot \frac{\sin \frac{n\Omega t_i}{2}}{\frac{n\Omega t_i}{2}} = \frac{2U_m}{q} \cdot \frac{\sin x}{x}, \quad (5.6)$$

де  $x = \frac{1}{2} n\Omega t_i$ .

### Побудова спектра

Графік функції  $\sin x/x$  зображено пунктирною лінією; функція досягає одиниці (максимального значення) при  $x = 0$  і проходить через нуль при  $x = \pi, 2\pi, 3\pi$ . Екстремальні значення функція має у точках  $\frac{3}{2}\pi(-0,424), \frac{5}{2}\pi(0,254), \frac{7}{2}\pi(-0,182), \dots$

При  $f_n = nqF$  ця функція проходить через нуль, тобто  $\frac{n\Omega t_i}{2} = k\pi$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), звідси  $\frac{n2\pi Ft_i}{2} = k\pi$ ;  $n \frac{t_i}{T} = k$ ;  $n = kq$ .

Отже, гармоніки з нульовими амплітудами матимуть номери кратні значенню шпаруватості  $q$  імпульсної послідовності.

Частоти цих гармонік можна визначити через значення тривалості імпульсів  $t_i$ : так, для першої з них  $\frac{q\Omega t_i}{2} = \pi$ ;  $\frac{qF \cdot 2\pi t_i}{2} = \pi$ ;  $qF = \frac{1}{t_i}$ ; для

другої:  $2qF = \frac{2}{t_i}$ ; для третьої  $3qF = \frac{3}{t_i}$ ;

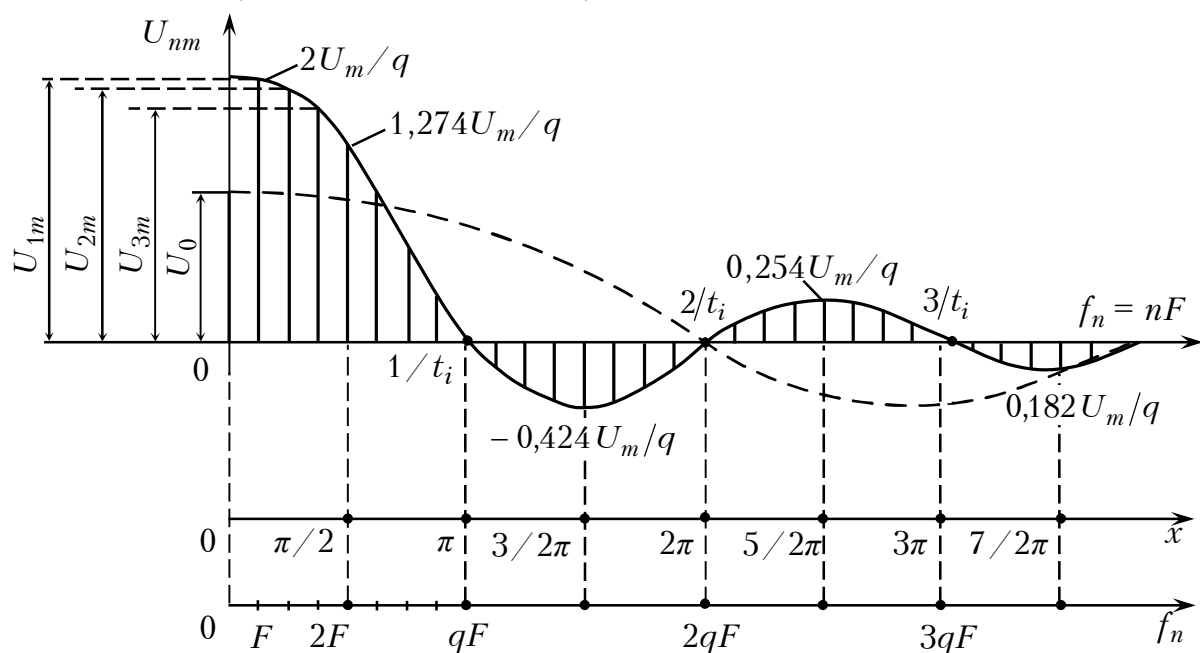


Рисунок 5.10 – Спектральна діаграма послідовності прямокутних імпульсів

### Аналіз впливу параметрів сигналу на форму його спектра

Припустимо, що тривалість імпульсів  $t_i$  зменшилась удвоє, а період прямування імпульсів  $T$  залишився незмінним. За таких змін шпаруватість послідовності  $q$  удвічі збільшиться, номери гармонік з нульовими амплітудами удвічі збільшаться і обвідна (пунктирна лінія) перетне вісь абсцис у точці з частотою  $2qF$ , далі –  $4qF$ , ... Амплітуда всіх гармонік вдвічі зменшується.

При цьому картинка розтягнеться по горизонталі, а відстань між сусідніми спектральними лініями, яка дорівнює  $F = 1/T$ , залишатиметься незмінною.

Якщо ж тривалість імпульсів залишити незмінною, а збільшити удвоє період  $T$ , то шпаруватість  $q$  зросте удвоє. Перша нульова гармоніка матиме номер (і значення частоти) удвічі більший, але місце знаходження її на



довжині осі абсцис залишиться незмінним, бо удвічі зменшиться частота  $F$ , яка визначає відстань між сусідніми спектральними лініями, і їх кількість на цьому інтервалі осі зросте удвоє. Тобто, зовні картинка мало зміниться, але спектр буде удвічі щільнішим, а амплітуди гармонік будуть також удвічі меншими.

На практиці дуже часто ширину спектра визначають гармонікою, частота якої дорівнює:

$$F_{\max} = \frac{2}{t_i}, \quad (5.7)$$

де, очевидно,  $F_{\max}$  – максимальна за частотою гармонічна складова ряду Фур'є, яка ще береться до уваги. При цьому сигнал за формою відрізнятиметься від ідеального (рис. 5.9) прямокутного імпульсу.

### Зв'язок між формою сигналу і його спектром

Дослідимо характер впливу кількості гармонік, які входять до складу обмеженого ряду Фур'є, на форму сигналу. Для цього до постійної складової напруги  $U_0$  послідовно будемо додавати (графічно) першу гармоніку  $u_1 = U_{m1} \cos \Omega t$ , другу  $u_2(t) = U_{m2} \cos 2\Omega t$ , третю –  $u_3(t) = U_{m3} \cos 3\Omega t, \dots$  (рис. 5.11).

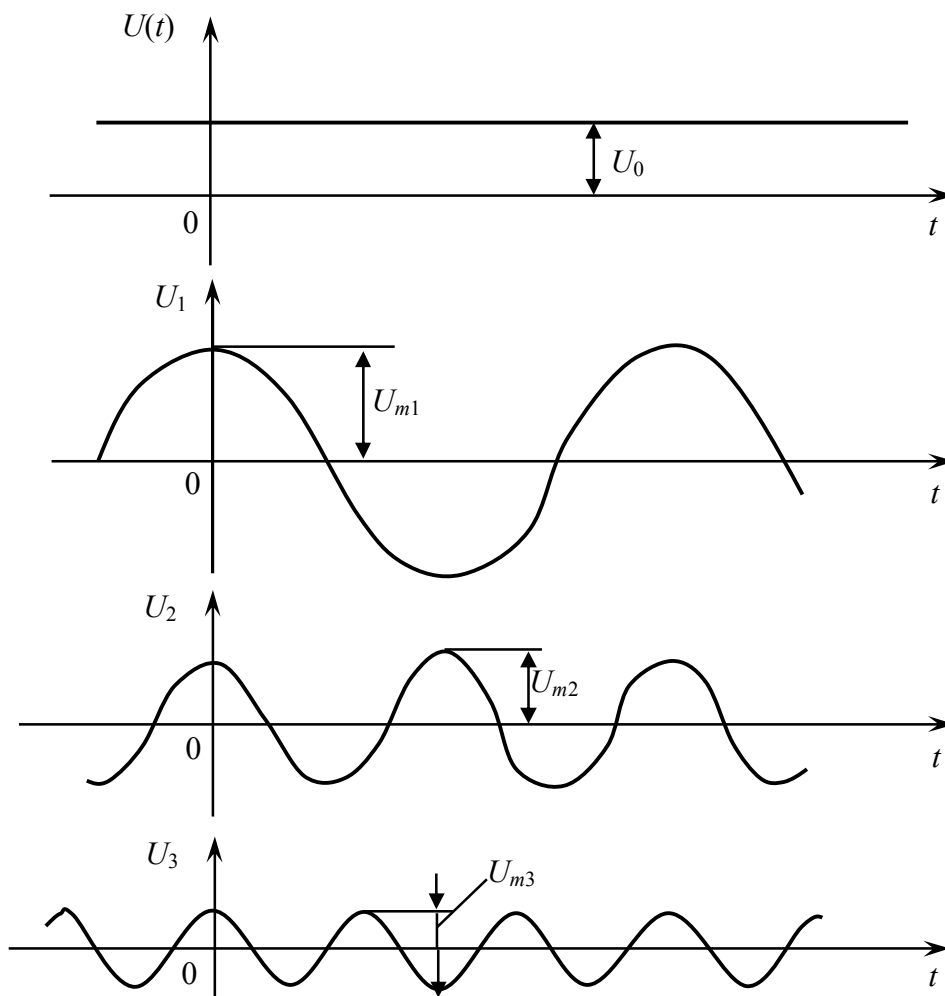


Рисунок 5.11 – Постійна складова і перші три гармоніки

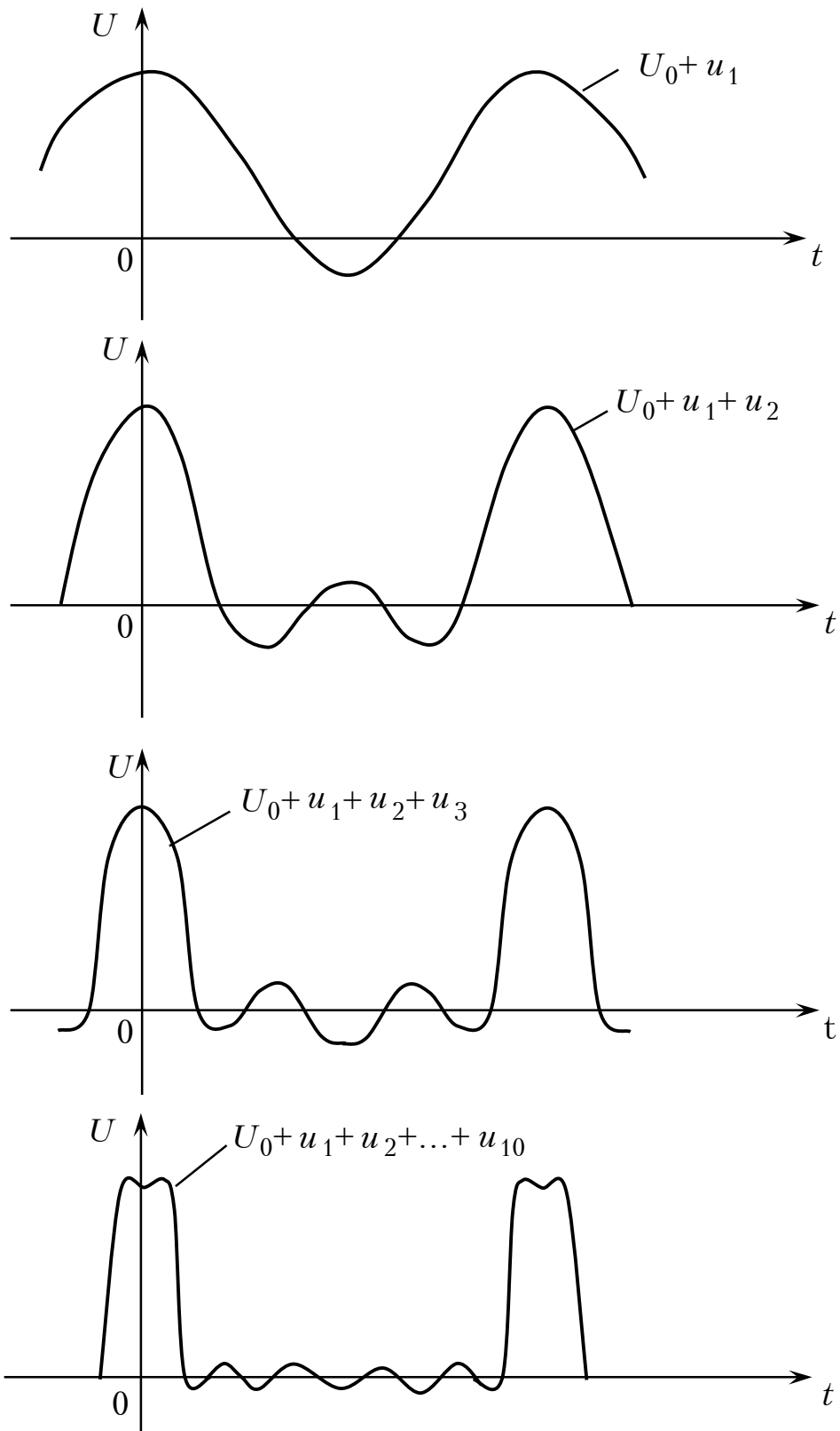


Рисунок 5.12 – Послідовне графічне додавання складових гармонічного ряду

Як бачимо на рис. 5.12, чим більшу кількість високочастотних гармонік додати, тим крутішим стає фронт імпульсу, тим він стає ближчим до прямокутного.

Ще раз зауважимо, що зростання шпаруватості  $q$  (збільшення періоду  $T$  або зменшення тривалості  $t_i$ ) призводить до зменшення амплітуд усіх складових спектра, що видно з виразів для  $U_0$  та  $U_{nm}$ .

Фізично це можна пояснити тим, що зі зростанням шпаруватості зростає кількість гармонік на ширині спектра (від 0 до  $F_{\max}$ ), а тому частка енергії сигналу, яка дістанеться кожній із гармонік, зменшиться.

## 5.4 Спектральний аналіз неперіодичних сигналів

### Спектральна функція амплітуд

Перейдемо від періодичної послідовності прямокутних імпульсів (рис. 5.9) до одиничного імпульсу. Для цього збільшимо період прямування імпульсів до нескінченності ( $T \rightarrow \infty$ ), при цьому, очевидно, частота прямування імпульсів  $F$  зменшиться до нескінченно малої величини ( $F \rightarrow 0$ ).

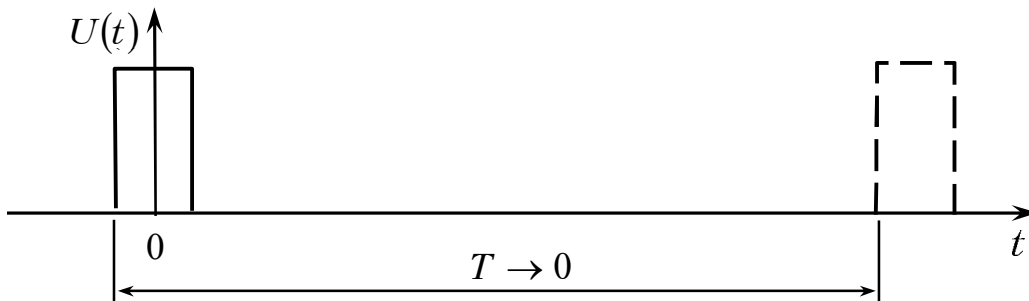


Рисунок 5.13 – Приклад неперіодичного сигналу – одиничного імпульсу

Пропорційно збільшенню шпаруватості імпульсів ( $q \rightarrow \infty$ ) зростає нескінченно число спектральних ліній і нескінченно зменшується їх висота. Зближуючись, спектральні лінії утворюють суцільний спектр амплітуд, який зобразити неможливо, бо при розподілі енергії сигналу між нескінченною множиною гармонік амплітуда кожної з них стає нескінченно малою. У таких випадках використовують більш загальне поняття, чим спектр амплітуд, а саме *спектральну функцію амплітуд*  $S_n$ , яка дорівнює результату від ділення половини амплітуди гармоніки  $U_{nm}/2$  на інтервал частот між сусідніми спектральними лініями  $F$ :

для парної функції  $u(t)$

$$S_{nc} = \frac{U_{nm}}{2F} = \frac{2}{2F \cdot T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos n\Omega t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \cos n\Omega t dt; \quad (5.8)$$

для непарної функції  $u(t)$

$$S_{nc} = \frac{U_{nm}}{2F} = \frac{2}{2F \cdot T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \sin n\Omega t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \sin n\Omega t dt. \quad (5.9)$$

## Комплексна спектральна щільність амплітуд

Для суцільного спектра, коли відстань між лініями спектра гранично дорівнює нулю, поняття “число гармонік” втрачає зміст. Тому замінимо  $n\Omega$  ( $n \rightarrow \infty, \Omega \rightarrow 0$ ) на поточне значення кругової частоти  $\omega$ , яка тепер може приймати будь-які цілі і нецілі значення, а не тільки  $n\Omega$  (де  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) дискретні. Замість  $-T/2 \dots +T/2$  установеимо границі інтегрування  $-\infty \dots +\infty$ . Тоді спектральна функція для парної функції  $S_{nc}$  переходить у спектральну щільність амплітуд  $S_c(\omega)$ :

$$S_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \omega t dt, \quad (5.10)$$

для непарної функції часу спектральна функція  $S_{ns}$  використовує синусні складові, але уже зі знаком мінус:

$$S_s(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \sin \omega t dt. \quad (5.11)$$

З виразів (5.8)...(5.11) видно, що ні спектральна функція  $S_n$ , ні спектральна щільність амплітуд  $S(\omega)$  не залежить від періоду прямування імпульсів  $T$ . І це закономірно, бо у скільки разів збільшується період, у стільки ж само зменшуються амплітуди гармонік  $U_{nm}$ , а спектральна функція  $S_n = U_{nm} \cdot T$ , залишається незмінною.

Суцільний спектр довільної неперіодичної функції часу  $u(t)$  виражається так званою *комплексною спектральною щільністю амплітуд*  $\dot{S}(\omega)$ , яка включає в себе обидві складові (5.10) і (5.11):

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= S_c(\omega) + jS_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin \omega t dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Як комплексна величина функція  $\dot{S}(\omega) = S_c(\omega) + j S_s(\omega)$  характеризується модулем  $S(\omega) = |\dot{S}(\omega)|$  і аргументом  $\varphi(\omega)$ . Вони визначаються косинусною  $S_c(\omega)$  і синусною  $S_s(\omega)$  складовими комплексної спектральної щільності амплітуд сигналу:

$$S(\omega) = \sqrt{S_c^2(\omega) + S_s^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \arctg(S_s(\omega)/S_c(\omega)).$$

Залежність  $S(\omega)$  називається амплітудно-частотним, а  $\varphi(\omega)$  – фазочастотним спектрами неперіодичної функції  $u(t)$ , які відрізняються від раніше розглянутих АЧС і ФЧС більшою загальністю (універсальністю).

## Пряме і обернене перетворення Фур'є

Вираз

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.12)$$

називається *прямим перетворенням Фур'є* і дозволяє за дійсною часовою функцією  $u(t)$ , яка описує форму сигналу, визначити комплексну спектральну густину амплітуд  $\dot{S}(\omega)$ , яка виражає залежність від частоти відносних амплітуд  $S(\omega)$  і початкових фаз  $\varphi(\omega)$  гармонічних складових сигналу.

Якщо ж розв'язати обернену задачу, тобто за відомою спектральною густиною  $\dot{S}(\omega)$  знайти функцію часу  $u(t)$ , то необхідно виконати *обернене перетворення Фур'є*, яке подається у вигляді:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.13)$$

Пряме (5.12) і обернене (5.13) перетворення Фур'є служать ще одним доказом єдності часового і частотного (спектрального) методів дослідження сигналів.

За результатами, отриманими у підрозділах 5.3 і 5.4 зауважимо, що періодичний процес  $u(t)$  має лінійчастий спектр (з відстанню між сусідніми лініями  $F = 1/T$ ) і виражається рядом Фур'є, а неперіодичний процес, зокрема одиничний імпульс ( $T \rightarrow \infty, F \rightarrow 0$ ), має суцільний спектр і виражається інтегралом Фур'є (5.13).

### Спектри імпульсів

Для одиничного імпульсу, поданого парною функцією часу, комплексна спектральна щільність амплітуд має тільки косинусну складову (5.10). Підставляючи у цю формулу значення  $u(t) = U_m$  на інтервалі  $-t_i/2 \dots +t_i/2$  та  $u(t)=0$  поза цим інтервалом часу:

$$\begin{aligned} S_c(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \omega t dt = \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} U_m \cos \omega t dt = \\ &= U_m \frac{\sin \omega t}{\omega} \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = U_m \cdot t_i \frac{\sin(\frac{1}{2} \omega t_i)}{\frac{1}{2} \omega t_i} = A_i \cdot \frac{\sin x'}{x'}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

де  $A_i = U_m \cdot t_i$  – площа імпульсу;  $x' = \frac{1}{2} \omega t_i$  – незалежна змінна, яка подібно змінній  $x$  для лінійчастого спектра, прямо пропорційна частоті  $\omega$  (нагадаємо, що  $\omega$  може приймати будь-які значення, тобто змінюватись неперервно, а не приймати лише певні дискретні значення).

Порівнюючи (5.6) і (5.14), помічаємо, що обвідна спектра періодичної послідовності імпульсів і одиничного імпульсу цієї послідовності мають однакову форму.

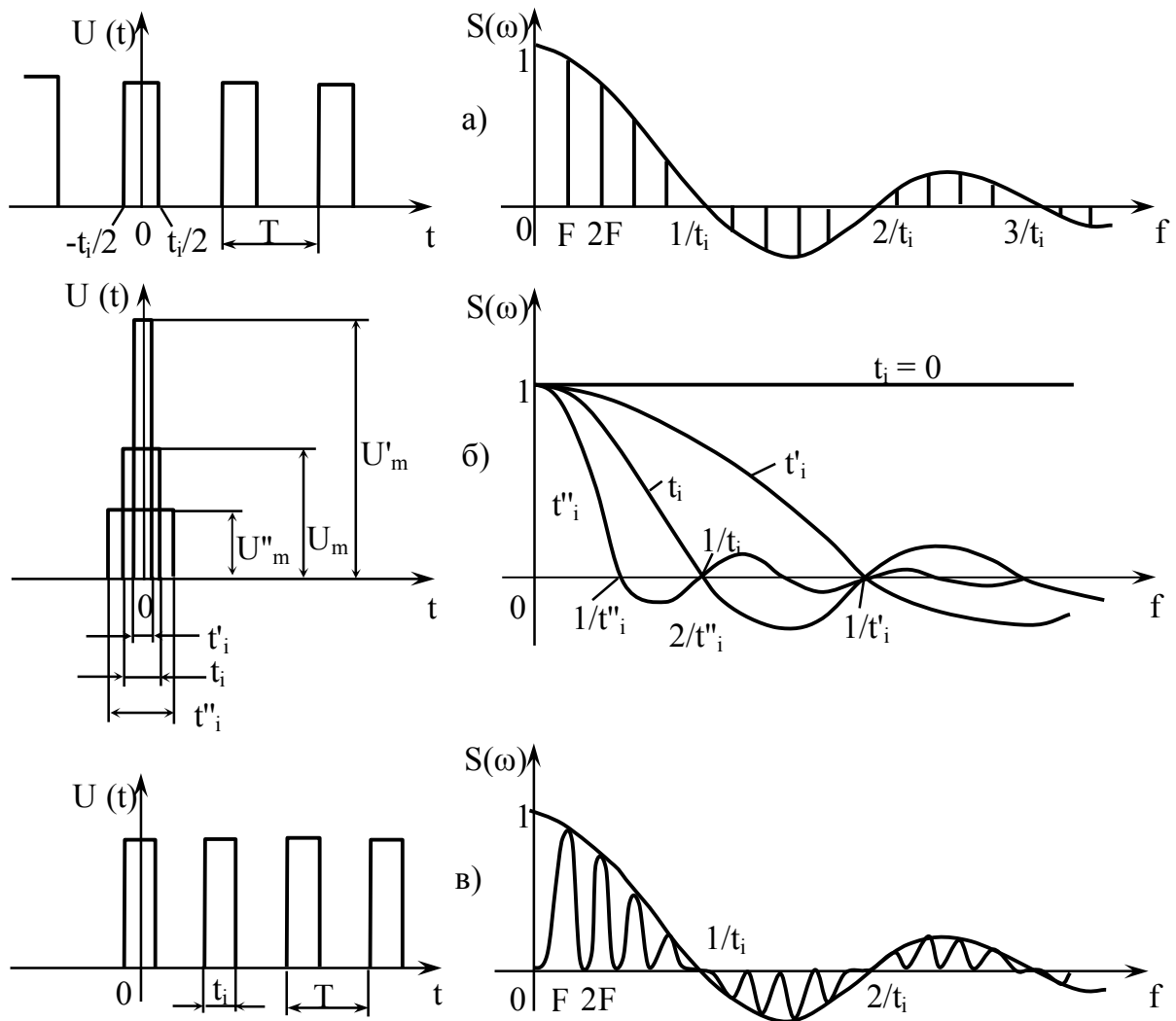


Рисунок 5.14 – Часові і спектральні діаграми прямокутних імпульсів:  
 а) - періодичної послідовності; б) – одиничного; в) – пучка з 4-х імпульсів

Розглянемо вплив тривалості імпульсу  $t_i$  (рис. 5.14,б) на спектр  $S(\omega)$ . Нехай площа імпульсу  $A_i = 1$ . Тоді амплітуда імпульсу  $U_m = A_i/t_i = 1/t_i$  і спектральна густина  $S(\omega) = \sin x'/x'$  зображається згасаючою кривою, яка перетинає вісь частот у точках  $1/t_i, 2/t_i, 3/t_i, \dots, n/t_i$  (рис. 5.14,б). Зі зменшенням тривалості імпульсу удвічі до значення  $t'_i$  при збереженні значення площі імпульсу амплітуда імпульсу має зрости удвічі до значення  $U'_m$  і нульові точки спектра змістяться праворуч до значень  $1/t'_i, 2/t'_i, 3/t'_i, \dots, n/t'_i$ , тобто спектр розшириться удвоє. При подальшому скороченні тривалості імпульсу ( $t_i \rightarrow 0$ ) точка перетину спектром  $S(\omega)$  осі

частот буде зсуватись праворуч ( $1/t_i \rightarrow \infty$ ), а при  $t_i=0$  обвідна стане горизонтальною лінією. Тобто, вона стане паралельною осі частот і перетнеться з нею на нескінченності. Такий імпульс (площа  $A_i=1$ ,  $t_i=0$ ,  $U_m=\infty$ ) називається дельта-імпульсом, його спектральна щільність має однакові значення на усіх частотах від 0 до  $\infty$  ( $\Delta F_{cn} = 2/t_i = \infty$ ). Отже *чим менша тривалість імпульсу – тим ширший він має спектр*. Очевидно, при зростанні тривалості імпульсу до значення  $t_i'' = 2t_i$ , ширина його спектра зменшиться удвічі, що також показано на рис. 5.14,б.

А тепер розглянемо більш складний випадок, коли маємо “пучок” імпульсів. Визначимо його спектр, наприклад, коли вона складається з чотирьох імпульсів (рис. 5.14,в). Оскільки такий сигнал є неперіодичним (має початок і кінець пучка), спектр його має бути суцільним. Разом з тим імпульси у пучці повторюються через час  $T$ , і тому у спектрі появляються смуги з інтервалами по осі частот, рівними  $F= 1/T$ . При збільшенні числа імпульсів у пучці смуги звужуються і при наближенні послідовності до нескінченності вона перетворюється на періодичну послідовність імпульсів, а її спектр перетворюється у лінійний (рис. 5.14,а).

## 6 РАДІОСИГНАЛИ

### 6.1 Загальні положення

Для передачі інформації на великі відстані застосовують сигнали, що ефективно випромінюються і приймаються за допомогою антенних пристроїв, ці сигнали мають здатність поширюватись у вигляді вільних радіохвиль у середовищі, яке розділяє відправника і отримувача інформації. Таким сигналом є *високочастотне коливання*. Інформація, яка передається, має бути у той чи інший спосіб закладена у високочастотне коливання, яке називається *несучим*.

Частота  $\omega_0$  цього коливання вибирається у залежності від відстані, на яку має передаватися інформація, від умов поширення радіохвиль та інших технічних і економічних факторів. Але у будь-якому випадку частота  $\omega_0$  повинна бути великою у порівнянні з найвищою частотою спектра повідомлення, що передається. Це пояснюється тим, що для неспотвореної передачі повідомлення через радіотехнічні кола, а також для усунення спотворень, обумовлених поширенням радіохвиль, необхідно, щоб ширина спектра повідомлення  $\Delta\Omega_{cn}$  була малою у порівнянні з  $\omega_0$ . Чим менше відношення  $\Delta\Omega_{cn}/\omega_0$ , тим менше проявляється недосконалість характеристик системи. Тому чим вищою є необхідна швидкість передачі інформації і, отже, ширшим спектр повідомлення  $\Delta\Omega_{cn}$ , тим вищою має бути несуча частота радіосигналу. Як правило, має виконуватись нерівність  $\Delta\Omega_{cn}/\omega_0 \ll 1$ , а такий сигнал називається “*вужькосмуговим*” навіть при передачі широкосмугових повідомлень.

Наведемо такі приклади. При передачі мови чи музики спектр повідомлення звичайно обмежується смугою від  $F_{\min}=30$  до  $F_{\max}=10000$  Гц. Навіть на найдовшій хвилі мовного діапазону  $\lambda=2000$  м при несучій частоті  $f_0=150$  кГц, відношення  $\Delta F_{cn}/f_0=10^4/1,5 \cdot 10^5 \approx 0,067$ . При передаванні цих же повідомлень на коротких хвилях (15...20 МГц) це співвідношення не перевищить сотих часток процента. При передаванні рухомих зображень (телебачення) смуга частот повідомлення досить широка і досягає 5...6 МГц, однак і несуча частота вибирається не меншою 50...60 МГц, так що відношення  $\Delta F_{cn}/f_0$  не перевищує 0,1 (10%).

Радіосигналом є високочастотне коливання, що несе в собі інформацію, яку туди “закладають”, модулюючи його за законом повідомлення (керуючого сигналу). Процес модуляції передбачає змінювання одного з параметрів високочастотного (несучого) сигналу під дією керуючого сигналу (повідомлення): амплітуду  $U_m$ , частоту  $\omega$  чи початкову фазу  $\varphi$ , відповідно і мова іде про амплітудну, частотну чи фазову модуляцію, а отже радіосигнали називаються відповідно амплітудно-модульованими (АМ), частотнозмодульованими (ЧМ), чи фазомодульованими (ФМ). Частотну і фазову модуляції ще об’єднують під



спільною назвою – кутова модуляція, а ЧМ і ФМ сигнали – сигнали з кутовою модуляцією.

У загальному вигляді радіосигнал можна подати:

$$U(t) = U_m(t) \cdot \sin[\omega(t) \cdot t + \varphi(t)] = U_m(t) \cdot \sin \psi(t) \quad (6.1)$$

В АМ сигналі  $U(t) = U_m(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $\omega_0$  і  $\varphi$  – константи,

в ЧМ сигналі  $U(t) = U_m \sin[\omega(t) \cdot t + \varphi]$ ,  $U_m$  і  $\varphi$  – константи,

в ФМ сигналі  $U(t) = U_m \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$ ,  $U_m$  і  $\omega_0$  – константи,

де у сигналі з кутовою модуляцією  $U(t) = U_m \sin \psi(t)$ ,  $U_m$  – константа.

Та обставина, що ширина спектра керуючого сигналу (повідомлення) мала у порівнянні з несучою частотою  $\omega_0$ , дозволяє вважати, що  $U_m(t)$  і  $\varphi(t)$  є *повільними* функціями часу. Це означає, що відносне змінення  $U_m(t)$  і  $\varphi(t)$  за один період несучого коливання є малим у порівнянні з одиницею, наприклад:

$$\left| \frac{\Delta U_m(T_0)}{U_m(t)} \right| = \left| \frac{U_m(t+T_0) - U_m(t)}{U_m} \right| \ll 1. \quad (6.2)$$

Аналогічно міркуючи, можна визначити умови повільності функції  $\varphi(t)$  з виразу (6.1)

Для більшості радіотехнічних сигналів неперервність (6.2) легко виконується. Це означає, що при будь-якому виді модуляції параметри радіосигналу (амплітуда, частота і фаза) змінюються настільки повільно, що у межах одного періоду  $T_0$  коливання можна вважати гармонічними.

## 6.2 Амплітудно-модульовані сигнали

Амплітудна модуляція є найпростішим і дуже поширеним у радіотехніці способом закладання інформації у високочастотне коливання. При амплітудній модуляції обвідна амплітуда несучого коливання змінюється за законом, який збігається із законом змінення повідомлення, яке передається, а частота і початкова фаза коливання підтримуються незмінними. Тому для радіосигналу з амплітудною модуляцією загальний вираз (6.1) можна замінити таким чином:

$$U(t) = U_m(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.3)$$

де частота високочастотного коливання  $\omega_0$  та його початкова фаза  $\varphi_0$  є константами (незмінними).

Характер обвідної  $U_m(t)$  визначається видом повідомлення, що передається.

При неперервному повідомленні (рис. 6.1,а) модульоване за амплітудою коливання набуває вигляду, показаного на рис. 6.1,б. Обвідна  $U_m(t)$  змінюється за законом керуючого сигналу  $U_k(t)$ , який є повідомленням.

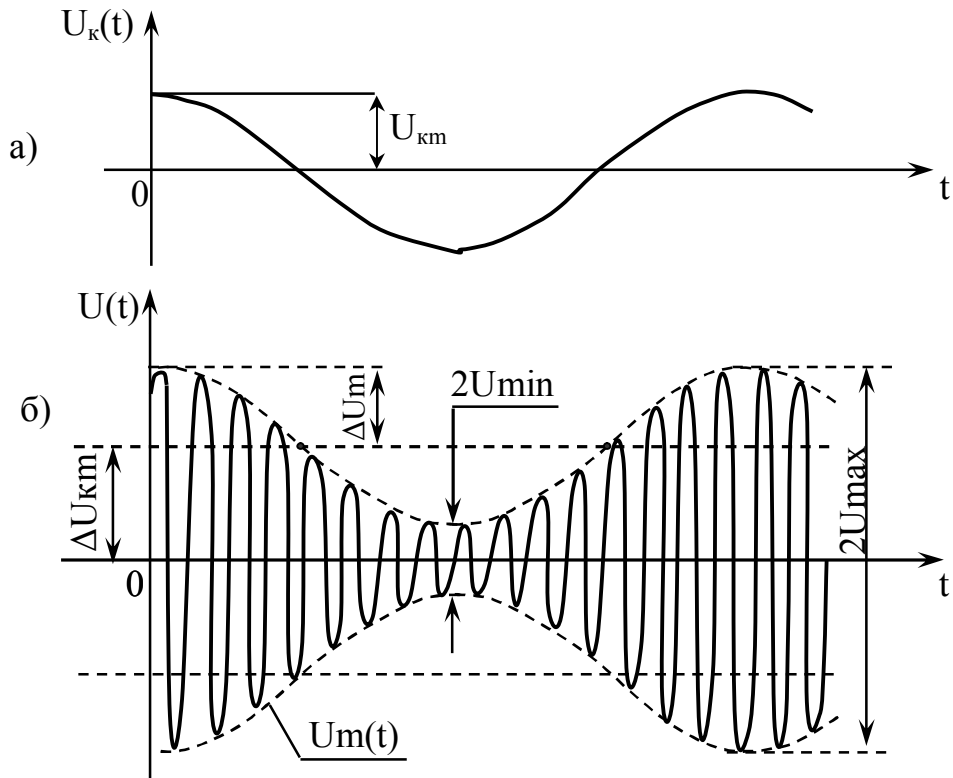


Рисунок 6.1 – Амплітудно-модульований сигнал: *a)* – керуючий гармонічний сигнал, *б)* – коливання, модульовані за амплітудою

При тональній модуляції (коли керуючий сигнал є гармонічним зі сталою частотою, тобто однотональним) математична модель модулюючого сигналу запишеться так:

$$U_k(t) = U_{km} \cdot \cos(\Omega t + \Phi_0),$$

де  $\Omega = 2\pi F$  – його кругова частота,

$\Phi_0$  – початкова фаза.

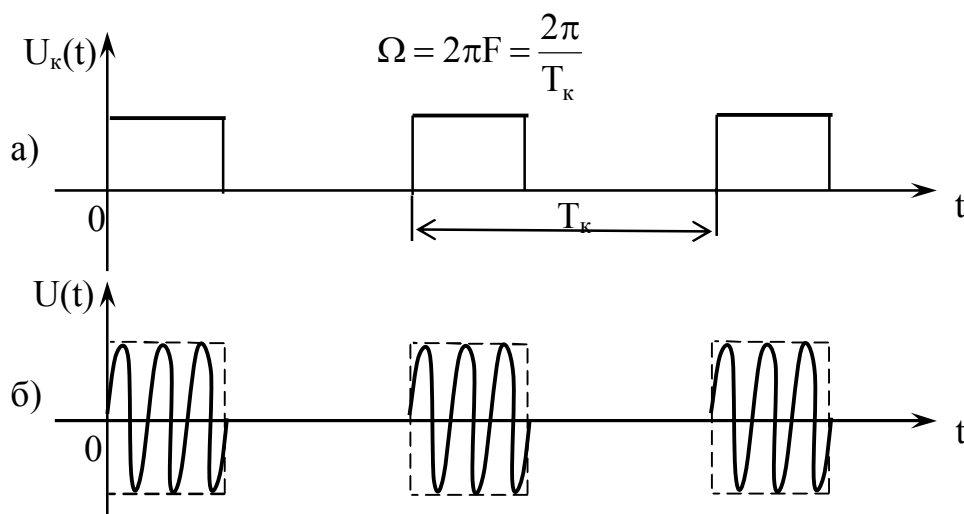


Рисунок 6.2 – *a)* – імпульсна послідовність, *б)* – коливання, модульоване за амплітудою

Розглянемо випадок коли початкова фаза сигналу дорівнює нулю, тобто  $\varphi_0 = 0$  (6.3) та  $\Phi_0 = 0$ . Обвідну модульованого коливання при цьому можна подати у спрощеному вигляді:

$$U_m(t) = U_{m0} + k_{ам} \cdot U_{\kappa}(t) = U_{m0} + \Delta U_m \cos \Omega t, \quad (6.4)$$

де  $k_{ам}$  – коефіцієнт пропорційності,

$\Delta U_m = k_{ам} \cdot U_{\kappa}(t)$  – приріст амплітуди несучої або амплітуда змінення обвідної (рис. 6.1,б).

Відношення  $m = \Delta U_m / U_{m0}$  називається коефіцієнтом глибини амплітудної модуляції або просто коефіцієнтом модуляції.

Підставивши (6.4) у (6.3) отримаємо математичну модель однотонального амплітудно-модульованого (АМ) сигналу:

$$U(t) = (U_{m0} + \Delta U_m \cos \Omega t) \cdot \cos \omega_0 t = U_{m0} \left( 1 + \frac{\Delta U_m}{U_{m0}} \cos \Omega t \right) \cdot \cos \omega_0 t$$

або

$$U(t) = U_{m0} (1 + m \cos \Omega t) \cdot \cos \omega_0 t. \quad (6.5)$$

При неспотвореній модуляції ( $m \leq 1$ ) амплітуда коливання змінюється у межах від мінімальної  $U_{\min} = (1 - m)U_{m0}$  до максимальної  $U_{\max} = (1 + m)U_{m0}$ .

### 6.3 Частотний спектр однотонального амплітудно-модульованого сигналу

Нехай задано високочастотне модульоване коливання щодо якого відомо, що частота  $\omega_0$  і початкова фаза  $\varphi_0$  – величини сталі (раніше ми домовилися, що  $\varphi_0 = 0$ ), а обвідна  $U_m(t)$  містить у собі повідомлення  $U_{\kappa}(t)$ , яке передається. Аналітично таке коливання можна подати за допомогою виразу (6.3).

Установимо зв'язок між спектром модульованого коливання і спектром модулюючої функції, тобто спектром вихідного повідомлення  $U_{\kappa}(t)$ . Найпростіше й найнаочніше це можна зробити для тональної (гармонічної) модуляції, коли обвідна

$$U_m(t) = U_{m0} (1 + m \cdot \cos \Omega t),$$

а модульоване коливання визначається виразом (6.5).

Перепишемо вираз (6.5) у формі

$$U(t) = U_{m0} (\cos \omega_0 t + m \cdot \cos \Omega t \cdot \cos \omega_0 t).$$

Другий доданок у правій частині цього виразу, який є продуктом модуляції (результатом процедури модуляції), можна привести до вигляду:

$$m \cdot \cos \Omega t \cdot \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} m \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{1}{2} m \cos(\omega_0 - \Omega)t,$$

після чого розгорнутий вираз для амплітудно-модульованого коливання  $U(t)$  прийме вираз:

$$U(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{mU_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{mU_{m0}}{2} m \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (6.6)$$

З цього видно, що досліджуваний амплітудно-модульований сигнал складається з трьох високочастотних гармонічних коливань. Перша складова частина являє собою вихідне немодульоване коливання з частотою  $\omega_0$ . Друга і третя складові відповідають новим коливанням (гармонічним), які з'явилися у процесі модуляції амплітуди. Частоти цих коливань  $\omega_0 + \Omega$  та  $\omega_0 - \Omega$  називаються верхньою і нижньою боковими частотами модуляції.

Амплітуди цих двох нових коливань однакові і складають від амплітуди немодульованого коливання частку, рівну  $m/2$ . Початкові ж фази усіх цих трьох складових однакові і, за домовленістю, дорівнюють нулю. Це ілюструється векторною діаграмою, зображеною на рис. 6.3.

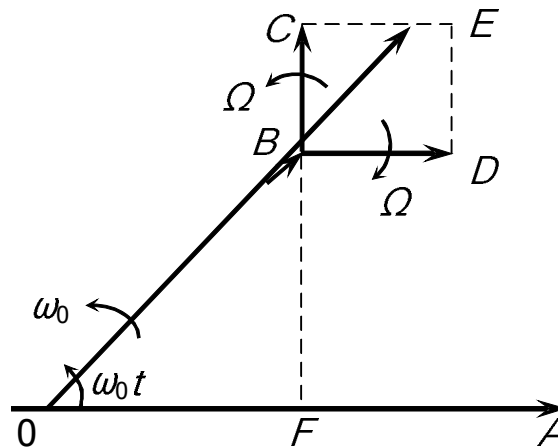


Рисунок 6.3 – Векторне подання тонально амплітудно-модульованого коливання

На цій діаграмі складова несучої частоти  $U_{m0}\cos\omega_0t$  з амплітудою  $OB = U_{m0}$  зображається у вигляді вектора  $OB$ , який обертається у напрямку проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $\omega_0$  і через деякий час  $t$  повернеться відносно свого початкового положення (вектор  $OA$ ) на кут  $\omega_0t$ . Очевидно проекція цього вектора  $OB$  на відрізок  $OA$  (відрізок  $OF$ ) дорівнюватиме миттєвому значенню амплітуди несучої складової у момент часу  $t$ .

Для зображення на цій же діаграмі коливання з частотою  $\omega_0 + \Omega$  (верхньою бічною складовою модульованого коливання), яке перевищує кутову частоту обертання вектора  $OB$  на величину  $\Omega$ , необхідно скористатися вектором, який обертатиметься проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $\Omega$  (вектор  $BC$ ). Для зображення коливання з частотою  $\omega_0 - \Omega$  (нижньою бічною складовою модульованого коливання), знадобиться вектор, який буде обертатися за годинниковою стрілкою (вектор  $BD$ ). Тому коливання бічних частот – верхньої і нижньої – зображаються двома векторами довжиною  $BC = BD = mU_{m0}/2$ , які обертаються у взаємно протилежних напрямках. Вони є симетричними відносно напрямку  $OB$ , що і впливає безпосередньо з виразу (6.6).

З цього виразу видно, що при будь-якій початковій фазі обвідної вектори  $BC$  і  $BD$ , які відповідають коливанням верхньої і нижньої бокових частот, займають симетричне відносно вектора  $OB$  положення, причому вектори коливань бічних частот утворюють з вектором несучого коливання кути, рівні  $\pm \Omega t$ . На рис. 6.3 початки цих векторів перенесені з точки  $O$  у точку  $B$ . Рівнодіючий вектор  $BE$ , який є геометричною сумою векторів  $BC$  і  $BD$ , називається вектором модуляції, завжди розташовується на лінії  $OB$ , через що суму усіх трьох коливань – несучої і двох бічних частот – можна розглядати як коливання зі сталими початковою фазою і частотою, але з модульованою амплітудою.

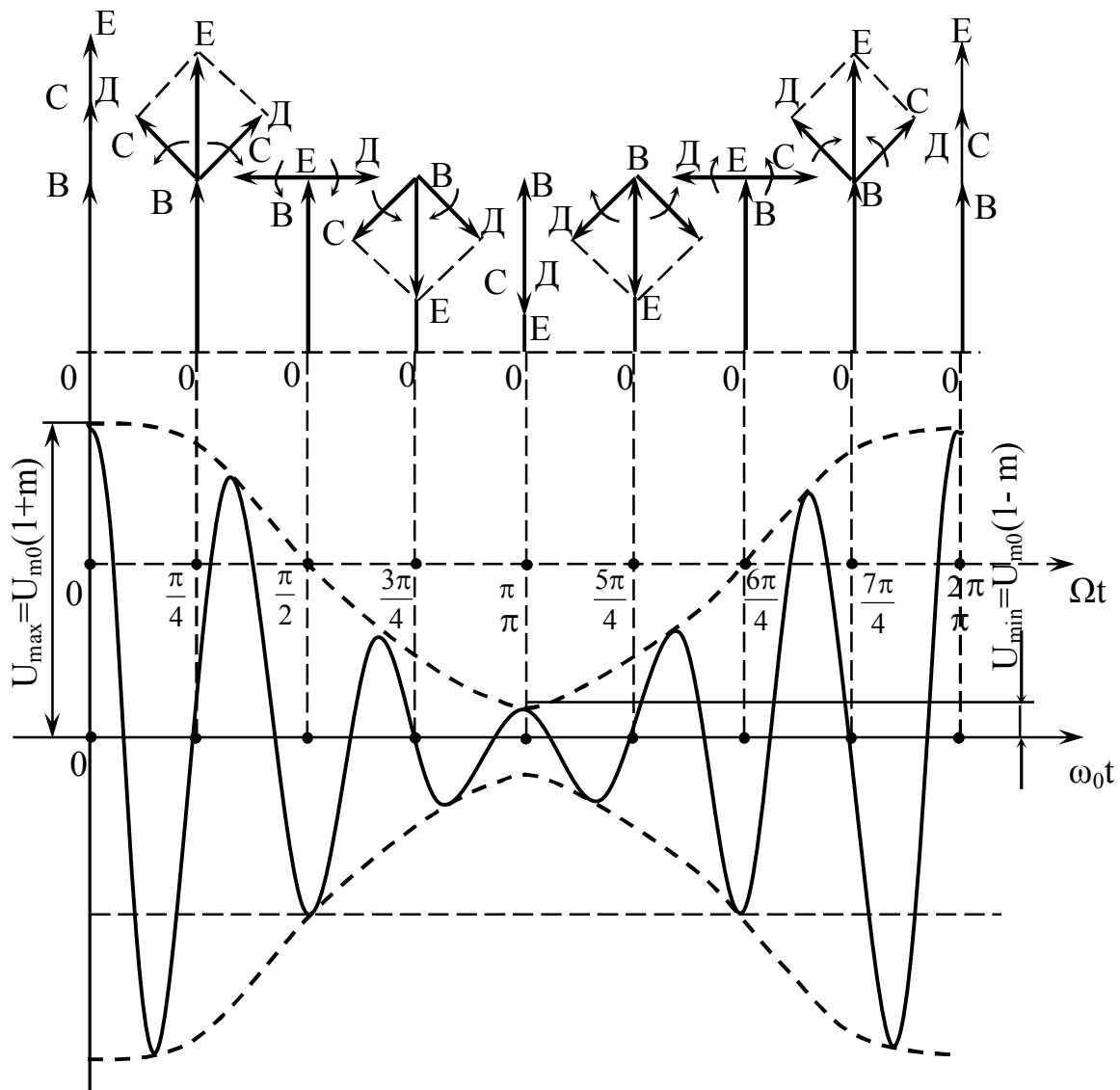


Рисунок 6.4 – Додавання коливань несучої і бічних частот у різні моменти часу

При  $t = 0$   $\Omega t = 0$  (на осі  $\Omega t$  рис. 6.4)  $\cos \Omega t = 1$  і обвідна амплітуд  $OE = OB + |BC + BD|$ , бо у цей момент вектори  $BC$  та  $BD$  спрямовані вздовж

напрямку  $OB$  і додаються так, що  $OE = OB + BC + BD$ . Це відповідає  $U_{\max} = U_{m0}(1+m)$ . У момент часу, коли  $\Omega t = \pi/2$   $\cos\Omega t = 0$  і обвідна амплітуд  $OE = OB$ , бо тепер вектор  $BC$  повернувся на кут  $+\pi/2$ , а вектор  $BD$  – на кут  $-\pi/2$ , вони стали протилежними за напрямками, їх сума дорівнює нулю, обвідна амплітуд дорівнює  $U_{m0}$ . Коли  $\Omega t = \pi$   $\cos\Omega t = -1$  і обвідна амплітуд  $OE = OB - |BC + BD|$ , бо у цей момент вектори  $BC$  і  $BD$  спрямовані у протилежному напрямку  $OB$  і їх сума віднімається від  $OB$ , тобто  $OE = OB - (BC + BD)$ . Це відповідає  $U_{\min} = U_{m0}(1 - m)$ . Міркуючи аналогічно, легко отримати результати і для випадків коли  $\Omega t = 3\pi/2$  та  $2\pi$ , що досить зрозуміло, розглянувши рис. 6.4.

Спектральна діаграма коливання при тональній амплітудній модуляції (АМ) показана на рис. 6.5.

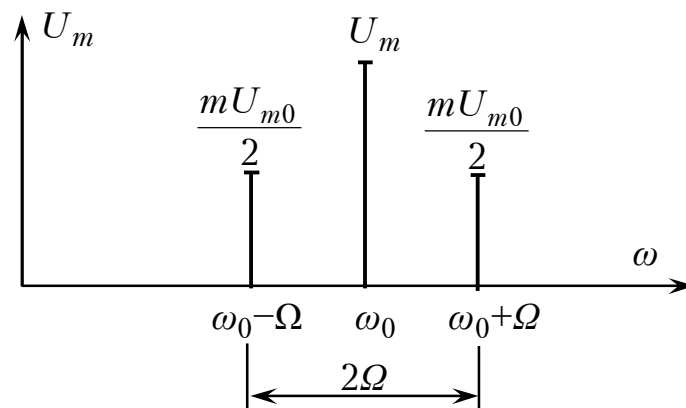


Рисунок 6.5 – Спектр коливання при тональній АМ

Як бачимо з рисунків 6.1 та 6.4 для неспотвореного сигналу при амплітудній модуляції коефіцієнт модуляції повинен бути не більший ( $m \leq 1$ ) за одиницю, а це означає, що максимальне значення амплітуд бічних складових такого сигналу будуть не більшими за половину амплітуди несучої (центральної) складової спектра радіосигналу.

Цю важливу обставину ми згадаємо трохи пізніше, коли будемо розглядати розподіл енергії радіосигналу між його спектральними складовими.

#### 6.4 Частотний спектр АМ сигналу при модуляції складним сигналом

Скориставшись попереднім результатом та міркуючи аналогічно, можна побудувати частотний спектр при модуляції будь-яким складним сигналом. Картину утворення АМ сигналу найпростіше пояснити спочатку на прикладі, коли модулююче повідомлення  $u_k(t)$  є сумою коливань двох тонів:

$$U_{km}(t) = U'_{km} \cos\Omega_1 t + U''_{km} \cos\Omega_2 t.$$

За аналогією з виразом (6.4) отримуємо

$$U_m(t) = U_{m0} + \Delta U'_m \cos \Omega_1 t + \Delta U''_m \cos \Omega_2 t = \\ = U_{m0}(1 + m_1 \cos \Omega_1 t + m_2 \cos \Omega_2 t).$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (6.3), і використовуючи тригонометричні перетворення, аналогічні тим, які були проведені при отриманні рівняння (6.6), прийдемо до такого результату (початкові фази несучого ( $\varphi_0$ ) і модулюючого ( $\Phi_0$ ) коливань узяті рівними нулю):

$$U(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{m_1 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega_1)t + \frac{m_1 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 - \Omega_1)t + \\ + \frac{m_2 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega_2)t + \frac{m_2 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 - \Omega_2)t. \quad (6.7)$$

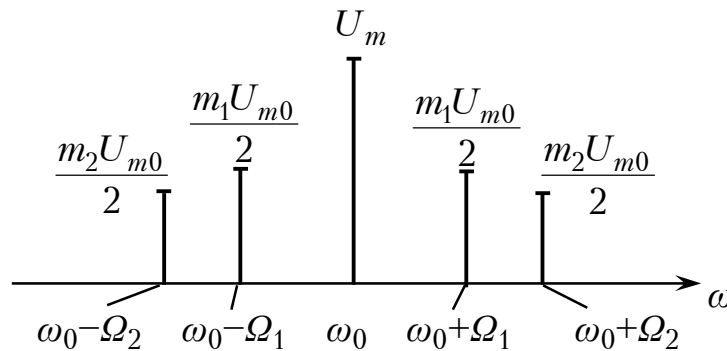


Рисунок 6.6 – Амплітудний спектр АМ сигналу при двотональній модуляції

З отриманого виразу випливає, що при модуляції складним сигналом з частотами  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  утворюється тональна модуляція, яка супроводжується виникненням пари симетричних бічних частот (рис. 6.6), причому цей процес є лінійним у тому сенсі, що амплітуди і фази бічних частот від різних модулюючих напруг взаємно незалежні (остання властивість зберігається за умови, що змінення обвідної не перевищує 100%, тобто  $m_1$  і  $m_2 \leq 1$ ).

З наведеного прикладу неважко вивести правило побудови спектральної діаграми АМ коливання  $U(t)$  за заданим спектром модулюючої функції  $U_k(t)$ . Наприклад, маємо керуючий сигнал у вигляді послідовних прямокутних імпульсів (див. рис. 6.2,а) з частотою повторювання  $\Omega$ , спектральна діаграма якого подана на рис. 6.7,а. Потрібно побудувати спектральну діаграму послідовності прямокутних радіоімпульсів, отриманих у результаті амплітудної модуляції височастотного гармонічного коливання з частотою  $\omega_0$  (рис. 6.2,б).

Керуючий сигнал може бути поданий обмеженим рядом Фур'є вигляду:

$$U_k(t) = U_{ок} + \sum_{p=1}^n U_{pk} \cos p\Omega.$$

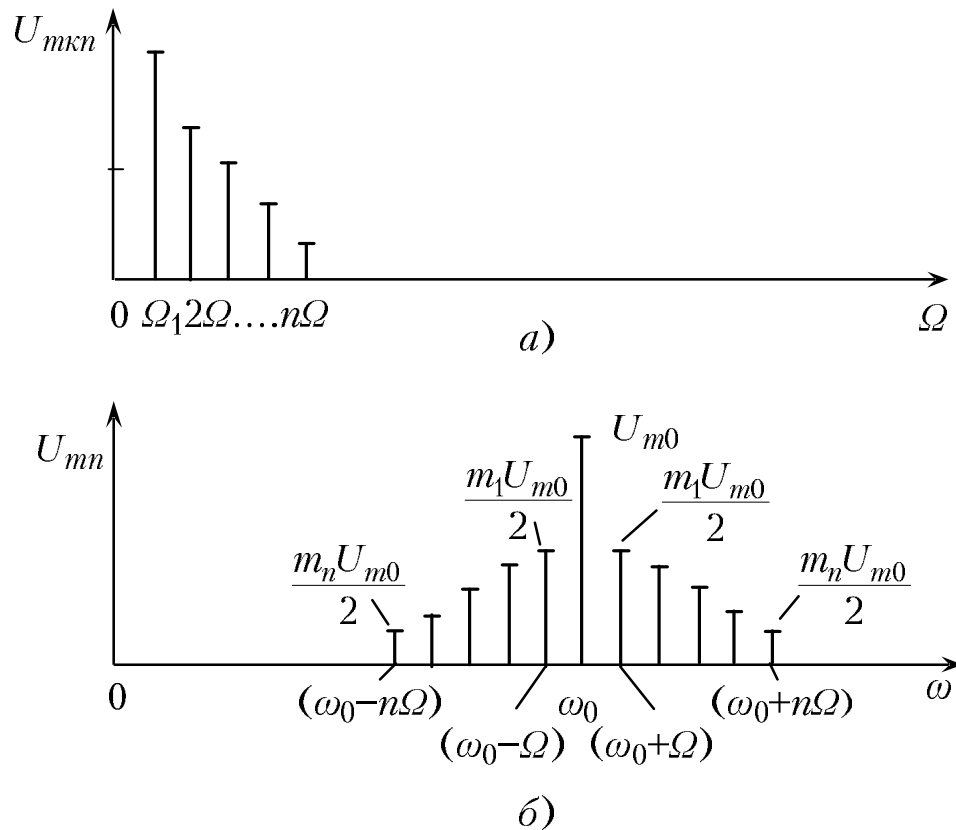


Рисунок 6.7 – Спектральні діаграми сигналів: а) – керуючого, б) – амплітудно-модульованого

Постійна складова  $U_{ок}$  у спектрі радіоімпульсу у процесі модуляції утворить несучу складову з частотою  $\omega_0$  та амплітудою  $U_{om}$ , а кожна  $p$ -та гармоніка утворить свою пару бічних складових з частотами  $(\omega_0 \pm p\Omega)$  та амплітудами  $m_p U_{m0}/2$ . Усього спектральних складових буде  $(2n+1)$  штук, які утворюють симетричну картинку відносно несучої складової (рис. 6.7,б). Причому амплітуди спектральних складових послідовності радіоімпульсів будуть прямо пропорційними амплітудам відповідних складових спектра керуючого сигналу (послідовності відеоімпульсів).

Механізм побудови амплітудного спектра радіосигналу за відомим спектром керуючого сигналу можна будувати за такою схемою:

1) спектр керуючого сигналу по осі частот перенести праворуч на величину несучої  $\omega_0$  (ці спектральні лінії мають бути пропорційними за довжиною відповідним лініям початкового, вже відомого спектра);

2) ліворуч відносно несучої складової зобразити дзеркально відбите зображення.

Після першого кроку отримаємо спектральні лінії несучої та верхніх бічних, а після другого – спектральні лінії нижніх бічних складових спектра радіосигналу.

Математична модель, наприклад, послідовність радіоімпульсів, зображена на рис. 6.2,б, буде такою:



$$U(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{m_1 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m_1 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t + \\ + \frac{m_2 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \frac{m_2 U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 - 2\Omega)t + \dots + \\ + \frac{m_n U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + n\Omega)t + \frac{m_n U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 - n\Omega)t.$$

### 6.5 Потужність АМ сигналу

Звернемося знову до однотонально модульованого за амплітудою сигналу, котрий, як відомо, складається з трьох високочастотних гармонік:

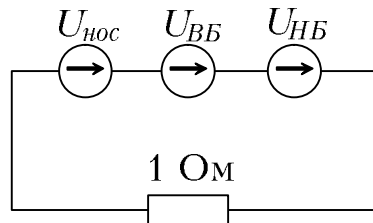
$$U(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{m U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Розглянемо питання про співвідношення потужностей несучого і бічних коливань. Джерело однотонального АМ сигналу еквівалентне трьом послідовно увімкненим джерелам гармонічних коливань:

$$U_{noc}(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t;$$

$$U_{BB}(t) = \frac{m U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t;$$

$$U_{HB}(t) = \frac{m U_{m0}}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$



Для визначеності припустимо, що ці джерела е.р.с. з'єднані послідовно і навантажені на резистор з опором 1 Ом. Тоді миттєва потужність АМ сигналу буде чисельно дорівнювати квадрату сумарної напруги:

$$P_{AM}(t) = U_{noc}^2(t) + U_{BB}^2(t) + U_{HB}^2(t) + 2 \cdot U_{noc}(t) \cdot U_{BB}(t) + \\ + 2U_{noc}(t) \cdot U_{HB}(t) + 2U_{BB}(t) \cdot U_{HB}(t).$$

Щоб знайти середню потужність сигналу, величину  $p(t)$  необхідно усереднити на достатньо великому відрізку часу  $T$  (періоді обвідної):

$$P_{AM\text{ сер}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt.$$

Легко упевнитися у тому, що при усередненні усі взаємні потужності дадуть нульовий результат, а тому середня потужність АМ сигналу виявиться рівною сумі середніх потужностей несучої та двох бічних коливань:

$$P_{AM\text{ сep}} = P_{\text{нос сep}} + P_{\text{ВБ сep}} + P_{\text{НБ сep}} = \\ = \frac{1}{2}U_{m0}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mU_{m0}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mU_{m0}}{2}\right)^2 = \frac{U_{m0}^2}{2} + \frac{m^2U_{m0}^2}{4}.$$

Звідси випливає, що  $(P_{\text{ВБ сep}} + P_{\text{НБ сep}}) / P_{\text{нос сep}} = m^2/2$ .

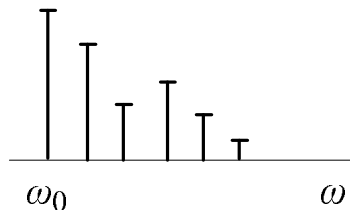
Так, навіть при 100% модуляції ( $m=1$ ) частка потужності обох бічних коливань складає усього лише 50% від потужності немодульованого несучого коливання. Оскільки інформація (повідомлення) міститься у бічних коливаннях, можемо зауважити суттєву неефективність використання потужності при передаванні АМ сигналу, бо 2/3 потужності витрачається на несучу складову, яка власне не містить інформації.

З цих позицій є більш цікавий спосіб амплітудної модуляції, який полягає у формуванні сигналу із заглушенням верхньої або нижньої бічної смуги частот.

**Сигнал з однією бічною смугою** (ОБС – або SSB-сигнали, від англ. single sidband) за зовнішніми характеристиками нагадують звичайні АМ-сигнали. Наприклад, однотональний ОБС-сигнал із заглушеною нижньою бічною смугою частот записується у вигляді:

$$U_{\text{ОБС}}(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{mU_{m0}}{2} (\omega_0 + \Omega)t.$$

Ще цікавішим є сигнал з одною бічною смугою із заглушеною несучою складовою. Такий спосіб модуляції дозволяє, з одного боку, ефективно використати потужність передавального пристрою, бо не буде витрат енергії потужних джерел на формування потужної несучої у радіосигналі. З іншого боку, ширина спектра односмугового сигналу стає удвічі меншою, що дозволить у визначеному для даної лінії радіозв'язку діапазоні частот передати удвічі більше інформації.



Слід зауважити, що обвідна односмугового АМ сигналу відрізняється від обвідної повного АМ сигналу, що призведе до помітних спотворень. Крім того, відсутність несучої у “економнішому” сигналі на приймальному кінці лінії радіозв'язку до детектування вимагає відновлення несучої складової. Тому часто використовуються радіосигнали з АМ, у яких несуча складова заглушена лише частково.

## 6.6 Сигнали з кутовою модуляцією

Будемо вивчати модульовані радіосигнали, які отримуються за рахунок того, що у несучому гармонічному коливанні, повідомлення, яке передається, змінює або частоту  $\omega$ , або початкову фазу  $\varphi$ , а амплітуда

залишається незмінною. Оскільки аргумент гармонічного коливання  $\psi(t)=\omega t+\varphi$ , який називається *повною фазою*, визначає початкове значення фазового кута, такі сигнали отримали назву *сигналів з кутовою модуляцією*, які, як ми вже знаємо, поділяються на сигнали з частотною і сигнали з фазовою модуляціями.

Припустимо спочатку, що повна фаза  $\psi(t)$  пов'язана з керуючим сигналом  $u_k(t)$  залежністю:

$$\psi(t)=\omega_0 t+k \cdot u_k(t), \quad (6.8)$$

де  $\omega_0$  – значення частоти при відсутності модуляції,  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

Модуляцію, яка відповідає співвідношенню (6.8) називають *фазовою модуляцією (ФМ)*:

$$U_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos[\omega_0 t+k \cdot U_k(t)], \quad (6.9)$$

Якщо  $u_k(t)=0$ , то ФМ коливання є простим гармонічним коливанням. Зі зростанням значень сигналу  $u_k(t)$  повна фаза  $\psi(t)$  зростає у часі швидше, ніж за лінійним законом. При зменшенні значень модулюючого сигналу відбувається спад швидкості зростання  $\psi(t)$  у часі. На рис. 6.8 показана побудова графіка ФМ сигналу.

У момент часу, коли сигнал  $u_k(t)$  досягає екстремальних значень, абсолютний фазовий зсув між ФМ сигналом і немодульованим гармонічним коливанням виявляється найбільшим. Граничне значення цього фазового зсуву називають *девіацією фази  $\Delta\psi_m$* . У загальному випадку, коли діє сигнал  $u_k(t)$ , поточне значення зсуву фаз  $\Delta\psi=\omega_0 t+k \cdot u_k(t)$ .

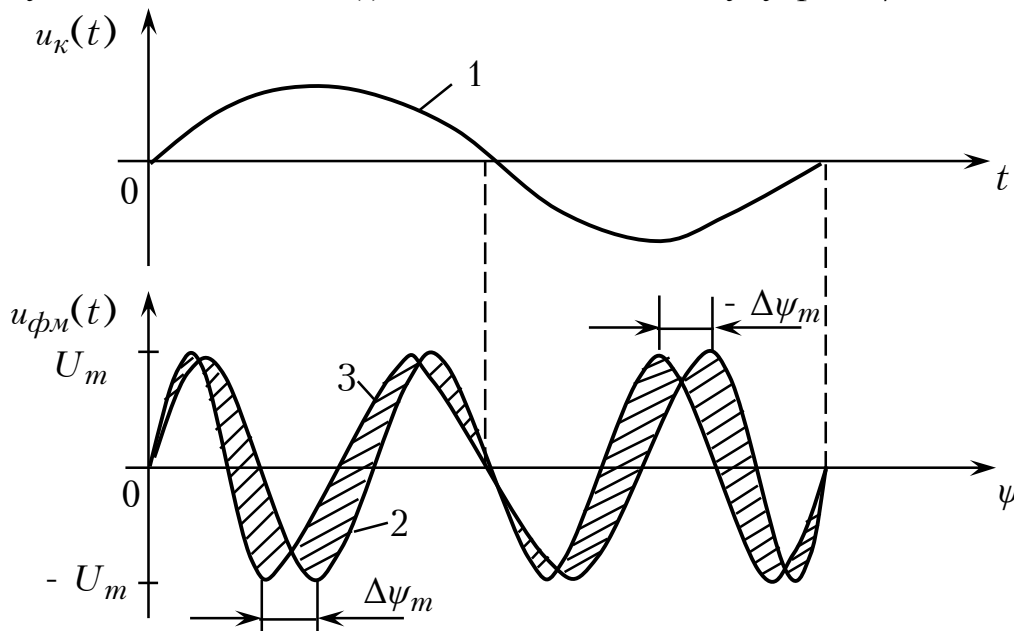


Рисунок 6.8 – Фазова модуляція: 1 – керуючий сигнал; 2 – немодульоване коливання; 3 – сигнал з фазовою модуляцією

На векторній діаграмі зображуваний вектор сталої довжини буде обертатися з непостійною кутовою швидкістю. Миттєва частота  $\omega(t)$

сигналу з кутовою модуляцією визначається як перша похідна від повної фази за часом:

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}. \quad (6.10)$$

При частотній модуляції сигналу (ЧМ) між величинами  $u_k(t)$  та  $\omega(t)$  існує зв'язок вигляду:

$$\omega(t) = \omega_0 + k \cdot u_k(t). \quad (6.11)$$

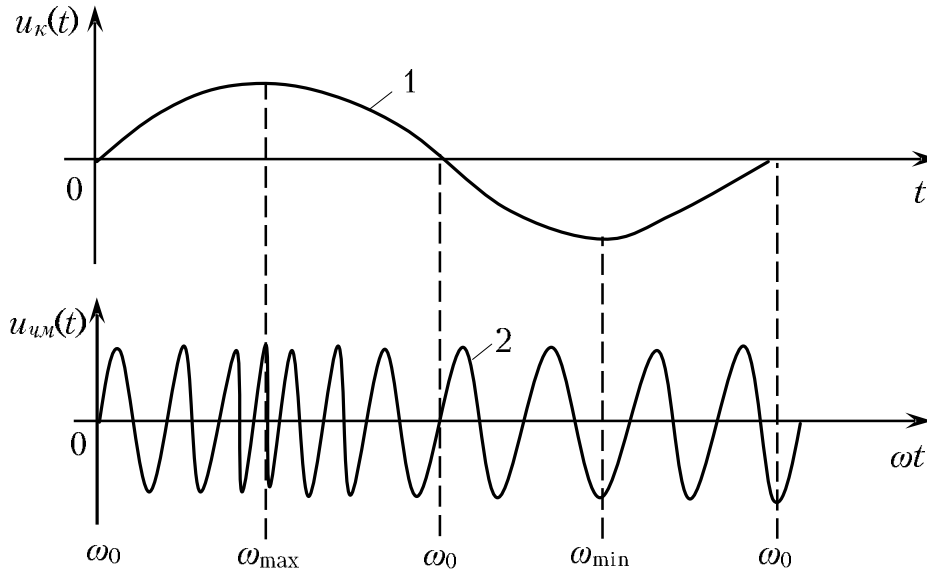


Рисунок 6.9 – Частотна модуляція: 1 – керуючий сигнал; 2 – частотно-модульований сигнал

Максимальне відхилення частоти від  $\omega_0$  називається *девіацією частоти*:

$$\Delta\omega_m = \omega_{\max} - \omega_0 = \omega_0 - \omega_{\min},$$

$$\Delta\omega_m = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2},$$

де  $\omega_0$  – частота немодульованого високочастотного коливання,  $\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$  – найбільше і найменше значення частоти частотно-модульованого сигналу.

Якщо  $u_k(t)$  – достатньо гладка функція, то зовнішньочасові діаграми ЧМ і ФМ відрізнити неможливо (рис. 6.8 і 6.9). Однак є принципова різниця і про неї – трохи пізніше.

Для *однотонального сигналу з кутовою модуляцією* аналіз з математичної точки зору значно складніший, ніж дослідження АМ сигналу.

У випадку однотонального ЧМ сигналу миттєва частота

$$\omega(t) = \omega_0 t + \Delta\omega_m \cos \Omega t. \quad (6.12)$$

Повна фаза такого коливання

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \sin \Omega t = \omega_0 t + M \sin \Omega t, \quad (6.13)$$

де  $M = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega}$  – індекс частотної модуляції і являє собою девіацію фази такого сигналу, виражену у радіанах.

Отже, вираз для миттєвого значення ЧМ сигналу буде:

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + M \cdot \sin \Omega t). \quad (6.14)$$

Аналітична форма запису однотонового ФМ сигналу аналогічна:

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \Delta\psi \sin \Omega t).$$

Однак слід мати на увазі те, що ЧМ і ФМ сигнали поведуть себе по-різному при змінненні частоти модуляції і амплітуди модулюючого сигналу.

При частотній модуляції девіація частоти  $\Delta\omega_m$  пропорційна амплітуді низькочастотного сигналу. У той же час вона не залежить від частоти модулюючого сигналу. У випадку фазової модуляції її індекс модуляції виявляється пропорційним ще й амплітуді низькочастотного сигналу незалежно від його частоти. Як наслідок цього, девіація частоти при фазовій модуляції у відповідності з формулою  $M = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega}$  лінійно збільшується зі зростанням частоти.

### 6.7 Частотний спектр однотонового ЧМ сигналу при $M \ll 1$

Задачу про подання ЧМ сигналу сумою гармонічних коливань досить легко розв'язати, а для цього формулу (6.14) приведемо, за правилами тригонометрії, до такого вигляду:

$$u(t) = U_m \cos(M \sin \Omega t) \cdot \cos \omega_0 t - U_m \sin(M \sin \Omega t) \cdot \sin \omega_0 t. \quad (6.15)$$

Оскільки індекс частотної модуляції малий ( $M \ll 1$ ), скористаємося наближеними рівностями:

$$\cos(M \sin \Omega t) \approx 1; \quad \sin(M \sin \Omega t) \approx M \sin \Omega t.$$

На основі цього з рівності (6.15) отримуємо:

$$u(t) \approx U_m \cos \omega_0 t + \frac{MU_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{MU_m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (6.16)$$

Таким чином, при  $M \ll 1$  у спектрі сигналу з ЧМ міститься несуча коливання та дві бічні складові (верхня і нижня) на частотах  $\omega_0 + \Omega$  та  $\omega_0 - \Omega$ . Індекс  $M$  відіграє таку саму роль, як і коефіцієнт амплітудної модуляції  $m$  (порівняйте з формулою (6.6)).

Але виявляється і суттєва відмінність спектрів АМ і ЧМ сигналів. Для спектральної діаграми рис. 6.10, побудованої за формулою (6.16), характерне те, що нижнє бічне коливання має додатковий фазовий зсув на  $180^\circ$ .

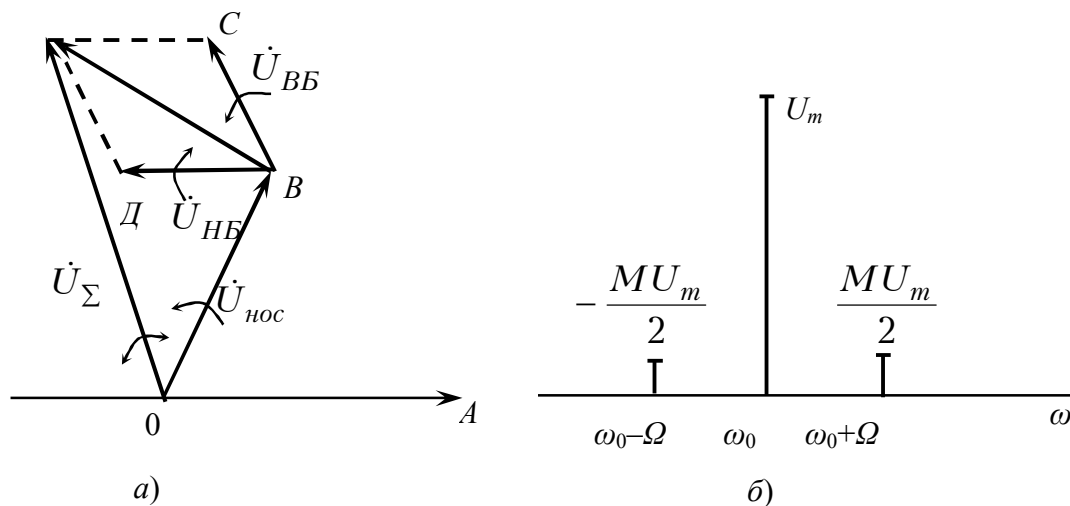


Рисунок 6.10 – Діаграми сигналу з ЧМ при  $M \ll 1$ : а) – векторна; б) – спектральна

Як наслідок цього, сума векторів, які відображають обидва бічні коливання (рис. 6.10,а), завжди перпендикулярна вектору  $\dot{U}_{noc}$ . З часом вектор  $\dot{U}_{\Sigma}$  буде “коливатися” навколо центрального положення.

### 6.8 Частотний спектр однотонального ЧМ сигналу при довільному значенні індексу

Скористаємося виразом (6.14), справедливим при будь-якому значенні індексу частотної модуляції. Як бачимо, в даному виразі присутня функція  $\cos(\omega_0 t + M \sin \Omega t)$ , тобто матимемо справу (див. формулу 6.15) з функціями  $\cos(M \sin \Omega t)$  та  $\sin(M \sin \Omega t)$ , які не можна розписати у прийнятому для аналізу вигляді за допомогою лише тригонометрії.

У розділі курсу математики, присвяченому спеціальним функціям, показано, що тут допоможе тригонометричний ряд Бесселя, і тоді математична модель однотонально частотно-модульованого сигналу матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 u(t) = U_m [ & I_0(M) \cos \omega_0 t + I_1(M) \cos(\omega_0 + \Omega)t - \\
 & - I_1(M) \cos(\omega_0 - \Omega)t + I_2(M) \cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \\
 & + I_2(M) \cos(\omega_0 - 2\Omega)t + I_3(M) \cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \\
 & - I_3(M) \cos(\omega_0 - 3\Omega)t + I_4(M) \cos(\omega_0 + 4\Omega)t + \\
 & + I_4(M) \cos(\omega_0 - 4\Omega)t + \dots ],
 \end{aligned}
 \tag{6.17}$$

де  $I_0(M)$ ,  $I_1(M)$ ,  $I_2(M)$ ,... – функції Бесселя першого роду, відповідно до нульового, першого, другого, ...  $n$ -го порядку від аргументу, яким є індекс ЧМ.

Значення функцій Бесселя подані у довідниках з математики у вигляді графіків (рис. 6.11) або таблиць (табл. 6.1).

Спектр однотонального ЧМ сигналу у загальному випадку містить нескінченне число складових, амплітуди яких пропорційні значенням  $I_k(M)$ , а частоти дорівнюють  $\omega_0 \pm k\Omega$ ; де  $k$  – порядок функції Бесселя.

Фази бічних коливань з частотами  $\omega_0 + k\Omega$  і  $\omega_0 - k\Omega$ ; збігаються, якщо  $k$  – парне число і відрізняються на  $180^\circ$ , якщо  $k$  – непарне.

Таблиця 6.1. Значення функцій Бесселя  $I_k(M)$

$M \backslash k$	1	2	3	4	5
0	0,765	0,224	-0,260	-0,397	-0,178
1	0,440	0,577	0,339	-0,066	-0,328
2	0,115	0,353	0,486	0,364	0,047
3	0,020	0,129	0,309	0,430	0,365
4	0,002	0,034	0,132	0,281	0,391
5	$2 \cdot 10^{-4}$	0,007	0,043	0,132	0,261
6	$2 \cdot 10^{-5}$	0,001	0,011	0,049	0,131
7	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-4}$	0,003	0,015	0,053

Як бачимо з табл. 6.1, чим більше значення порядку функції Бесселя  $k$ , тим більша довжина області аргументів, при яких ця функція дуже мала.

У таблиці 6.1 відділена нижня область значень функції Бесселя, якими практично нехтують.

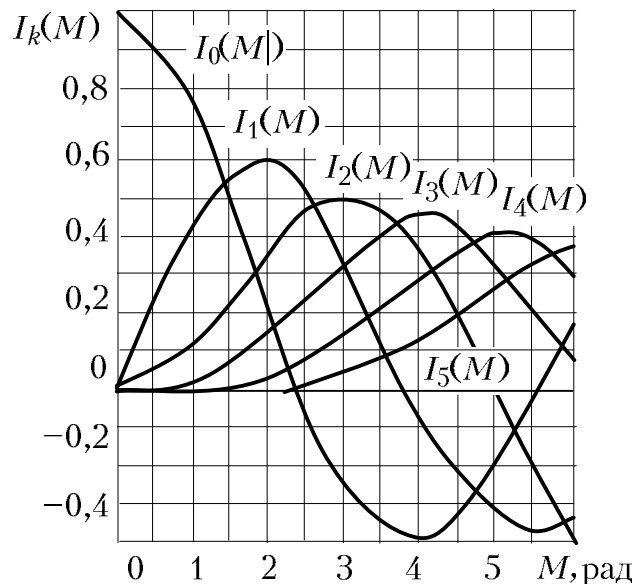


Рисунок 6.11 – Залежність функцій Бесселя від їх аргументу

Важливо зауважити, що зі зростанням індексу модуляції  $M$  розширюється смуга частот, яка займається сигналом. Зазвичай вважається, що допустимо нехтувати усіма спектральними складовими з номерами  $k > M+1$ . Тобто, до уваги береться  $(M+1)$  штук пар бічних складових, а ширина спектра сигналу:

$$\Delta\omega_{СП} = 2(M+1)\cdot\Omega. \quad (6.18)$$

Реальні ЧМ і ФМ сигнали характеризуються умовою  $M \gg 1$ . У цьому випадку

$$\Delta\omega_{СП} \approx 2M\Omega = 2 \Delta\omega_m.$$

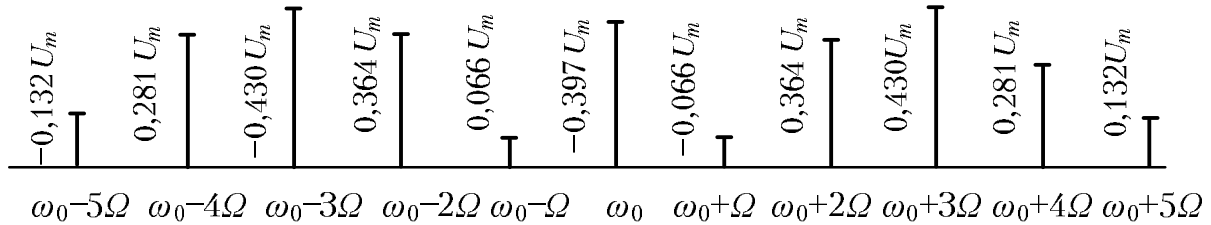


Рисунок 6.12 – Спектральна діаграма ЧМ сигналу з  $M = 4$

Таким чином, сигнал з кутовою модуляцією займає смугу частот, яка приблизно удвоє перевищує значення девіації частоти.

Як було показано, для передачі АМ сигналу потрібна смуга частот, рівна  $2\Omega$ , тобто у  $M$  разів менша. Велика широкосмуговість ЧМ і ФМ сигналів обумовлює їх використання для цілей радіозв'язку лише на досить високих частотах, в діапазонах метрових та більш коротких хвиль. Однак саме широкосмуговість призводить до значно більшої завадозахищеності сигналів з кутовою модуляцією у порівнянні з АМ сигналами.

На рис. 6.12 подано структурну діаграму сигналу з кутовою модуляцією при індексі  $M=4$ . Відповідні дані щодо значень функції Бесселя взяті зі стовпця, де  $M=4$ . Кількість пар бічних, які потрібно врахувати дорівнює 5-ти.

*Задача:* визначити вираз для спектра ЧМ сигналу, коли індекс частотної модуляції=4, амплітуда несучої  $U_m=10$  В, її частота  $f_0=2$ МГц, а частота керуючого гармонічного сигналу  $F=100$  кГц.

Оскільки число пар бічних складових дорівнює 5-ти, то, скориставшись рис. 6.11, знаходимо:

$$I_0(4) = -0,39; \quad I_1(4) = -0,08; \quad I_2(4) = 0,36; \\ I_3(4) = 0,46; \quad I_4(4) = 0,3; \quad I_5(4) = 0,13.$$

Скориставшись виразом (6.17) отримаємо:

$$u(t) = -3,9 \cos 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 t - 0,8 \cos 2\pi \cdot 2,1 \cdot 10^6 t + 0,8 \cos 2\pi \cdot 1,9 \cdot 10^6 t + \\ + 3,6 \cos 2\pi \cdot 2,2 \cdot 10^6 t + 3,6 \cos 2\pi \cdot 1,8 \cdot 10^6 t + 4,6 \cos 2\pi \cdot 2,3 \cdot 10^6 t - \\ - 4,6 \cos 2\pi \cdot 1,7 \cdot 10^6 t + 3 \cos 2\pi \cdot 2,4 \cdot 10^6 t + 3 \cos 2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^6 t + \\ + 1,3 \cos 2\pi \cdot 2,5 \cdot 10^6 t - 1,3 \cos 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^6 t.$$

### 6.9 Потужність сигналів з кутовою модуляцією

Як бачимо з таблиці 6.1, зростання індексу модуляції призводить до перерозподілу потужності у спектрі модульованого сигналу. Зокрема, якщо значення  $M$  вибране таким, що  $I_0(M)=0$ , то складова несучої частоти  $\omega_0$  у спектрі буде відсутня, що сприяє ефективнішому використанню енергії для передачі інформації.



Таблиця 6.2 – Значення коренів рівняння  $I_0(M)=0$ 

$M$	2,405	5,520	8,654	11,792	14,931	18,071	21,212
-----	-------	-------	-------	--------	--------	--------	--------

*Приклад.* Однотональний ЧМ сигнал має девіацію частоти  $\Delta f_m=240$  кГц. Знайти частоти модуляції  $F$ , при яких несуче коливання у спектрі сигналу буде відсутнє.

Скористаємося формулою  $F = \Delta f_m / M$ . Взявши значення  $\Delta f_m$  з умови задачі, а  $M$  – з таблиці 6.2, отримуємо:

$$F_1 = 240/2,405=99,792 \text{ кГц}, F_2 = 240/5,520=43,474 \text{ кГц}, \dots$$

### 6.10 Спектр коливання при змішаній амплітудно-частотній модуляції

У загальному вигляді сигнал зі змішаною амплітудно-частотною модуляцією запишеться таким чином:

$$u(t) = U_m(t) \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = U_m(t) \cdot \cos\varphi(t) \cdot \cos\omega_0 t - U_m(t) \cdot \sin\varphi(t) \sin\omega_0 t = U_c(t) \cdot \cos\omega_0 t - U_s(t) \cdot \sin\omega_0 t, \quad (6.19)$$

де  $U_c(t) = U_m(t) \cdot \cos\varphi(t)$  та  $U_s(t) = U_m(t) \cdot \sin\varphi(t)$ .

Отже, визначення спектра зводиться до знаходження спектрів обвідних коливань.

Для наочності розглянемо випадок, коли обидва види модуляції здійснюються однією і тією ж модулюючою функцією. Для спрощення аналізу задамо цю функцію у вигляді гармонічного коливання  $\cos\Omega t$  для частотної модуляції і у вигляді  $\cos\Omega t$  або  $\sin\Omega t$  для амплітудної і розглянемо два випадки:

1. Обидві функції  $U_m(t)$  і  $\varphi(t)$  є парними відносно  $t$ :

$$U_m(t) = U_{m0}(1 + m\cos\Omega t); \varphi(t) = M \cos\Omega t, m \ll 1, M \ll 1.$$

Тоді вираз (6.19) прийме вигляд:

$$u(t) = U_{m0}(1 + m\cos\Omega t) \cdot \cos[\omega_0 t + M\cos\Omega t].$$

Оскільки при  $M \ll 1$   $\cos(M\cos\Omega t) \approx 1$ ,  $\sin(M\cos\Omega t) \approx M\cos\Omega t$ , останній вираз можна переписати:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{m0}[(1 + m\cos\Omega t) \cdot \cos\omega_0 t - (1 + m\cos\Omega t) \cdot M\cos\Omega t \cdot \sin\omega_0 t] = \\ &= U_{m0}[(1 + m\cos\Omega t) \cdot \cos\omega_0 t - M\left(\frac{m}{2} + \cos\Omega t + \frac{m}{2} \cos 2\Omega t\right) \cdot \sin\omega_0 t] = \\ &= U_{m0} \left\{ \cos\omega_0 t + \frac{m}{2} [\cos(\omega_0 + \Omega)t + \cos(\omega_0 - \Omega)t] - \right. \\ &\quad \left. - M \left[ \frac{m}{2} \sin\omega_0 t + \frac{1}{2} \sin(\omega_0 + \Omega)t + \frac{1}{2} \sin(\omega_0 - \Omega)t \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{mM}{4} [\sin(\omega_0 t + 2\Omega)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega)t] \right\}. \end{aligned}$$

Додаючи квадратурні складові  $\cos\omega_0 t$  та  $(m/2) \cdot \sin\omega_0 t$ , отримуємо для амплітуди результуючого коливання на частоті  $\omega_0$  такий вираз:  $\sqrt{1 + (mM/2)^2} \cdot U_{m0}$ . Аналогічно знаходимо амплітуду  $1/2 \sqrt{M^2 + m^2} \cdot U_{m0}$

для коливань з частотами  $\omega_0 \pm \Omega$  та  $(mM/4) U_{m0}$  для частот  $\omega_0 \pm 2\Omega$ . Спектр коливання  $u(t)$  поданий на рисунку 6.13,а. Він є симетричним.

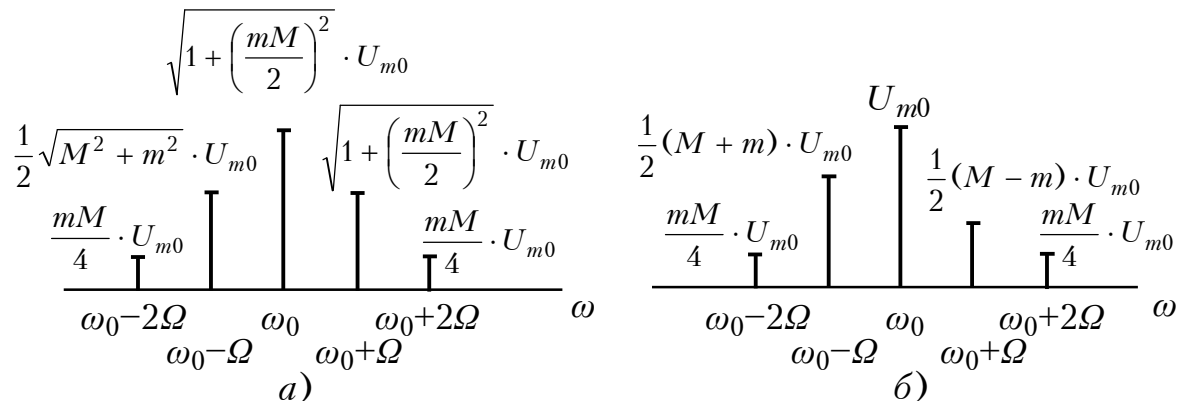


Рисунок 6.13 – Спектр коливання при одночасній модуляції амплітуди і частоти гармонічної функції

2. Функція  $U_m(t)$  є сумою парної і непарної складових, а  $\varphi(t)$  – парна:

$$U_m(t) = U_{m0}(1 + m \sin \Omega t); \quad \varphi(t) = M \cos \Omega t; \quad m \ll 1, \quad M \ll 1.$$

Викладки будуть аналогічними попередньому випадку і приведуть до таких амплітуд:  $U_{m0}$  при частоті  $\omega_0$ ;  $1/2(M - m) \cdot U_{m0}$  при частоті  $\omega_0 + \Omega$ ;  $1/2(M + m) \cdot U_{m0}$  при частоті  $\omega_0 - \Omega$ ;  $mM/4$  при частотах  $\omega_0 \pm 2\Omega$ . Спектральна діаграма зображена на рис. 6.13,б.

Симетрія спектра порушується у даному прикладі через неоднаковість амплітуд коливань верхньої  $\omega_0 + \Omega$  та нижньої  $\omega_0 - \Omega$  бічних частот.

Порушення симетрії спектра при змішаній амплітудно-частотній модуляції інколи використовується як показник неправильності роботи пристрою, який здійснює амплітудну модуляцію; перекося спектра вказує на те, що корисна амплітудна модуляція супроводжується паразитичною кутовою модуляцією.

## 7 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ

### 7.1 Поняття про перехідний режим

В усіх попередніх розділах розглядалися випадки, у яких виконувались дві умови: 1) джерела були підімкнені до кола теоретично нескінченно довго; 2) ніяких змін у стані кола не відбувалось. Режими роботи за таких умов називаються *усталеними, вимушеними* або *примушеними*. При інших режимах, які вивчаються у цьому розділі, закони, яким підлягають струми і напруги, виявляються зовсім іншими, ніж закони усталених режимів. Отже, говорячи про напруги, струми, опори чи будь-які інші параметри кола, необхідно завжди чітко уявляти, про роботу у якому режимі йдеться – у режимі усталеному чи у якомусь іншому.

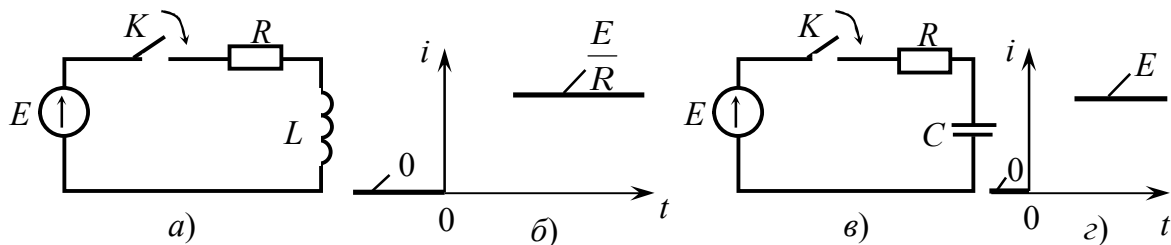


Рисунок 7.1 – Ілюстрація до поняття усталеного і перехідного режимів

Нехай маємо коло рис. 7.1,а, до якого підмикається джерело постійної напруги з е.р.с.  $E$ . До замикання ключа  $K$  струм у колі був рівним нулю, а через деякий достатньо великий час після замикання ключа струм у колі стає  $I = E/R$  (опір котушки постійному струму, як відомо, дорівнює нулю) (рис. 7.1,б). Отже, після замикання ключа струм за деяким законом змінюється від нуля до  $E/R$ , яке є усталеним значенням цього струму. Аналогічно і у колі рис. 7.1,в до замикання ключа напруга на конденсаторі дорівнювала нулю, а через певний час після замикання ключа  $K$ , змінилася за деяким законом до значення  $E$ , яке є усталеним значенням цієї напруги (рис. 7.1,г). Змінення струму через котушку  $L$  та напруги на конденсаторі  $C$  від початкового до кінцевого значень відбувалось протягом певного відрізка часу. Протягом часу, поки струми та напруги на усіх елементах змінюються від початкових значень, які вони мали у попередньому усталеному режимі роботи кола (до замикання ключа  $K$ ), до кінцевих значень, які мають через певний інтервал часу (після замикання ключа  $K$ ) у теперішньому усталеному режимі, кола знаходились у *режимі перехідного процесу* (у *перехідному режимі*).

Введемо поняття: *комутація*. Під *комутацією* розуміється відімкнення, ввімкнення, перемикання джерел, будь-яких елементів кола чи раптове змінення їх параметрів (закритий транзистор відкрився до насичення чи навпаки, електронне реле підімкнуло чи відімкнуло резистор,

раптово пробився конденсатор і т. ін.). Імпульсні схеми, наприклад, працюють лише у перехідних режимах, де вони є природними для таких пристроїв.

Будь-яка комутація веде за собою перерозподіл напруг і струмів у колі, тобто супроводжується перехідними процесами. Після будь-якої комутації режим роботи у колі, на деякий час, стає перехідним. Перехід до нового усталеного режиму (стану) відбувається протягом певного часу – *тривалості перехідного процесу*.

## 7.2 Неперервність енергії. Закони комутації

У багатьох випадках тіла чи системи здатні накопичувати енергію. Наприклад, рухоме тіло має запас кінетичної енергії  $W_K = mV^2 / 2$ , заряджений конденсатор має енергію електричного поля  $W_e = CU^2 / 2$ , енергію магнітного поля котушки індуктивності  $W_m = LI^2 / 2$ . Потужність  $P$ , як відомо, визначається як змінення енергії за одиницю часу  $W = \Delta W / \Delta t$ . Очевидно, що будь-яке змінення енергії на скінченну величину  $\Delta W$  за нескінченно малий час ( $\Delta t = 0$ ) вимагає джерела нескінченно великої потужності, бо  $\Delta W / 0 = \infty$ . Оскільки джерел нескінченно великої потужності у природі не існує, то ні у якій системі ніяка енергія ніколи не може змінюватись стрибком, тобто на скінченну величину за нульовий відрізок часу. Тому стрибком не може змінюватись енергія електричного поля конденсатора і енергія магнітного поля котушки. Але енергія у конденсаторі визначається напругою  $U$  між його обкладинками ( $CU^2 / 2$ ), енергія у котушці – струмом  $I$  через котушку ( $LI^2 / 2$ ). Отже, *напруга на конденсаторі і струм у котушці не можуть змінюватись стрибкоподібно*, тобто за нескінченно малий час, оскільки для цього знову-таки знадобилося б джерело нескінченно великої потужності.

Оскільки носієм енергії у конденсаторі є напруга, а не струм (енергія електричного поля зарядженого конденсатора  $W_e$  залежить від напруги і ємності конденсатора), тому змінення струму у конденсаторі не веде за собою змінення енергії, тобто *струм у конденсаторі може змінюватись стрибкоподібно*. Оскільки носієм енергії у котушці індуктивності є струм, а не напруга (енергія магнітного поля котушки  $W_m$  залежить від струму і індуктивності котушки), тому змінення напруги на котушці не веде за собою змінення енергії, тобто *напруга на котушці може змінюватись стрибкоподібно*.

Виникає питання, чи може у конденсаторі струм, а у котушці напруга змінюватись стрибком, бо ж хіба змінення струму у конденсаторі не веде за собою змінення напруги, а змінення напруги на котушці – змінення струму? Відповімо на ці запитання, нагадавши, що форми напруги і струму (закони їх змінення) повторюють одна одну тільки у єдиному випадку – в

резистивних елементах, оскільки вони не накопичують енергію. Але в елементах, які накопичують енергію, при напрузі однієї форми, у загальному випадку, впливає струм зовсім іншої форми. Таким чином, змінення струму у конденсаторі може зовсім не змінити напругу, а отже і енергію у конденсаторі, тому стрибкоподібному зміненню струму у конденсаторі ніщо не чинить опору. Аналогічна ситуація має місце і у котушці з напругою.

Введемо поняття  $t = -0$  та  $t = +0$ . Під моментом  $t = -0$  будемо розуміти останній момент перед комутацією, а під моментом  $t = +0$  – перший момент часу після комутації.

Що стосується математики розрізнити значення “ $-0$ ” та “ $+0$ ” не можливо, але ми їх ввели, щоб відрізнити значення напруг і струмів у ці моменти, пам’ятаючи, що у момент  $t = +0$  у колі починається перехідний процес, коли опори деяких елементів різко змінюються, еквівалентна схема набуває зовсім іншого вигляду, усі закони вимушених режимів стають недійсними, а коло починає підлягати законам перехідних процесів.

Узагальнюючи усе сказане, тепер можемо сформулювати два правила, які називаються законами комутації.

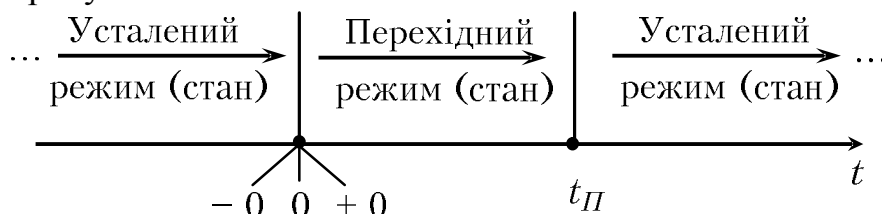
1. У колі з конденсатором напруга на ньому зміниться стрибком не може. Значення цієї напруги у останній момент перед комутацією ( $t = -0$ ) дорівнює її значенню у перший момент після комутації ( $t = +0$ ).

2. У колі з котушкою індуктивності струм через неї зміниться стрибком не може. Значення цього струму у останній момент перед комутацією ( $t = -0$ ) дорівнює його значенню у перший момент після комутації ( $t = +0$ ).

### 7.3 Увімкнення котушки індуктивності на постійну напругу

#### Рівняння перехідного струму

Хронологію подій, пов’язаних з перехідним процесом, можна зобразити рисунком:



У момент  $t = -0$  закінчується один усталений режим роботи кола, у момент  $t = +0$  починається перехідний процес і коло знаходиться у перехідному режимі. У момент  $t = t_{\Pi}$  коло перейшло в інший усталений режим роботи. Інтервал часу від  $t = 0$  до  $t = t_{\Pi}$  є тривалістю перехідного процесу.

Під час перехідного процесу, навіть при джерелах постійної напруги, усі струми і напруги у колі змінюються від одних значень до інших і є, таким чином, величинами змінними. Отже, складати будь-які рівняння можна тільки для миттєвих значень напруг і струмів. Поняття діючих значень у перехідних режимах просто втрачає свій зміст і тому використаними не можуть бути.

Звернемося до рис. 7.1,*a* і запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень напруг у колі для стану, у який входить коло у момент  $+0$ , тобто після замикання ключа  $K$  (комутації):

$U_R + U_L = E$ , де  $U_R = R \cdot i$ ,  $U_L = L \frac{di}{dt}$  – миттєві значення напруг на резисторі і котушці індуктивності при протіканні перехідного струму з миттєвим значенням  $i(t) = i$ . Отже:

$$R_i + L \frac{di}{dt} = E$$

і є те рівняння, розв'язавши яке ми отримаємо закон за яким змінюється струм у колі під час перехідного процесу. Розділивши це рівняння на  $L$ , отримаємо:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \quad (7.1)$$

даний вираз – це лінійне диференціальне рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами і ненульовою правою частиною. З курсу математики відомо, що загальним результатом такого (неоднорідного) рівняння є сума двох розв'язків – загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

описує вільний процес (без примусової сили з боку джерела е.р.с.  $E$ ). Розв'язком цього рівняння буде так званий вільний струм у колі  $i_e$ .

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7.1) – це усталений струм  $i_y$ , який буде протікати у колі після закінчення перехідного процесу. Цей струм буде постійним, а тому у рівнянні (7.1) треба покласти  $di/dt = 0$ , яке переписеться так:

$$\frac{R}{L}i_y = \frac{E}{L}; \text{ або } i_y = \frac{E}{R}. \quad (7.2)$$

Цей результат підтверджується простими міркуваннями: оскільки індуктивний опір котушки постійному струму дорівнює нулю, то струм у колі буде обмежуватися лише опором резистора  $R$ .

Переписемо однорідне диференціальне рівняння, як таке, що описує вільний струм у колі, таким чином:

$$\frac{di_g}{dt} + \frac{R}{L}i_g = 0. \quad (7.3)$$

Розділимо змінні у цьому рівнянні:

$$\frac{di_g}{dt} = -\frac{R}{L}i_g; \quad \frac{di_g}{i_g} = -\frac{R}{L} \cdot dt$$

і проінтегруємо його:

$$\int \frac{di_g}{i_g} = -\int \frac{R}{L} dt; \quad \ln i_g = -\frac{R}{L} \cdot t + \ln A,$$

де  $\ln A$  – довільна стала інтегрування, значення якої визначимо трохи пізніше.

Після перенесення  $\ln A$  у ліву частину і потенціювання отримаємо:

$$i_g = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

де  $\tau = \frac{L}{R}$  – називається сталою часу кола з  $R$  і  $L$ .

Таким чином, сума  $i = i_g + i_y$  є перехідним струмом у досліджуваному колі:

$$i = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{R}.$$

Значення постійної інтегрування  $A$  отримуємо виходячи з 1-го закону комутації, який стверджує, що струм через котушку  $i(-0) = i(+0) = i(0) = 0$ . Підставивши  $i = 0$  та  $t = 0$  у останнє рівняння, отримаємо:

$$A = -\frac{E}{R}.$$

Тоді рівняння перехідного струму остаточно матиме вигляд:

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}). \quad (7.4)$$

### Графік та тривалість перехідного процесу

Таким чином, член  $E/R$  – вимушена (усталена) складова струму у колі, а член  $-(E/R)e^{-t/\tau}$  – вільна складова цього струму.

Побудуємо криві струмів  $i_y, i_g, i$  у колі рис. 7.1,а. Визначимо час, через який перехідний процес закінчиться. Очевидно, що струм досягне свого усталеного значення тоді, коли вільна складова стане рівною нулю. Але множник  $e^{-t/\tau}$  стане рівним нулю через час  $t$ , рівний нескінченності. Отже, перехідний процес у колі з накопиченням енергії теоретично протікає необмежено тривалий час.

Пояснимо фізичний зміст сталої часу кола  $\tau$  (грецька літера, читається “тау”): стала часу – це такий відрізок часу, протягом якого вільна складова струму зменшиться у  $e = 2,72$ .

З даних таблиці 7.1 видно, що через час  $t = \tau$  значення струму  $i$  у колі досягає 63% від усталеного, через  $t = 3\tau$  – 95%, а через  $5\tau$  відрізнятиметься від усталеного значення менше ніж на 1%. Таким чином, практично через інтервал часу тривалістю  $(3...5)\tau$  вважається, що перехідний процес закінчився.

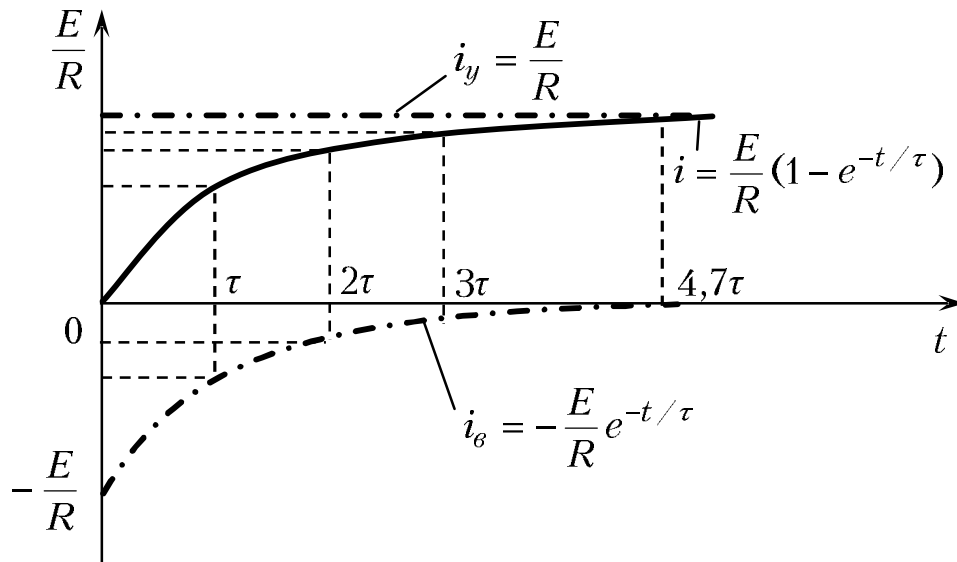


Рисунок 7.2 – Графіки переходного струму  $i$  та його складових  $i_s, i_y$

Таблиця 7.1 – Дані для побудови графіків рис. 7.2

$t$	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$
$e^{-t/\tau}$	0,37	0,14	0,05	0,02	0,01
$1 - e^{-t/\tau}$	0,63	0,86	0,95	0,98	0,99

Стала часу визначається параметрами усіх елементів, які входять до кола, а не будь-якого одного елемента, тому вона є однією для усього кола, яким би складним це коло не було.

### Напруги на резисторі і котушці індуктивності

Визначимо закон змінення миттєвих напруг на резисторі  $R$  схеми рис. 7.1. Оскільки  $U_R = R \cdot i$ , то

$$U_R = R \frac{E}{R} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) = E(1 - e^{-t/\tau}). \quad (7.5)$$

Очевидно, що крива  $U_R = f(t)$  повторює криву  $i = i(t)$  у відповідному масштабі.

Визначимо закон змінення миттєвих значень напруги на індуктивному елементі, згадавши що  $U_L = L di / dt$ ;

$$U_L = L \frac{d}{dt} \left[ \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \right] = L \left( -\frac{E}{R} \right) \left( -\frac{R}{L} \right) e^{-t/\tau} = E \cdot e^{-t/\tau}. \quad (7.6)$$



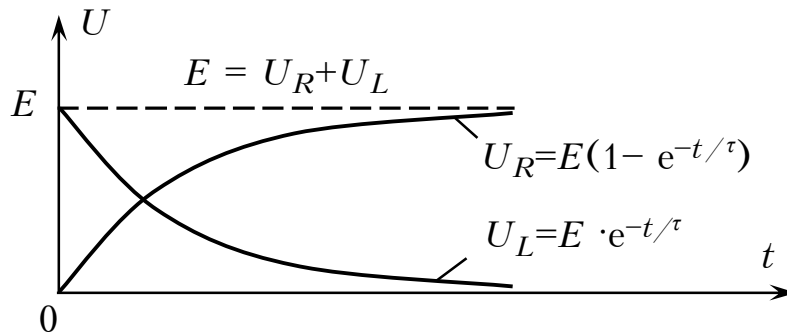


Рисунок 7.3 – Графіки змінення напруг у колі при перехідному процесі

До моменту  $t=0$  ключ був розімкнений і напруги на котушці і на резисторі дорівнювали нулю. Починаючи з моменту  $t=+0$  справедливим стає рівняння (7.6), з якого видно, що при  $t=+0$  напруга  $U_L = E$ . Отже, після комутації (замикання ключа) напруга на котушці стрибком досягає значення  $E$ , а струм залишається без змін ( $i=0$ ). Із збільшенням часу напруга на котушці зменшується і практично через  $(3..5)\tau$  стає рівною нулю. Струм у колі згідно з рівнянням (7.4) зростатиме, що викличе зростання і напруги на резисторі  $U_R$  за законом струму.

У будь-який момент часу алгебрична сума напруг на елементах кола має дорівнювати  $E$ . Пересвідчимося у цьому:

$$U_R + U_L = E(1 - e^{-t/\tau}) + E \cdot e^{-t/\tau} = E - Ee^{-t/\tau} + E \cdot e^{-t/\tau} = E.$$

### Опір котушки індуктивності у перехідний період

Щоб визначити закон, за яким буде змінюватись опір котушки протягом перехідного процесу, застосуємо до цієї ділянки кола закон Ома для миттєвих значень напруги  $U_L$  та струму  $i$ , який протікає у котушці:

$$Z_L(t) = \frac{U_L}{i} = \frac{E \cdot e^{-t/\tau}}{\frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})} = \frac{R}{e^{t/\tau} - 1}. \quad (7.7)$$

$$\text{При } t=0, Z_L(0) = \frac{R}{1-1} = \frac{R}{0} = \infty;$$

$$\text{При } t=\infty, Z_L(\infty) = \frac{R}{\infty} = 0.$$

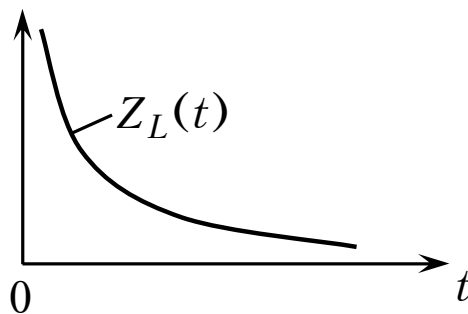


Рисунок 7.4 – Перехідний опір котушки індуктивності

Таким чином, опір котушки індуктивності поводить себе так. До замикання ключа, тобто до моменту  $t = -0$ , у колі маємо усталений режим, при якому індуктивний опір дорівнює нулю. Після замикання ключа у момент  $t = +0$  індуктивний опір зростає стрибком до нескінченності, а потім зменшується практично до нуля через  $(3...5)\tau$  за експоненціальним законом (рис. 7.4). У момент  $t = +0$  напруга джерела  $E$  розподіляється між  $R$  і  $L$  пропорційно опорам цих послідовно з'єднаних ділянок. Тому на нескінченно великому опорі буде уся напруга  $E$ , а на скінченному опорі резистора – нуль.

Слід ще раз нагадати, що властивості кола в усталеному режимі зовсім інші ніж під час перехідного процесу. Дійсно, опір котушки індуктивності постійному струму (усталений режим) дорівнює нулю, а протягом перехідного режиму змінюється від нескінченності до нуля.

Зауважимо, що електричне коло (рис. 7.1,а), яке містить один накопичувальний елемент  $R$ , котушку індуктивності  $L$ , є так званим  $RL$ -колом, процеси у якому описуються диференціальним рівнянням першого порядку, а тому це коло називається *колом першого порядку*.

#### 7.4 Увімкнення RC-кола на постійну напругу

##### Рівняння перехідної напруги на конденсаторі

Підімкнемо RC-коло до джерела постійної напруги (рис. 7.1,в). Після замикання ключа буде справедливим рівнянням (другий закон Кірхгофа):

$$E = U_R + U_C = R \cdot i + U_C.$$

Оскільки у колі з конденсатором через резистор  $R$  буде протікати зарядний струм

$$i = C \frac{dU_C}{dt}, \text{ то } E = R \cdot C \frac{dU_C}{dt} + U_C$$

або

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = \frac{E}{RC}, \quad (7.8)$$

де  $\tau = RC$  – стала часу досліджуваного кола, а напруга на конденсаторі буде складатися з напруги вимушеної (усталеної) та вільної напруги, яка існує тільки протягом перехідного процесу. При  $t \rightarrow \infty$  перехідний процес закінчується, напруга на конденсаторі перестає змінюватись  $dU_C / dt \rightarrow 0$ , струм заряду конденсатора спадає до нуля, спад напруги на резисторі  $R$  зменшується до нуля, а конденсатор стає зарядженим до постійної напруги джерела  $E$ .

Усталена складова напруги  $U_{C_{уст}}$  буде знайдена з рівняння (7.8), де похідну  $dU_C / dt$  слід покласти рівною нулю. Тоді

$$U_{C_{уст}} = E. \quad (7.9)$$

Вільну складову напруги на конденсаторі  $U_{C\epsilon}$  знайдемо з рівняння (7.8), поклавши праву частину рівною нулю:

$$\frac{dU_{C\epsilon}}{dt} + \frac{1}{RC}U_{C\epsilon} = 0,$$

з якого, після розділення змінних та інтегрування, отримаємо:

$$\ln U_{C\epsilon} = -\frac{1}{RC}t + \ln B.$$

або  $\ln \frac{U_{C\epsilon}}{B} = -\frac{t}{\tau}$  і після потенціювання:

$$U_{C\epsilon} = B \cdot e^{-t/\tau}. \quad (7.10)$$

Отже, перехідна напруга на конденсаторі  $U_C$  буде дорівнювати:

$$U_C = U_{C_{уст}} + U_{C\epsilon} = E + Be^{-t/\tau}. \quad (7.11)$$

Скориставшись другим законом комутації у момент  $t = +0$  напруга на конденсаторі дорівнювала нулю і тоді:

$$0 = E + B, \quad B = -E.$$

Підставивши значення сталої інтегрування  $B$  у рівняння (7.11) остаточно матимемо, що:

$$U_C = U_{C_{уст}} + U_{C\epsilon} = E - Ee^{-t/\tau},$$

$$U_C = E(1 - e^{-t/\tau}). \quad (7.12)$$

### Зарядний струм та перехідний опір конденсатора

Після замкнення кола у момент  $t = +0$  з'явиться струм зарядження конденсатора  $i$ , який буде змінюватись за законом:

$$i = C \frac{dU_C}{dt} = CE \frac{d}{dt}(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

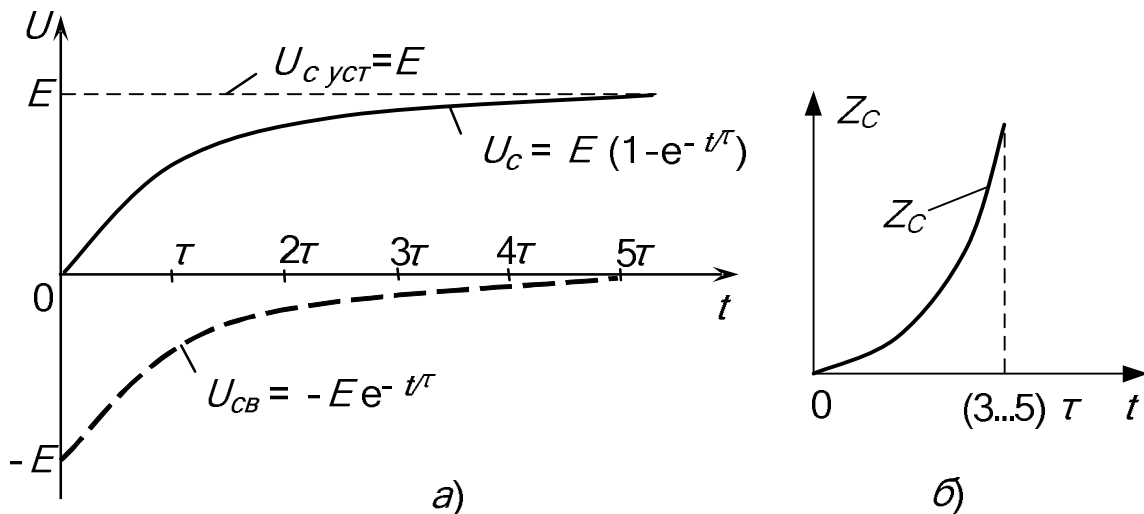


Рисунок 7.5 – Зарядний струм та перехідний опір конденсатора: а) – закон змінення перехідної напруги на конденсаторі та її складових, б) – залежність перехідного опору конденсатора від часу

Ємнісний опір конденсатора у перехідному режимі  $Z_C$  дорівнюватиме:

$$Z_C = \frac{U_C}{i} = \frac{E(1 - e^{-t/\tau})}{\frac{E}{R} \cdot e^{-t/\tau}} = R(e^{t/\tau} - 1). \quad (7.13)$$

Проаналізуємо вираз (7.13):

при  $t = 0$ ,  $Z_C(0) = R(e^0 - 1) = R(1 - 1) = 0$ ;

при  $t = \infty$ ,  $Z_C(\infty) = R(e^\infty - 1) = R \cdot \infty = \infty$ .

Таким чином, до замикання ключа ємнісний опір дорівнював нескінченності, у перший момент після комутації ( $t = +0$ ) він спадає до нуля, а потім практично через  $(3...5)\tau$  зростає до нескінченності. Вираз  $i = (E/R)e^{-t/\tau}$  також підкреслює ту обставину, що опір незарядженого (тільки незарядженого!) конденсатора у перший момент після комутації дорівнював нулю. Дійсно, при  $t = 0$ ,  $i = E/R$ , але струм у колі 7.1,в може бути таким тільки у тому випадку, якщо ніяких інших опорів, крім  $R$ , у колі нема, а, отже, ємнісний опір конденсатора у початковий момент перехідного процесу дорівнював нулю.

З іншого боку, повністю заряджений конденсатор (після закінчення перехідного процесу) як джерело напруги у колі є протилежним за полярністю і рівним за кількістю вольт відносно е.р.с.  $E$ . У результаті вони взаємно врівноважують одна одну, через що струм у колі стає рівним нулю. Але струм у колі може бути відсутнім, коли зовнішня ділянка (відносно джерела  $E$ ) кола матиме нескінченно великий опір, а, оскільки, опір резистора має скінченне значення і залишається весь час незмінним, то нескінченно великий опір є лише на ділянці конденсатора.

Аналогічно,  $RC$ -коло також містить один накопичувальний елемент – конденсатор, процеси у ньому описується диференціальним рівнянням першого порядку і тому воно теж називається *колом першого порядку*.

Важливим є те, що у колах першого порядку (наприклад, у розглянутих  $RL$  та  $RC$ -колах) усі процеси: змінення напруг, струмів, опорів відбуваються за експоненціальними законами. Причому усі ці процеси не повторюються, тобто є неперіодичними. На відміну від цього для кіл другого порядку, які містять два накопичувачі енергії  $L$  і  $C$ , характерним є саме періодичність процесів, що потребує для аналізу більш складного математичного апарату.

### **Розрядження конденсатора на резистор**

Нехай є конденсатор ємністю  $C$ , заряджений до напруги  $U_0$ . У момент  $t = 0$  замкнемо його на резистор з опором  $R$  і визначимо закон змінення миттєвих напруг на конденсаторі та резисторі після комутації (рис. 7.6).

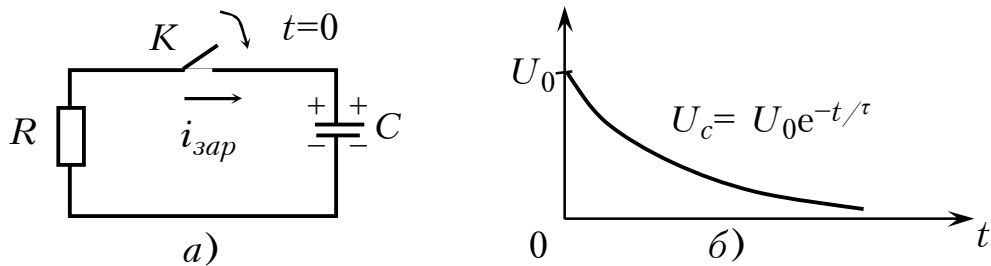


Рисунок 7.6 – Процес розрядження конденсатора: а) – схема кола, б) – графік розрядження

Додатним у колі з конденсатором є струм, який збільшує заряд конденсатора. Цей струм спрямований до позитивно зарядженої пластини, записується зі знаком плюс, тобто  $i = CdU_C / dt$ . Додамо рівняння за другим законом Кірхгофа. Оскільки джерел у колі нема,  $U_C + U_R = 0$ , або  $R_i + U_C = 0$ . Підставивши значення  $i$ , отримаємо:

$$RC \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

або

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = 0. \quad (7.14)$$

У цьому рівнянні права частина дорівнює нулю. Це говорить про те, що вимушене значення напруги на конденсаторі дорівнює 0, що повністю відповідає фізиці процесу. Дійсно, струм від зарядженого конденсатора зменшується і через час  $(3...5)\tau$  його значення практично дорівнює нулю.

Розв'язавши рівняння (7.14) відносно  $U_C$ , з урахуванням того, що  $U_C(+0) = U_C(-0) = U_0$ , отримаємо:

$$U_C = U_0 e^{-t/\tau}.$$

Закон змінення струму у колі рис. 7.6,а:

$$i = C \frac{U_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_0 e^{-t/\tau}) = -\frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}. \quad (7.15)$$

Знак мінус показує, що розрядний струм конденсатора є протилежним зарядному і протікає від позитивно зарядженої пластини конденсатора через резистор  $R$  до негативно зарядженої пластини. Після розрядження енергія у конденсаторі дорівнює нулю.

Оскільки струм через опір весь час змінюється, визначимо енергію, яка розсіюється (у вигляді тепла) на резисторі за нескінченно малий час  $dt$ , а потім підсумуємо ці нескінченно малі енергії за весь час перехідного процесу.

Елементарна енергія за час  $dt$  дорівнює:

$$dW = i^2 \cdot R \cdot dt = \left( -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-t/\tau} \right)^2 \cdot R \cdot dt.$$

Енергія за весь час перехідного процесу:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^{\infty} dW = \int_0^{\infty} \frac{U_0^2}{R^2} R \cdot e^{-2t/\tau} \cdot dt = \\
 &= \frac{U_0^2}{R(-2/RC)} e^{-\frac{2}{RC}t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{CU_0^2}{2} e^{-\frac{2}{RC}t} \Big|_0^{\infty} = \\
 &= -\frac{CU_0^2}{2} (0 - 1) = \frac{CU_0^2}{2},
 \end{aligned}$$

тобто енергія, яка виділяється у резисторі з опором  $R$  після комутації, дорівнює енергії, яка була накопичена конденсатором до комутації.

### 7.5 Перехідні процеси у колах з $R$ , $L$ , $C$

Кола з  $R$ ,  $L$  та  $C$  відносяться до класу *другого порядку*, бо мають два накопичувачі енергії, вільні процеси у яких описуються диференціальними рівняннями другого порядку. Розглянемо спочатку вільні процеси, які протікають у нерозгалуженому колі, яке складається з котушки індуктивності  $L$ , конденсатора  $C$  та резистора  $R$  (рис. 7.7).

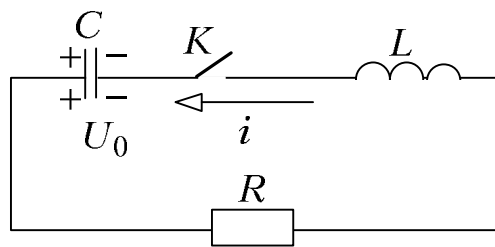


Рисунок 7.7 – Нерозгалужене  $RLC$ -коло

Нехай до комутації конденсатор  $C$  заряджений до напруги  $U_0$ .

Після замикання ключа утворюється коло, для якого справедливе рівняння  $U_L + U_R + U_C = 0$ , а після підстановки:  $U_R = R \cdot i$  та  $U_L = L di / dt$  з урахуванням, що  $i = C dU_C / dt$ , це рівняння прийме вигляд:

$$L \frac{d}{dt} (C \frac{dU_C}{dt}) + R \cdot C \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

або

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0.$$

Після ділення на  $LC$  отримаємо:

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0. \quad (7.16)$$

Права частина отриманого рівняння дорівнює нулю, отже, процеси у колі відбуваються без зовнішніх впливів, а напруга на конденсаторі складається тільки із вільної складової, яку отримуємо розв'язавши це

однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Відповідне йому характеристичне рівняння

$$k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0,$$

має такі два корені:

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}. \quad (7.17)$$

Загальний розв'язок рівняння (7.16) має вигляд:

$$U_C = A_1 e^{K_1 t} + A_2 e^{K_2 t}. \quad (7.18)$$

При цьому можуть мати місце три випадки:

1.  $R^2 / 4L^2 < 1/LC$  або  $R < 2/\sqrt{L/C}$ ,  $R < 2\rho$ ;
2.  $R^2 / 4L^2 > 1/LC$  або  $R > 2/\sqrt{L/C}$ ,  $R > 2\rho$ ;
3.  $R^2 / 4L^2 = 1/LC$  або  $R = 2/\sqrt{L/C}$ ,  $R = 2\rho$ ;

де  $R$  – активний опір (втрат),  $\rho$  – хвильовий (характеристичний) опір кола.

Якщо  $R < 2\rho$ , то коло називається колом з малим згасанням, якщо  $R > 2\rho$  – колом з великим згасанням.

Визначимо розмірність члена  $\sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$ :

$$\begin{aligned} [\sqrt{Om^2 / Gn^2 - 1 / Gn \cdot \Phi}] &= [\sqrt{Om^2 / Om^2 \cdot c^2 - (1 / Om \cdot c) \cdot (A \cdot c / AOm)}] = \\ &= [\sqrt{1/c^2 - 1/c^2}] = [1/c] \end{aligned}$$

Розмірність  $1/c$  є розмірністю частоти  $\omega$ . Оскільки рівняння (7.18) описує вільні процеси у контурі, то отримана частота  $\omega$  є кутовою частотою вільних коливань, тобто коливань, які відбуваються у контурі, який не має зовнішнього джерела.

1. Коли  $(1/LC) > (R^2 / 4L^2)$ , підкореневий вираз є від'ємним і тоді:

$$\begin{aligned} \sqrt{(R^2 / 4L^2) - (1/LC)} &= \sqrt{(-1)(1/LC - R^2 / 4L^2)} = \\ &= j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = j\omega_0. \end{aligned}$$

де  $2L/R = \tau_K$  – є, як відомо з першої частини курсу, сталою часу контуру.

Тоді вираз (7.17) перепишеться у вигляді:

$$K_{1,2} = -\frac{1}{\tau_K} \pm j\omega_0. \quad (7.19)$$

Якщо у розв'язок (7.18) замість  $K_1$  і  $K_2$  підставити вираз (7.19), з граничних умов  $U_C(0) = U_C(-0)$  (через неможливість зміни напруги стрибком на конденсаторі) та  $i(0) = i(-0)$  (через неможливість зміни

струму стрибком у котушці індуктивності), визначити сталі  $A_1$  та  $A_2$ , то після досить громіздких алгебричних перетворень, отримаємо:

$$u_C = U_0 e^{-t/\tau_K} \sin(\omega_g t + \varphi), \quad (7.20)$$

де  $U_C$  – миттєва напруга на конденсаторі у довільний момент  $t$  після комутації,

$U_0$  – напруга на конденсаторі до комутації;

$\omega_g$  – кутова частота вільних коливань;

$\varphi$  – початкова фаза вільних коливань, яка визначається з виразу  $\varphi = \omega_g \cdot \tau_K$ .

Вираз (7.20) показує, що напруга на конденсаторі є “згасаючою синусоїдою” (рис. 7.8,а).

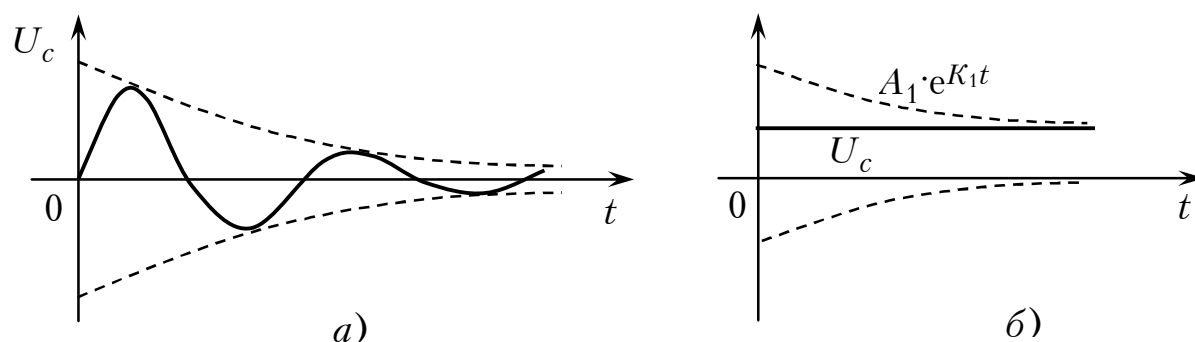


Рисунок 7.8 – Графік перехідних напруг: а) – при малих, б) – великих згасаннях

2. Коли  $(R^2 / 4L^2) > (1/LC)$  або  $R < 2\rho$ , то корені характеристичного рівняння виявляються дійсними і різними. Добротність кола при цьому  $Q < 0,5$ , а вільна складова змінюється за законом, близьким до експоненціального (точно:  $U_C = A_1 e^{K_1 t} + A_2 e^{K_2 t}$ ), де  $K_{12}$  – дійсні корені характеристичного рівняння (рис. 7.8,б).

3. Коли  $(R^2 / 4L^2) = (1/LC)$  або  $R = 2\rho$ , корені виходять дійсними і однаковими:  $K_1 = K_2 = 1/\tau_K$ . Добротність при цьому дорівнює 0,5, а режим називається критичним, тобто між періодичним (коливальним) при  $R < 2\rho$  і неперіодичним (неколивальним) при  $R > 2\rho$ .

### 7.6 Перехідні процеси в $RLC$ -колі при дії на нього прямокутних відеоімпульсів

Розглянемо процеси у колі з  $RLC$  при дії на нього напруги прямокутної форми (рис. 7.9). Наявність джерела напруги прямокутної форми рівносильна підімкненню джерела постійної напруги без змінення опору кола. Напруга на конденсаторі при цьому складається з вимушеної і вільної напруг, тобто  $U_C = U_{C_{вим}} + U_{C_{в}}$ .



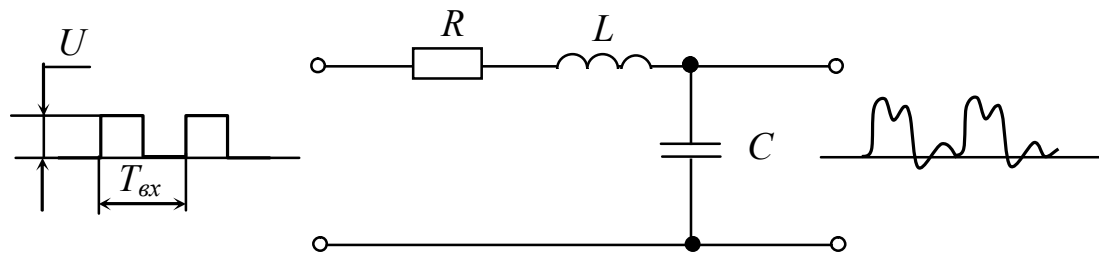


Рисунок 7.9 – Схема досліджуваних процесів

Оскільки у вимушеному режимі  $Z_L = 0$ ,  $Z_C = \infty$ , то  $i_{вим} = 0$ ,  $U_{R_{вимт}} = U_{L_{вимт}} = 0$ ,  $U_{C_{вимт}} = U$ . Отже, вимушена складова напруги на конденсаторі повторює форму напруги діючого джерела і має також прямокутну форму. Але до вимушеної напруги додається вільна складова, яка має, як було показано вище, коливальний характер зі згасаючою амплітудою. Таким чином, якщо напруга на вході має форму, показану на рис. 7.10,а, то при малих згасаннях кола вихідна напруга буде відмінною від форми вхідної (рис. 7.10,б) напруги, тобто у колі з'являється спотворення, причому вони виявляються тим помітнішими, чим більша добротність кола. При збільшенні опору  $R$  добротність упаде, число вільних коливань зменшиться, повторення теж зменшаться.

Щоб форма вихідної напруги повторювала форму вхідної і спотворень не було (рис. 7.10,в), необхідно виконати умову  $R = 2\rho$ , режим у цьому випадку стає критичним.

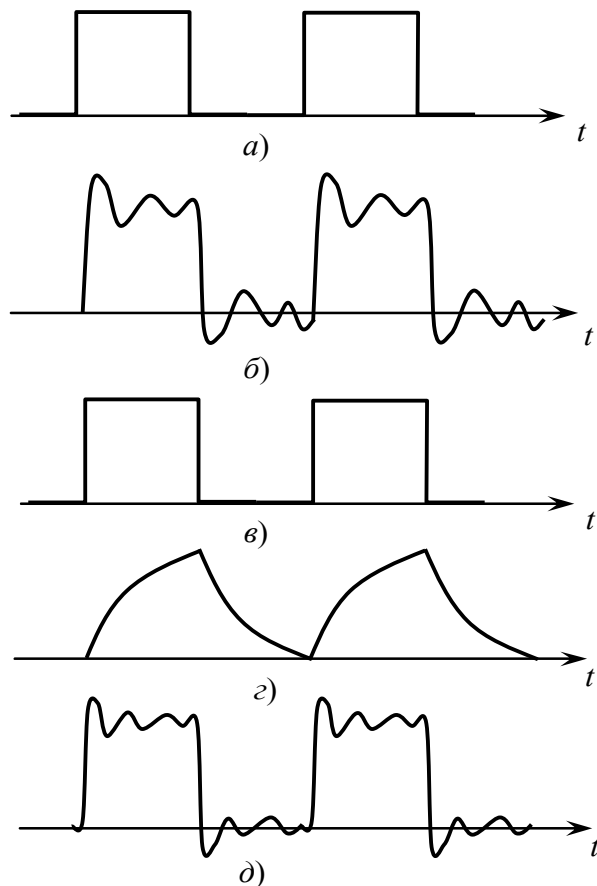


Рисунок 7.10 – Можливі форми вихідної напруги у  $RLC$ -колі (рис. 7.9)

При подальшому збільшенні опору  $R$  режим стає аперіодичним, вихідна напруга набуває форму рис. 7.10,з, спотворення знову збільшуються, але мають інший характер – не коливальний, як при великих добротностях, а форму “розтягнутих” фронтів.

Для забезпечення хорошої вибірності у вимушеному режимі контур повинен мати високу добротність. Але чим вища добротність, тим більші спотворення у перехідному режимі. Оскільки передавання інформації відбувається переважно у перехідних режимах, то вибирати параметри кола для неспотвореного передавання, приходиться з міркувань малих спотворень.

Після крутих фронтів у вхідній напрузі у колі можуть виникати коливання, які продовжуються “контуром”, який складається з паразитної ємності та індуктивності з’єднувальних провідників (рис. 7.10,д). Ще можуть виникнути коливання у контурі, який складуть паразитна індуктивність та паразитна (монтажна) ємність. Ці коливання через малі значення паразитних параметрів будуть ще більш високочастотними.

### 7.7 Перехідні процеси в $RLC$ -колі при дії на нього прямокутних радіоімпульсів

Повернемося до схеми рис. 7.9, на вході якої діятиме послідовність прямокутних радіоімпульсів з частотою заповнення  $\omega$ . Наявність джерела сигналу такої форми рівносильна підмиканню генератора гармонічної напруги з частотою  $\omega$  без зміни опору кола. Напруга на конденсаторі складатиметься з двох складових – вимушеної і вільної  $U_C = U_{C_{вим}} + U_{C_{в}}$ .

Вимушена складова є напругою з постійною амплітудою  $U_{C_{м}}$  і частотою  $\omega$ :  $U_{C_{вим}} = U_{C_{м}} \sin \omega t$ , вільна складова є напругою зі згасаючою амплітудою та частотою вільних (власних) коливань  $\omega_в$ :

$$U_{C_{в}} = -U_{C_{м}} e^{-t/\tau} \sin \omega_в t.$$

Знак “мінус” у цьому виразі означає, що у момент  $t = 0$ , згідно з другим законом комутації:

$$U_C(+0) = U_C(-0) = 0,$$

тобто вільна складова є гармонічною напругою, зсунутою відносно вимушеної складової на  $180^\circ$ , завдяки чому у перший момент перехідного режиму сума:

$$U_{C_{вим}}(0) + U_{C_{в}}(0) = 0.$$

Розглянемо два випадки: перший, коли частота генератора (вимушених коливань)  $\omega$  дорівнює частоті власних коливань контуру; другий, коли ці частоти – не рівні між собою.

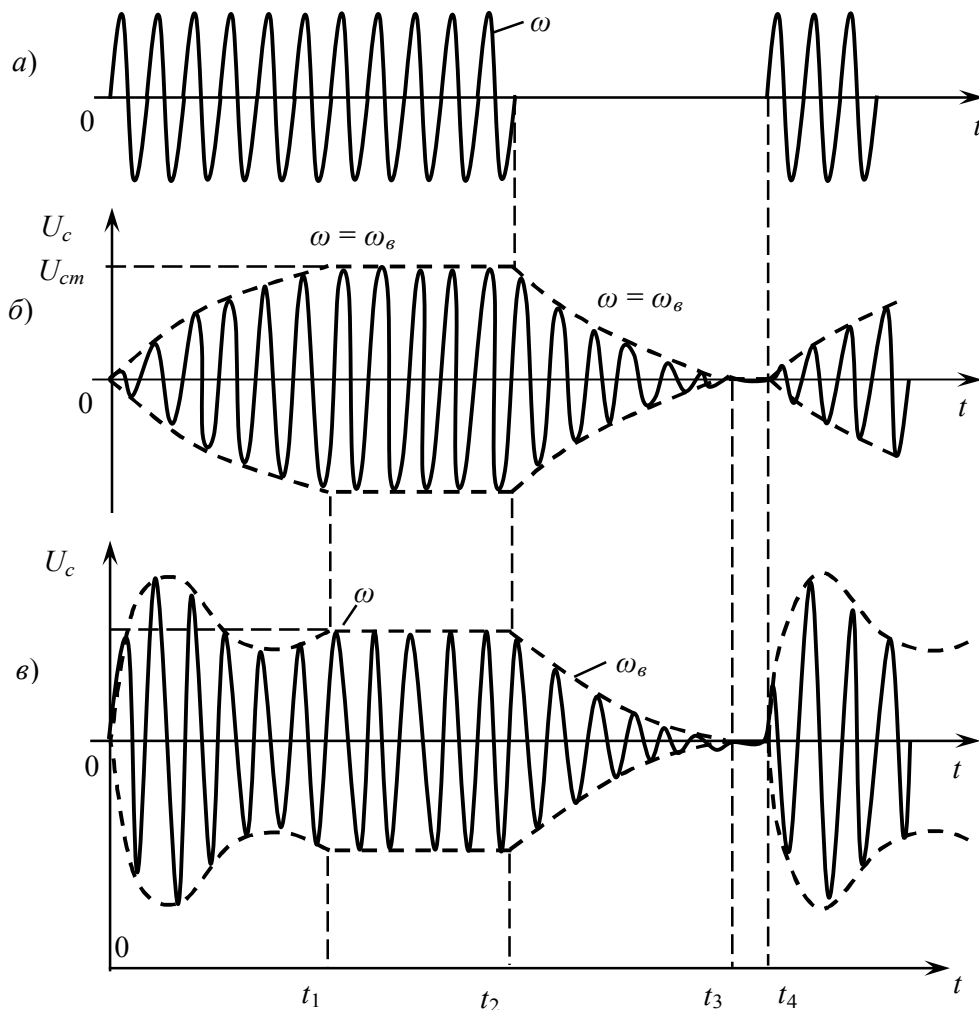


Рисунок 7.11 – Форми вихідної наруги в  $RLC$ -колі при дії на вході радіоімпульсу

1. Частота  $\omega = \omega_\epsilon$  (випадок настроеного контуру). Тоді напруга на конденсаторі:

$$U_C = U_{C.M}(1 - e^{-t/\tau}) \cdot \sin \omega_\epsilon t,$$

тобто амплітуда гармонічних коливань на конденсаторі буде наростати за експоненціальним законом (рис. 7.11б) до практичного закінчення перехідного процесу у момент  $t_1$ . Уявна лінія (пунктирна), яка з'єднує амплітудні значення коливань, називається **обвідною**. До моменту  $t_2$  у контурі буде коливальний процес зі сталою амплітудою  $U_{C.M}$  і частотою вільних коливань  $\omega_\epsilon$ . Момент  $t_2$  рівноцінний моменту відмикання джерела від кола. У колі протікатимуть вільні коливання  $U_C = -U_{C.M}e^{-t/\tau} \sin \omega_\epsilon t$ , які через  $(3...5)\tau$  згаснуть до нуля у момент  $t_3$ .

2. Частота  $\omega \neq \omega_\epsilon$  (випадок розстроеного контуру). У цьому випадку результуюча напруга на конденсаторі:

$$U_C = U_{C.M} \sin \omega t - U_{C.M} e^{-t/\tau} \sin \omega_\epsilon t.$$

Коли частоти  $\omega$  і  $\omega_0$ , будуть близькими, що як раз і зустрічається у радіотехнічній практиці, то у колі виникнуть биття (рис. 7.11,в). Обвідна буде низькочастотною (з частотою  $(\omega - \omega_0)/2$ ), згасаючою до нуля гармонікою за час  $t_1 = (3...5)\tau$  і з частотою  $(\omega + \omega_0)/2$ . На інтервалі часу  $t_1...t_2$  у контурі будуть тільки вимушені коливання з частотою  $\omega$  і амплітудою  $U_{C.M.}$ . У момент  $t_2$  примусова сила зникає і контур переходить у режим вільних згасаючих коливань ( $t_3 - t_2 = (3...5)\tau$ ) з частотою  $\omega_0$ .

На практиці часто приходиться зустрічатися з випадками, коли радіоімпульс діє послідовно на декілька однакових коливальних контурів. Прикладом такої системи може бути резонансний підсилювач коливань високої частоти. У ньому коливальні контури розділені електронними приладами (транзисторами, наприклад) і практично не мають безпосереднього зв'язку між собою. Тому можна говорити про послідовне проходження радіоімпульсу через перший, потім другий, третій і т.д. коливальні контури. При цьому, якщо на перший контур діє прямокутний імпульс, то на другий – імпульс з обвідною, яка має експоненціальний характер фронтів. Спотворення імпульсу із проходженням через нові контури зростають. Змінення форми обвідної у цьому випадку ілюструється рис. 7.12.

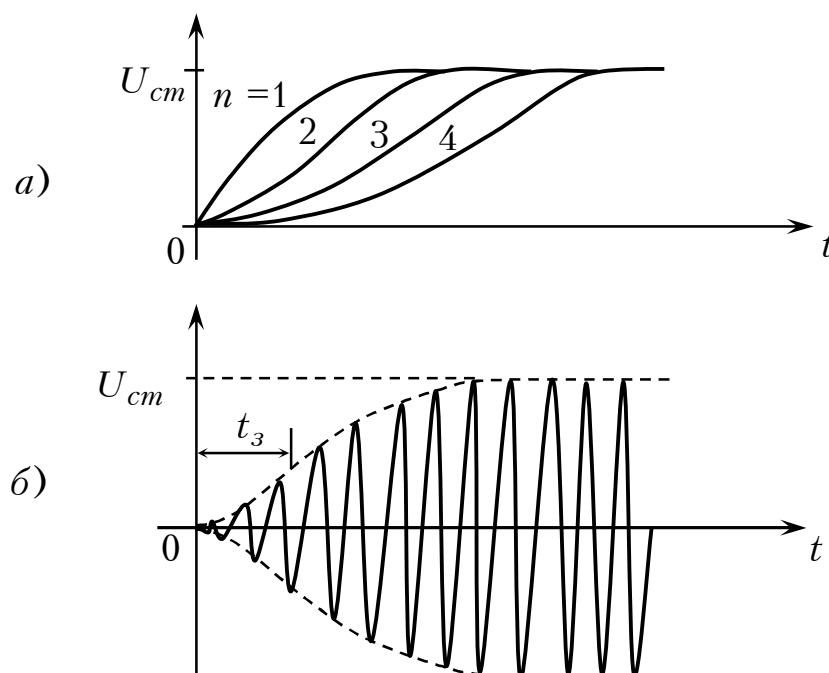


Рисунок 7.12 – Вид обвідної: а) – на виході першого, другого і т.д. контурів, б) – напруги на виході другого контуру

Як бачимо, спостерігається ніби запізнення обвідної (так зване *групове запізнення*), яке зростає із віддаленням від входу системи. Визначаючи час запізнення  $t_3$  як інтервал між моментом початку дії

імпульсу на вході системи і моментом, у який крутість обвідної досягає максимального значення, можна отримати таке співвідношення:

$$t_3 = \frac{n-1}{n \cdot \Delta f_{np}},$$

де  $n$  – порядковий номер контура, починаючи з другого;

$\Delta f_{np}$  – смуга пропускання кожного контуру;

$t_3$  – час запізнення сигналу на виході  $n$ -го контуру.

Запізнення сигналу визначається величиною фазових зсувів, які набувають гармонічні складові сигналу у кожному з контурів. Ці разові зсуви додаються, що призводить до зростання часу запізнення зі збільшенням числа контурів. Розширення смуги пропускання (зниження добротності) супроводжується зменшенням фазових зсувів у кожному контурі, а, отже, і часу запізнення. Таким чином, ширина смуги пропускання вирішально впливає на змінення форми радіосигналу при проходженні його через коливальну систему і на величину часу групового запізнення. Розширення смуги пропускання сприяє зменшенню спотворень обвідної і часу її запізнення.

### 7.8 Одинична функція та перехідна характеристика кола

Одиничною функцією (функцією Хевісайда) називається стрибкоподібне змінення напруги від 0 до 1 (рис. 7.13,а). Одиничну функцію позначають  $\tau(t)$  або  $1(t)$ . Фізично підімкнення кола до джерела постійної напруги 1 В є дія у вигляді одиничної функції. Наприклад, якщо у колах рис. 7.1 чи рис. 7.7 вхідну напругу  $E$  покласти рівною 1В, то замикання ключа і є підімкненням кола до джерела з одиничним значенням, тобто одиничної функції. Строго кажучи, слід говорити “Підімкнути коло до джерела з дією у вигляді одиничної функції”, проте на практиці кажуть коротше: “Подати одиничну функцію”, “Підімкнути одиничну функцію” і т. ін.

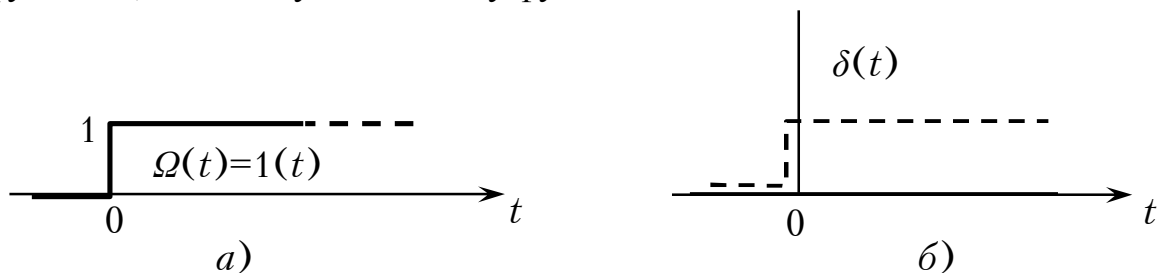


Рисунок 7.13 – Графіки функцій: а) – одиничної, б) – імпульсної

Усі ці стилістичні спрощення означають підімкнення кола до джерела постійної напруги зі значенням 1 В (чи будь-яким іншим значенням, прийнятим за одиницю). Таким чином одинична функція у часовому вигляді записується  $\tau(t) = 1$ .

Перехідною характеристикою кола за напругою  $K(t)$  називають закон, за яким змінюється вихідна напруга кола при одиничній функції на вході. Отже, щоб визначити перехідну характеристику кола, слід будь-яким чином розрахувати вихідну напругу при підімкненні кола до постійної напруги зі значенням  $U$ , а потім покласти цю напругу рівною 1.

Приклад. Визначити перехідну характеристику кола рис. 7.14,а.

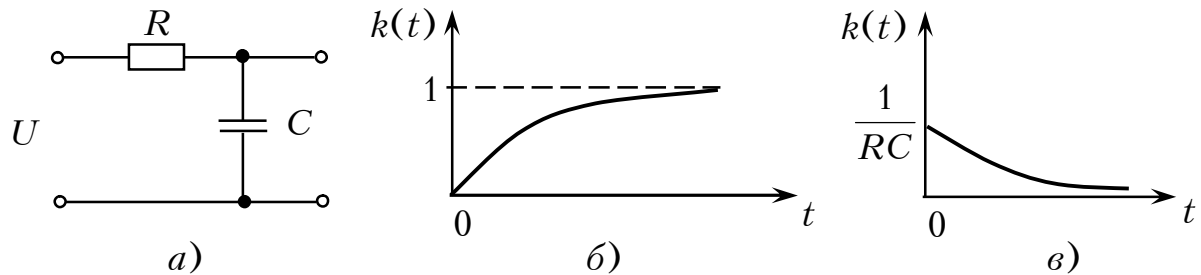


Рисунок 7.14 – Визначення перехідної характеристики кола: а) – схема кола, б) – перехідна характеристика, в) – імпульсна характеристика

При підімкненні даного кола до постійної напруги  $U$  вихідна напруга  $U_C$  визначається, як було з'ясовано раніше, з виразу:

$$U_C = U(1 - e^{-t/RC}).$$

Якщо покласти  $U = 1$ , то вийде перехідна характеристика

$$K(t) = 1 - e^{-t/RC}.$$

## 7.9 Імпульсна функція та імпульсна характеристика кола

Імпульсною функцією (дельта-функцією)  $\delta(t)$  називається похідна у часі від одиничної функції, тобто

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} = \frac{d\tau(t)}{dt}.$$

Розберемось у формі дельта-функції. До моменту 0 одинична функція дорівнювала нулю, похідна, а отже і імпульсна функція, також дорівнювала нулю. У момент  $t = 0$  одинична функція стрибком змінює своє значення, при цьому дотична до  $1(t = 0)$  є перпендикулярною до осі абсцис, а тангенс кута її нахилу відповідно дорівнює нескінченності. Дельта-функція набуває нескінченно великого значення. Але через нескінченно малий час тангенс кута нахилу знову зменшується до нуля, отже, через  $\Delta t = 0$  дельта-функція спадає до нуля (рис. 7.13,б).

Підрахуємо площу  $\delta$  – функції. Оскільки  $\delta(t) = d[1(t)]/dt$ , то:

$$\int \delta(t) \cdot dt = 1,$$

що є цілком зрозумілим, виходячи зі зв'язку між  $1(t)$  та  $\delta(t)$ .

Таким чином, імпульсна функція – імпульсний сигнал з нескінченно великою амплітудою, нескінченно малою тривалістю та площею, рівною 1.

Імпульсна характеристика кола  $h(t)$  зображає закон змінення вихідної напруги, якщо напруга на вході зображає імпульсну функцію  $\delta(t)$ .

Оскільки імпульсна функція – похідна у часі від одиничної функції, то імпульсна характеристика кола  $h(t)$  – похідна у часі від перехідної характеристики  $K(t)$ , тобто

$$h(t) = \frac{d}{dt}[K(t)].$$

*Приклад.* Визначити імпульсну характеристику кола рис. 7.14,*а*. На вході кола діє дельта-функція, вона породжує на виході напругу, закон змінення якої і є імпульсною характеристикою, яка дорівнює:

$$h(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-t/RC}) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}.$$

На рис. 7.14,*б, в* зображені графіки перехідної та імпульсної характеристики кола рис. 7.14,*а*.

## 8 ПРОХОДЖЕННЯ СИГНАЛІВ ЧЕРЕЗ ЛІНІЙНІ КОЛА

### 8.1 Диференціювальні кола

Диференціювальними колами називаються чотириполіусники, миттєва напруга на виході  $U_2(t)$  яких пропорційна похідній у часі від миттєвої напруги на вході  $U_1(t)$ . Як пасивні диференціювальні кола на практиці найчастіше використовують  $RC$  – ланки (рис. 8.1,б). Покажемо, що коли у такому колі  $R \ll X_C$ , то воно є практично диференціювальним колом.

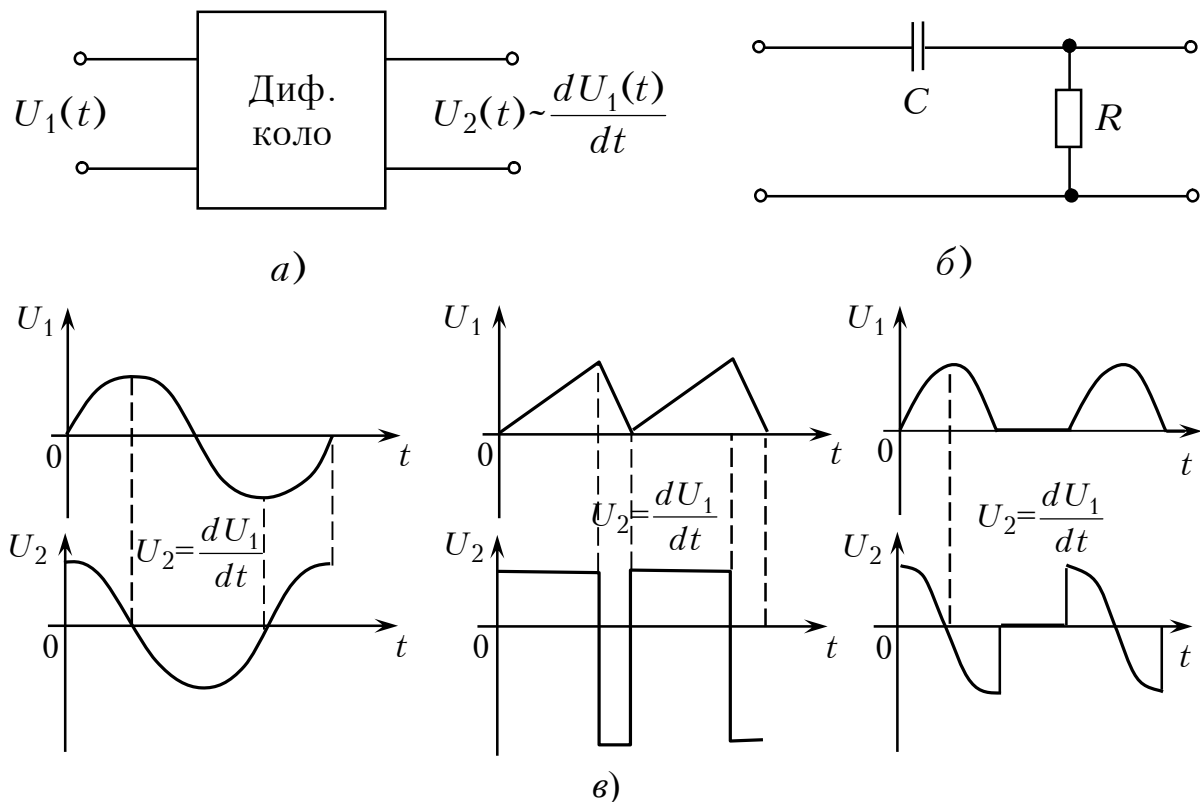


Рисунок 8.1 – Пасивні диференціювальні кола: а) – диференціювальний чотириполіусник; б) –  $RC$  диференціювальна ланка; в) – графіки вхідних  $U_1$  і вихідних  $U_2$  сигналів у диференціювальній  $RC$ -ланці при ідеальному диференціюванні

За другим законом Кірхгофа  $U_1 = U_C + U_R = U_C + R \cdot i$ . У колі з конденсатором  $i = C(dU_C / dt)$ . Якщо  $X_C \gg R$ , то  $U_C \gg U_R$ , і тоді  $U_1 \approx U_C$ , а вихідна напруга:

$$U_2 = R \cdot i = RC \frac{dU_C}{dt} \approx RC \frac{dU_1}{dt} = \tau \frac{dU_1}{dt}. \quad (8.1)$$

Очевидно, що ідеальне диференціювання могло б бути якби  $U_1 = U_C$ , але це можливо лише при  $R = 0$ . Але при цьому вихідна напруга дорівнювала б 0 і коло втратило б усякий зміст. Таким чином, чим менший



опір  $R$  у порівнянні з опором  $X_C$ , тим ближче вихідна напруга до похідної у часі від вхідної напруги, але тим менший коефіцієнт передачі кола і відповідно менше значення вихідної напруги. Оскільки ідеальне диференціювання неможливе, установлюють критерії, що показують, які кола практично можна вважати диференціальними. Таким критерієм є умова, що  $R \leq 0,1X_C$  і тоді

$$R \leq \frac{0,1}{2\pi f C} = \frac{1}{20\pi f C} \quad (8.2)$$

або

$$\tau \leq \frac{1}{20\pi f}, \quad (8.3)$$

де  $\tau = RC$  – стала часу диференціального кола.

Оскільки період  $T = 1/f$ , то вираз (8.2) можна подати так

$$\tau \leq T/20\pi \approx 16 \cdot 10^{-3} T. \quad (8.4)$$

Комплексний коефіцієнт передачі кола за напругою у колі рис. 8.1,б дорівнює відношенню комплексної амплітуди вихідної напруги

$$\dot{U}_2 = \frac{R}{R + 1/j\omega C} \dot{U}_1$$

до комплексної амплітуди вхідної напруги  $\dot{U}_1$ :

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}}. \quad (8.5)$$

Виходячи із співвідношення  $R \leq X_C$ ,  $X_C = 1/\omega C$ , то гранична частота сигналу, при якій забезпечується практично диференціювання буде дорівнювати:

$$\omega_{zp} RC \leq 0,1; \quad \omega_{zp} = \frac{0,1}{RC} = \frac{0,1}{\tau}. \quad (8.6)$$

Таким чином, якщо частота вхідного сигналу не перевищуватиме значення  $0,1/\tau$ , то можна вважати, що для сигналів усіх частот  $\omega \leq \omega_{zp}$ , задане  $RC$  – коло є диференціальним. При цьому коефіцієнт передачі за напругою на підставі виразу (8.5) дорівнюватиме:

$$K_{KP} = \frac{1}{\sqrt{1+10^2}} \approx \frac{1}{10} = 0,1$$

і це його значення є найбільшим.

Усякий реальний сигнал є спектром частот. Очевидно, щоб коло було диференціовальним для сигналу заданої форми, необхідно, щоб умова (8.5) виконувалась для найбільшої високочастотної складової спектра; у цьому випадку для низькочастотних складових умови диференціювання будуть виконуватись тим більше, тобто

$$\omega_B \leq 0,1/\tau. \quad (8.7)$$

Якщо на вході кола рис. 8.1,б діє послідовність прямокутних відео-імпульсів, то такий сигнал, як це було показано у підрозділі 5.3, зображає ряд Фур'є обмежений  $k$ -ою гармонікою (вираз 5.5):

$$U(t) = U_0 + U_{1m} \cos \Omega t + U_{2m} \cos 2\Omega t + \dots + U_{Km} \cos K\Omega t, \quad (8.8)$$

де  $K = 2q$  ( $q$  – шпаруватість послідовності),

$f_B = 2/t_i$  – частота цієї найвищої гармоніки спектра

де  $t_i$  – тривалість імпульсів у послідовності.

Переписавши останню формулу у вигляді:

$$\omega_B = 2\pi f_B = 4\pi / t_i \quad (8.9)$$

і врахувавши (8.6), отримаємо:  $\tau \leq 0,016t_i$ .

Таким чином, вихідний сигнал практично буде дорівнювати першій похідній у часі від вхідного, коли стала часу диференціовального кола (диференціовальної  $RC$ -ланки) рис. 8.1,б не перевищуватиме 2% від тривалості імпульсу у послідовності, яка діє на вході кола.

Для визначення форми сигналу на виході диференціовального кола необхідно графічно побудувати графік похідної від заданого вхідного сигналу. Похідна, як відомо – це величина, пропорційна тангенсу кута нахилу між дотичною, проведеною у даній точці графіка вхідної функції  $U_1$ , і віссю часу. Отже, для побудови кривої  $U_2$ , яка отримується на виході чотириполюсника, потрібно у декількох точках кривої напруги, підведеної до входу диференціовального кола, провести дотичні і побудувати криві, миттєві значення яких пропорційні тангенсу кута нахилу. Приклади таких кривих показані на рис. 8.1,в.

Якщо напруга на вході кола зростає стрибком, то струм в  $RC$  – колі, а отже, і вихідна напруга  $U_R$  зростатимуть також стрибком. Але при стрибкоподібному зменшенні напруги конденсатор розряджається за експоненціальним законом, причому чим більша стала часу кола, тим повільніше розряджається конденсатор і тим крива на виході більше відрізняється від похідної у часі.

На рис. 8.2,а показаний вхідний сигнал  $RC$  – диференціовального кола – послідовність прямокутних імпульсів тривалістю  $t_i$ .

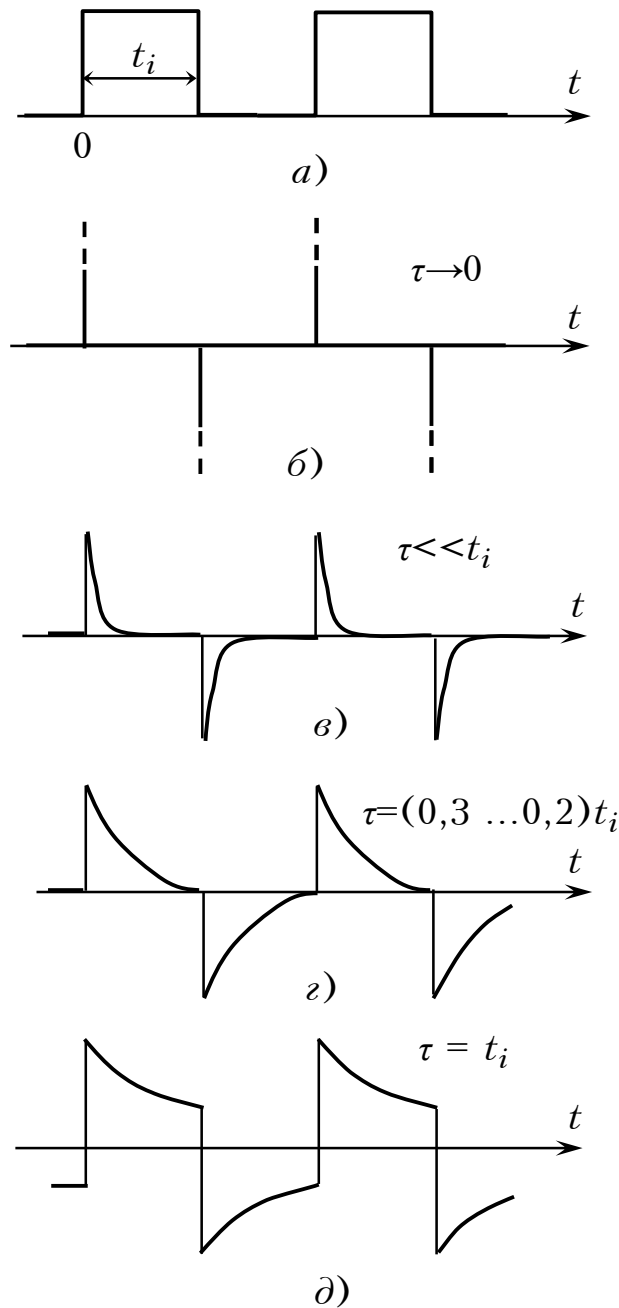


Рисунок 8.2 – Форми вихідних сигналів в диференціальній  $RC$ -ланці при дії на вході послідовності прямокутних імпульсів

На рис. 8.2,б зображено графік ідеальної похідної – імпульси тривалістю 0 і з амплітудами нескінченно великими.

На рис. 8.2,в зображено форму вихідної напруги при практичному диференціюванні.

На рис. 8.2,г показано випадок, коли струм у колі протікає практично протягом  $t = (3 \dots 5)\tau = t_i$  - тривалості вхідного імпульсу.

На рис. 8.2,д за час тривалості імпульсу струм (і вхідна напруга) зменшиться лише до 0,37 свого початкового значення.

Якщо збільшувати опір  $R$  чи ємність  $C$ , то стала часу  $\tau$  буде зростати, ємнісний опір  $X_C$  у порівнянні з резистивним буде зменшуватись, характер опору кола буде наближатися до резистивного, форма вихідної напруги – наближатиметься до форми вхідної. Таке коло називається *розділювальним*.

Розділювальне коло пропускає сигнал без помітних спотворень і тільки виконує функцію розділення змінної і постійної складових.

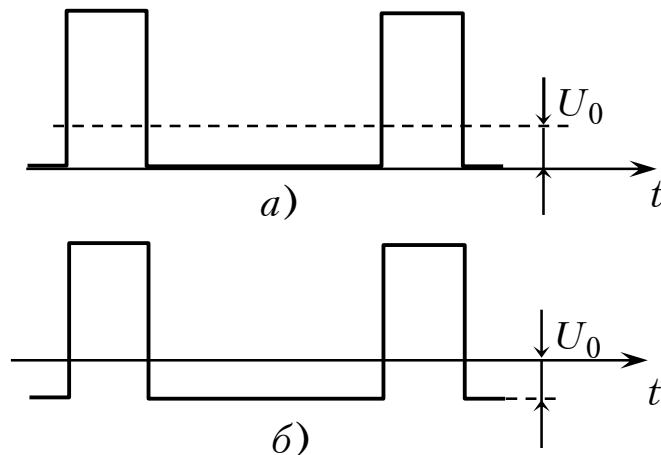


Рисунок 8.3 – Форма напруги у розділювальній  $RC$ -ланці:  
а) – вхідної, б) – вихідної

На рис. 8.3 показані вхідна та вихідна напруги розділювальної  $RC$ -ланки. Такі ланки використовуються для зв'язку між підсилювальними каскадами змінної напруги і тому ще називаються перехідними.

Дійсно, після проходження послідовності імпульсів рис. 8.3,а, спектр якої є, наприклад, ряд Фур'є (8.7), на виході буде відсутньою лише постійна складова  $U_0$ , для якої опір конденсатора є нескінченно великим. Тому діюча на вході постійна напруга  $U_0$  розділиться так на елементах резистивно–ємнісного діляника: на конденсаторі –  $U_0$ , а на резисторі – 0.

Таким чином, коли в  $RC$ -колі стала часу  $\tau \leq 0,016t_i$  (або  $\tau \leq 0,16 / f_B$ , де  $f_B$  – верхня частота спектра сигналу), то таке коло є практично диференціувальним; коли ж стала часу  $\tau \geq 1,6t_i$  (або  $\tau \geq 16 / f_H$ , де  $f_H$  – нижня частота спектра сигналу), якою є фактично частота 1-ої гармоніки спектра, тобто частота повторення імпульсів, то таке коло є розділювальним (перехідним) колом.

## 8.2 Інтегрувальні кола

*Інтегрувальними* називаються чотириполюсники, миттєві значення напруг яких на виході пропорційні інтегралу від вхідної напруги (рис. 8.4,а).

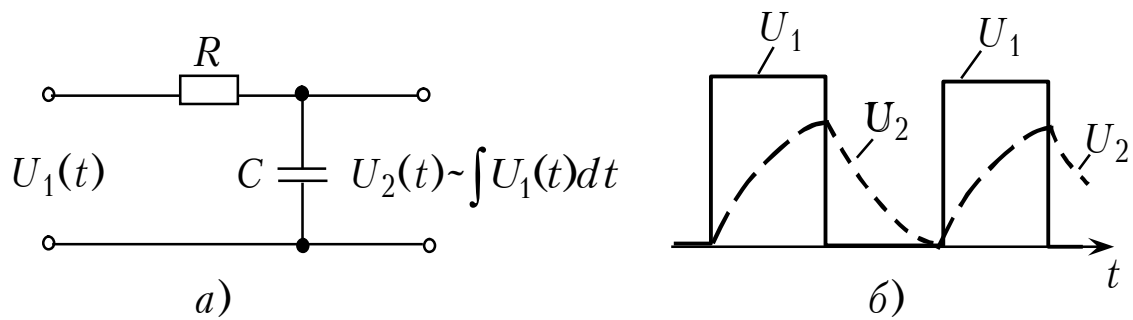


Рисунок 8.4 – Інтегровальний чотиріполюсник: а) – схема чотиріполюсника, б) – форма напруги на його полюсах

Покажемо, що  $RC$ -коло (рис. 8.4,а), у якому  $R \gg X_C$ , є інтегровальним. За другим законом Кірхгофа  $U_1 = U_R + U_C$  якщо  $R \gg X_C$ , то  $U_2 \ll U_R$ , при цьому  $U_1 \approx U_R$  або  $i \approx U_1/R$ . Вихідна напруга  $U_2 = U_C$ , але

$$U_C = \frac{1}{C} \int i dt \approx \frac{1}{C} \int \frac{U_1}{R} dt = \frac{1}{RC} \int U_1 dt = \frac{1}{\tau} \int U_1 dt,$$

отже, в  $RC$ -колі при  $R \gg X_C$ :

$$U_2(t) = \frac{1}{\tau} \int U_1 dt. \quad (8.9)$$

Ідеальне інтегрування може бути, якщо  $U_R = U_1$ , тобто при коефіцієнті передачі, рівному нулю, що втрачає фізичний зміст. Практично хороше інтегрування виявляється при  $R \geq 10X_C$  або  $R \geq 10/2\pi f_H C$ ,  $RC = \tau \geq 1,6/f_H = 1,6T$ , де  $f_H$  і  $T$  частота 1-го гармоніки спектра вхідного сигналу,  $T$  період повторення імпульсів (рис. 8.4,б).

Очевидно, що якщо умова інтегрування виконується для першої гармоніки, то вона тим більше буде виконаною для вищих гармонік.

Вихідна напруга в інтегровальному колі має таку форму, при якій похідна у часі від вихідної напруги повторює вхідну напругу. Наприклад, якщо напруга на вході інтегровального кола має прямокутну форму, то вихідна напруга буде трикутною. Тривалість сигналів на виході інтегровального кола більша за тривалість вхідних сигналів, тому інтегровальні кола інколи називають “подовжувальними”.

Інтегровальні кола виконують різноманітні функції, наприклад, дозволяють зменшити дію імпульсних завад, через що їх ще називають “згладжувальними”. Крім того, оскільки при дії короткого імпульсу конденсатор не встигне зарядитися, а при дії довгого – зарядиться до більшої напруги, інтегровальне коло виконує роль перетворювача тривалості імпульсів у пропорційну їй амплітуду, тобто довший імпульс на виході дасть імпульс з більшою амплітудою, а більш короткий – з меншою амплітудою.

### 8.3 Проходження амплітудно-модульованих сигналів через коливальні кола

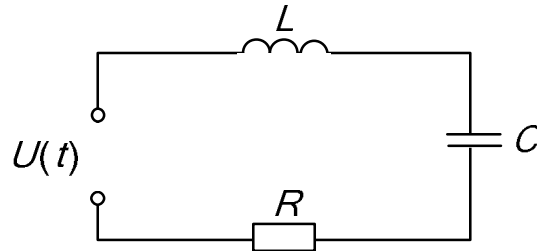


Рисунок 8.5 – Схема послідовного коливального контуру

Розглянемо особливості проходження АМ-сигналів через коливальні кола. Нехай АМ-коливання  $U = U_m(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$  з глибиною модуляції  $m$  прикладене до послідовного коливального контуру (рис. 8.5). Контур вважається настроєним на частоту несучої  $\omega_0$ .

Щоб розрахувати реакцію кола, подамо функцію  $U(t)$  виразом (3.6):

$$U(t) = U_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m U_{m0} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{1}{2} m U_{m0} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Спектральна діаграма вхідної напруги, а також частотна залежність модуля вхідної провідності контуру  $y(\omega)$  зображені на рис. 8.6, а і б.

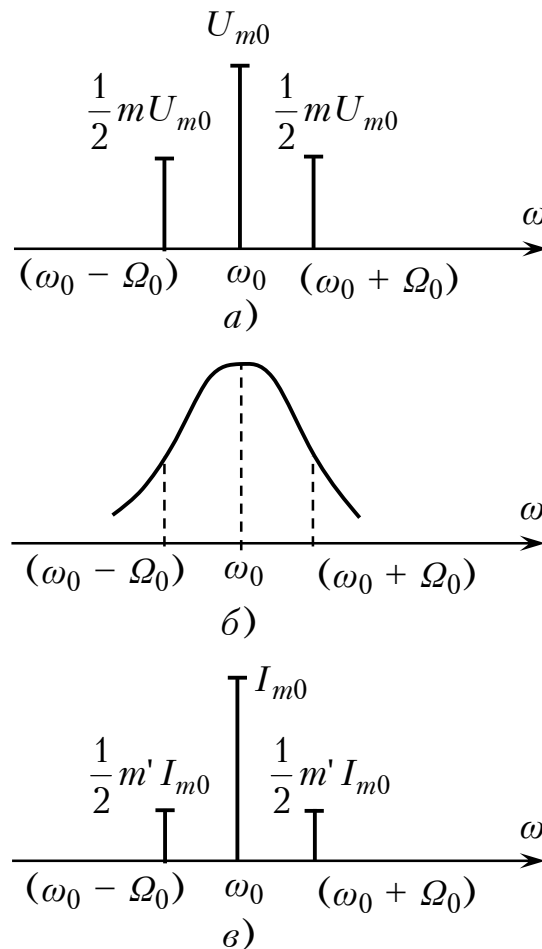


Рисунок 8.6 – Спектральні діаграми: а) – вхідної напруги, в) – контурного струму та б) – частотна залежність провідності контуру від частоти

Оскільки контур є системою лінійною, струм, який виникає у колі, також має три гармонічних складові з частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_0 + \Omega$ ,  $\omega_0 - \Omega$ . Амплітуда струму несучої частоти дорівнює  $I_{m0} = U_{m0} \cdot y(\omega_0)$ , а його миттєве значення  $i(t) = U_{m0} \cdot y(\omega_0) \cos \omega_0 t$ .

Оскільки частотна характеристика  $y(\omega)$  симетрична, то для бічних гармонік струму можна написати:

$$I_{m \text{ верх.}} = I_{m \text{ нижн.}} = \frac{1}{2} U_{m0} \cdot y(\omega_{\delta}),$$

де  $y(\omega_{\delta}) = \frac{y(\omega_0)}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\Omega}{\omega_0})^2}}$  – модуль вхідної провідності контуру при розстроюванні  $\Delta\omega = \pm\Omega$ .

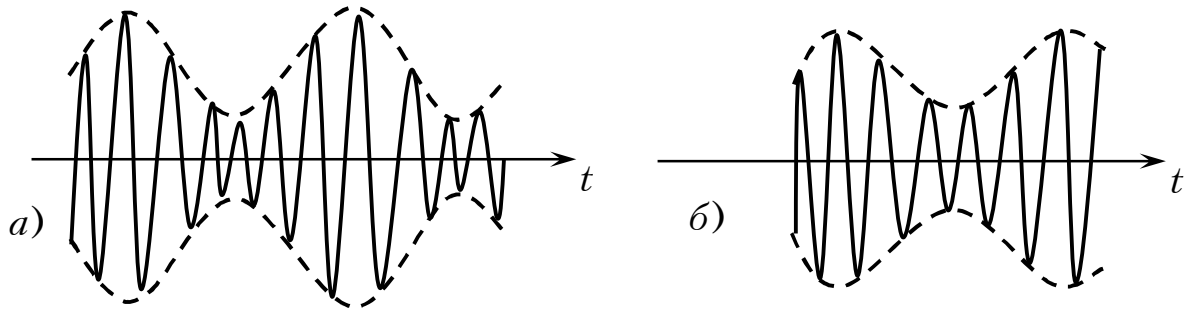


Рисунок 8.7 – а) – вхідна АМ-напряга, б) – струм у контурі

Таким чином, вираз для струму у контурі буде таким:

$$i = i(t) = I_{m0} \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m' I_{m0} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{1}{2} m' I_{m0} \cos(\omega_0 - \Omega)t, \quad (8.10)$$

звідки витікає, що обвідна струму, так само як і обвідна прикладеної до контура напруги, змінюються за гармонічним законом. Коефіцієнт

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 + (2Q \frac{\Omega}{\omega_0})^2}} \quad (8.11)$$

у рівності (8.10) є глибиною модуляції струму у контурі. З формули (8.11) видно, що  $m' < m$ , тобто глибина модуляції струму виявляється меншою ніж глибина модуляції прикладеної напруги. Чим вища вибірність контуру, тим менша  $m'$  у порівнянні з  $m$ . Це явище називається *демодуляцією*.

Спектральна діаграма струму у контурі зображена на рис. 8.8,в.

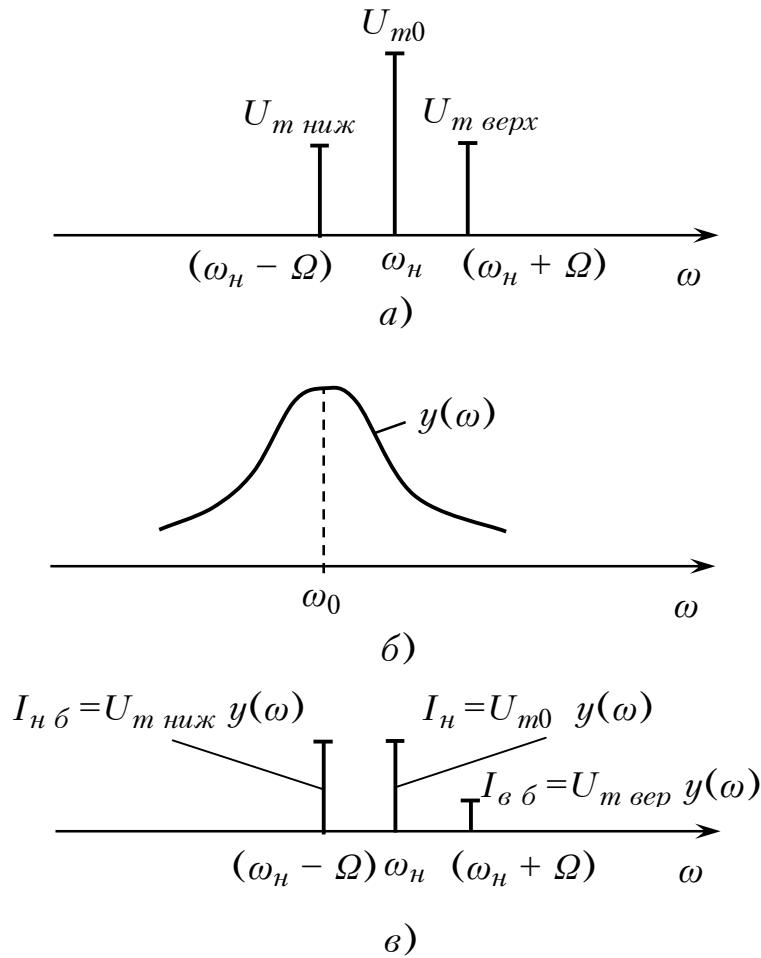


Рисунок 8.8 – Спектральні діаграми: а) – вхідної напруги, в) – контурного струму і б) – частотна залежність модуля вхідної провідності контуру, розстроєного відносно несучої частоти

Графіки миттєвих значень вхідної напруги  $U(t)$  і струму у контурі  $i(t)$  зображені на рис. 8.7.

Якщо резонансна частота контуру не збігається з несучою частотою ( $\omega_0 \neq \omega_H$ ), то характер явищ змінюється (рис. 8.8).

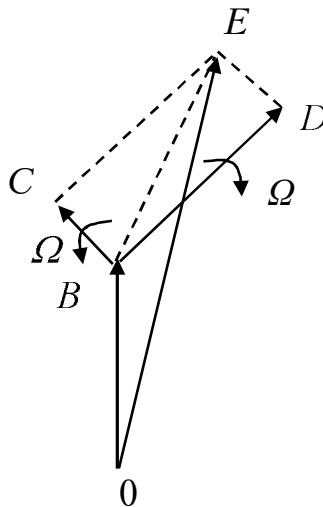


Рисунок 8.9 – Векторна діаграма



Щоб отримати більш повне уявлення про процеси у такому контурі, розглянемо векторну діаграму (рис. 8.9).

Тут  $OB = I_H = U_{m0} \cdot y(\omega)_a$  – несуча складова струму,  $BC = U_{m\text{верх}} \cdot y(\omega)$  – верхня бічна і  $BD = U_{m\text{нижн}} \cdot y(\omega)$  – нижня бічна складові струму у розстроєному контурі,  $OE$  – модуль сумарного струму.

Обертання векторів бічних частот у часі відносно вектора несучого коливання (з кутовою швидкістю  $\Omega$  у протилежних напрямках) призводить до того, що модуль сумарного вектора ( $OE$ ) буде неперервно змінюватись як за величиною, так і за напрямком. У результаті чого обвідна струму у колі спотворюється.

При передачі АМ – коливань з обмеженим спектром, що і має місце на практиці, через настроєний контур ( $\omega_0 = \omega_H$ ) спотворення реакції кола будуть незначними, якщо смуга пропускання контуру перевищуватиме максимальну частоту спектра обвідної напруги, яка діє на контур:

$$\Delta\omega_{np} \geq 2\Omega_{\max} \text{ або } \Delta f_{np} \geq 2F_{\max}.$$

Викладені міркування стосуються спотворень, які матиме струм. На практиці як реакція часто використовується напруга на реактивних елементах контуру.

Спектральні щільності напруги на конденсаторі та на котушці індуктивності з аналогічною характеристикою струму пов'язані співвідношеннями:

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I} \text{ та } \dot{U}_L = j\omega L \dot{I}.$$

Звідси виходить, що обвідна напруги  $U_C(t)$  і  $U_L(t)$  у принципі будуть відрізнятись від обвідної струму  $i(t)$ . Проте, якщо вхідна дія має вузький спектр (вузькосмуговий сигнал, що найчастіше має місце на практиці), то цими відмінностями можна знехтувати, бо множники  $\omega L$  та  $1/\omega C$  у вузькій смузі частот змінюються незначно і вважається, що

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega_0 C} = \omega L = \omega_0 L = \rho,$$

де  $\rho$ , нагадуємо, – характеристичний (хвильовий) опір контуру.

Звернемося тепер до системи двох контурів з трансформаторним зв'язком, властивості якої вивчалися у першій частині курсу. Будемо вважати, що обидва контури цієї системи є ідентичними (однаковими), а несуча частота амплітудно-модульованого сигналу дорівнює резонансній частоті системи. Можна легко передбачити, що параметри вихідної напруги будуть суттєво залежати від форми кривої залежності коефіцієнта передачі системи від частоти  $K(\omega)$ , яка, у свою чергу, залежить від ступеня зв'язку між контурами цієї системи.

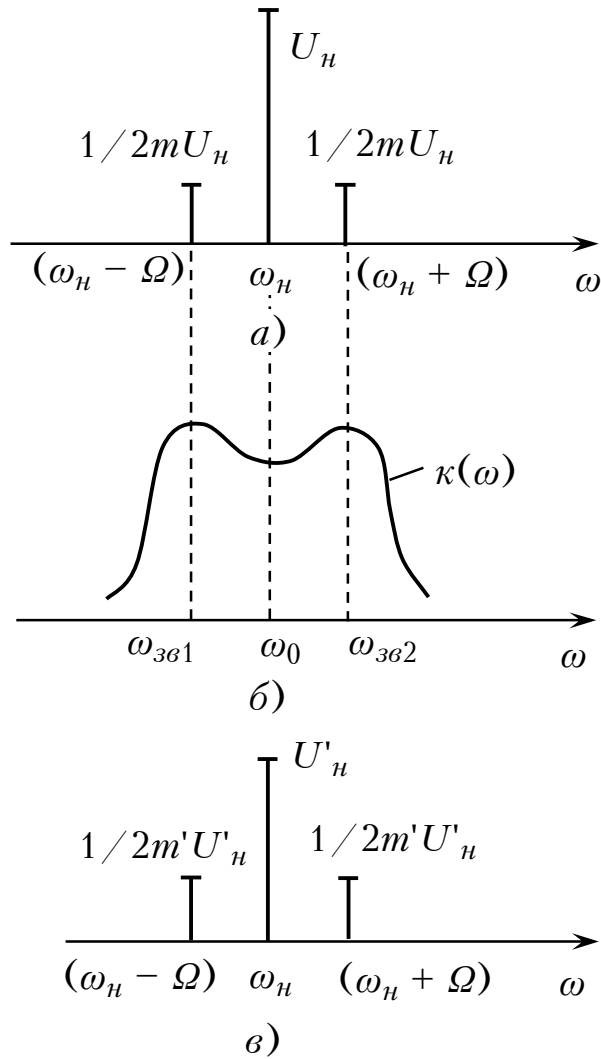


Рисунок 8.10 – Спектр АМ коливань: а) – вхідної напруги, в) – вихідної напруги і б) – залежність коефіцієнта передачі системи за напругою

При слабкому та при критичному зв'язках між контурами крива  $K(\omega)$  буде одновіршинною, реакція кола буде спотворюватися, аналогічно, як і в одиничному контурі. У випадку сильного (закритичного) зв'язку крива стає двовіршинною, як це показано на рис. 8.10,б, і характер спотворень зміниться. Так, при дії коливання із синусоїдною обвідною, спектр якого зображено на рис. 8.10,а, через “провал” (впадину) на кривій  $K(\omega)$ , що зображено на рис. 8.10,б, амплітуда несучої складової вихідної напруги  $U'_H$  буде ослабленою у порівнянні з амплітудами бічних складових  $m'U'_H/2$ . Коефіцієнт модуляції вихідної напруги  $m'$  буде більшим від коефіцієнта модуляції вхідної напруги  $m(m' > m)$ , що може призвести до перемодуляції, коли  $m'$  стане більшим за одиницю ( $m' > 1$ ). У результаті цього спотворення обвідної уже носитимуть нелінійний характер.

#### 8.4 Проходження частотно-модульованих сигналів через коливальні кола

Як нам відомо з підрозділу 6.6, ЧМ-сигнали і їх спектри, як правило, мають більш складну структуру у порівнянні з відповідними АМ-сигналами. Тому при проходженні через коливальну систему вони матимуть більші змінення.

Для розрахунку кола при дії ЧМ-сигналів скористаємось методом гармонічного аналізу, який, строго кажучи, є ефективним лише у випадку, коли вхідний сигнал є вузькосмуговим, тобто виконується умова  $\Delta\omega_m / \Delta\omega_{np} \leq 1$ , де, нагадаємо,  $\Delta\omega_m$  – девіація частоти ЧМ-сигналу.

ЧМ-сигнал, як відомо, є коливанням зі сталою амплітудою  $U_m$ . Якщо коефіцієнт передачі контуру за напругою  $K(\omega)$ , де  $\omega = \omega_H + \Delta\omega_m \cos\Omega t$  (див. вираз 6.12), то амплітуда вихідної напруги (напруги реакції кола)  $U'_m$  дорівнюватиме:

$$U'_m = U_m \cdot K(\omega) = U_m \cdot K(\omega_0 + \Delta\omega_m \cos\Omega t). \quad (8.12)$$

Таким чином, ЧМ-сигнал при проходженні через коливальне коло спотворюється: з'являється додаткова амплітудна модуляція, бо згідно з виразом (8.12)  $U'_m$  є функцією часу.

Графік змінення амплітуди коливань на виході настроєного контуру ( $\omega_H = \omega_0$ ) показано на рис. 8.11. З рисунка видно, що амплітуда вихідної напруги змінюється у часі з подвійною частотою у порівнянні з  $\Omega = 2\pi/T$ .

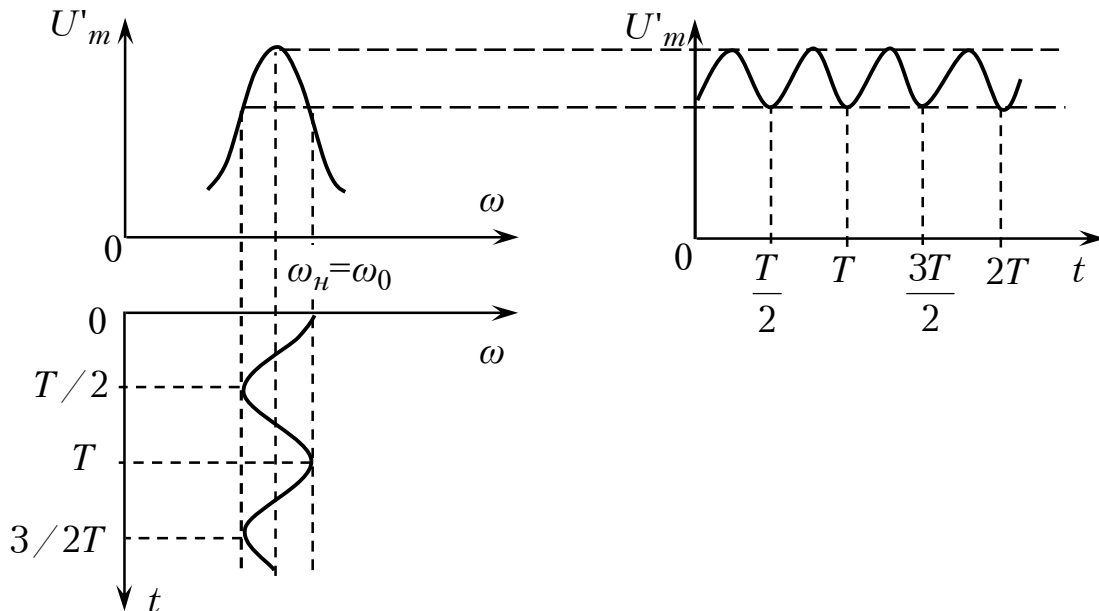


Рисунок 8.11 – Ілюстрація появи додаткової амплітудної модуляції у вихідній напрузі при дії на контур ЧМ-сигналу ( $\omega_H = \omega_0$ )

Таким чином, при проходженні ЧМ-сигналу через коливальне коло на виході у напруги з'являється паразитна амплітудна модуляція.

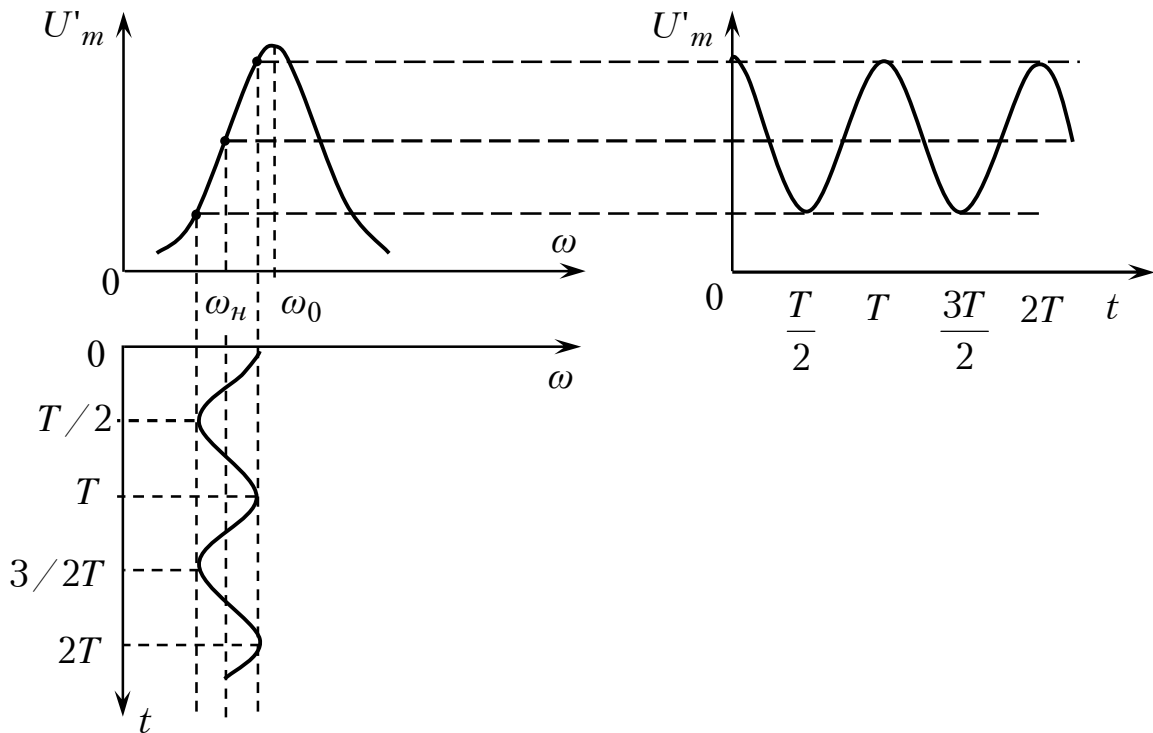


Рисунок 8.12 – Ілюстрація до перетворення ЧМ-сигналу у відповідне йому коливання модульоване за амплітудою

Дослідимо якісно, що буде, коли ЧМ-сигнал буде проходити через розстроєний контур, наприклад, коли  $\omega_H < \omega_0$ .

У цьому випадку, як бачимо з рисунка 8.12, спотворення вихідного сигналу набуває іншого вигляду. Так, якщо миттєва частота  $\omega(t)$  вхідного сигналу  $U(t)$  не виходить за межі “лінійної” ділянки резонансної кривої контуру  $U'_m(\omega)$ , амплітуда вихідної напруги  $U'_m(t)$  буде змінюватись у часі за законом, близьким до закону керуючого сигналу згідно з виразом (6.11). Це явище використовується у багатьох випадках, де необхідно чи просто доцільно перетворювати ЧМ-сигнал у відповідне коливання з амплітудною модуляцією. Наприклад, коли доцільно при детектуванні ЧМ-сигналу після такого перетворення використати амплітудний детектор.

## 9 НЕЛІНІЙНІ ПРОЦЕСИ В РАДІОТЕХНІЦІ

Усі радіотехнічні кола, які нами розглянуті раніше, відносяться до класу лінійних систем. Чудовою особливістю лінійного кола є справедливність для неї принципу суперпозиції (накладання). З цього принципу та з умови стаціонарності витікає простий і важливий наслідок – гармонічний сигнал, проходячи через лінійну систему, залишається незмінним за формою, набуваючи лише іншу амплітуду і початкову фазу.

Проте саме тому лінійна стаціонарна система нездатна збагачувати спектральний склад коливань, які подаються на її вхід. Ця обставина значною мірою звужує клас корисних перетворень сигналів, які здійснюються лінійними колами зі сталими параметрами.

Значно більші можливості у цьому відношенні мають нелінійні кола, у яких зв'язок між вхідним сигналом  $U_{\text{вх}}(t)$  і вихідною реакцією  $U_{\text{вих}}(t)$  забезпечується нелінійною функціональною залежністю.

У цьому розділі будуть розглянуті загальні закономірності, притаманні найпростішим нелінійним колам, способи їх математичного дослідження, а також деякі найважливіші види перетворень сигналів, які здійснюються за допомогою нелінійних кіл і пристроїв.

### 9.1 Зовнішні характеристики нелінійних елементів і способи їх описування

Дослідження нелінійних кіл у загальному вигляді є задачею досить складною з точки зору математичного описування їх функціонування. Тим не менше у ряді випадків дослідження нелінійних процесів вдається довести до кінця.

#### Зовнішні характеристики нелінійних елементів

Функціональну залежність  $U_{\text{вих}}(t) = f[U_{\text{вх}}(t)]$  можна розглядати як найпростішу математичну модель нелінійного елемента. Особливість її полягає у тому, що тут не фігурують процеси, які відбуваються всередині елемента. Прийнято говорити, що тут мають справу із зовнішньою характеристикою системи.

Нижче для конкретності ми розглянемо зовнішні характеристики нелінійних двополюсників, коли вхідним сигналом є напруга, а вихідним – струм  $i$  через двополюсник. Залежність  $i(U)$  прийнято називати *вольт-амперною характеристикою* (ВАХ) нелінійного елемента. Усі методи і результати можна перенести на випадок нелінійного чотириполюсника, наприклад, транзистора, який працює у нелінійному режимі, при великих амплітудах вхідного сигналу, коли зв'язок між миттєвими значеннями напруги і струму виявляється суттєво нелінійним.

Нелінійні елементи мають різноманітні зовнішні характеристики. Так, можна виділити клас елементів з однозначними вольт-амперними характеристиками (рис. 9.1,а) і клас елементів, характеристики яких мають ділянки неоднозначності (рис. 9.1,б).

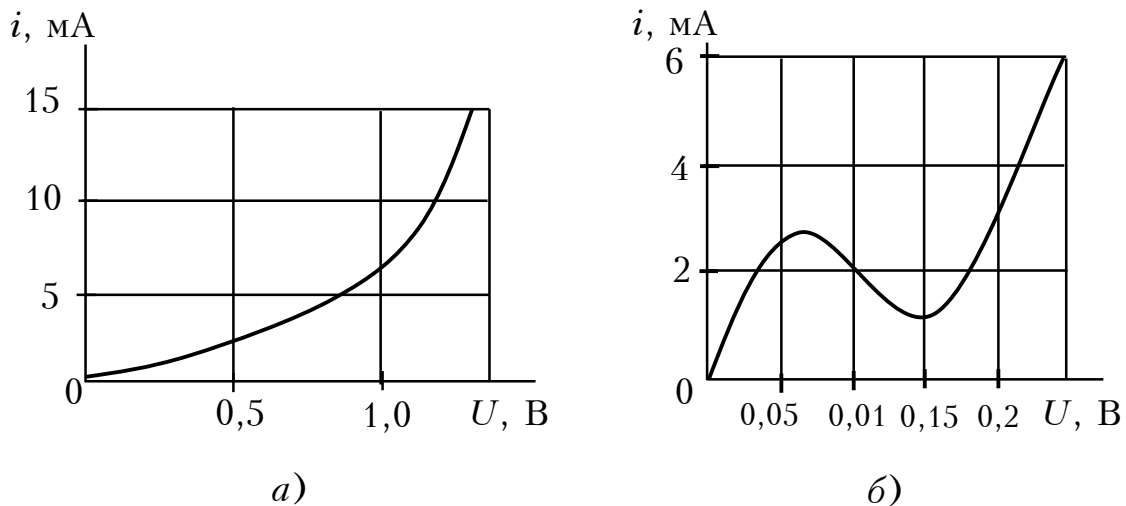


Рисунок 9.1 – Типові ВАХ нелінійних двополюсників: а) – однозначна характеристика напівпровідникового діода; б) – характеристика тунельного діода

Поняття опору для нелінійного двополюсника визначається по-різному. Приклавши до двополюсника постійну напругу  $U = U_0$ , маємо у колі постійний струм  $I_0 = i(U_0)$ , а відношення

$$R_0 = U_0 / I_0$$

називається *опором елемента постійному струму*. На відмінну від опору звичайного лінійного резистора значення  $R_0$  не стало, а залежить від прикладеної напруги.

Відношення приросту напруги до приросту струму у вибраній робочій точці  $(U_0, I_0)$  називають *диференціальним опором* нелінійного двополюсника:

$$R_{\text{диф}} = \frac{du}{di} \approx \frac{\Delta U}{\Delta i}.$$

*Диференціальна крутість ВАХ*

$$S_{\text{диф}} = \frac{1}{R_{\text{диф}}} = \frac{di}{dU} \approx \frac{\Delta i}{\Delta U},$$

яка є тангенсом кута нахилу дотичної ВАХ у даній точці.

### Способи описування характеристик нелінійних елементів

Як правило, вольт-амперні характеристики нелінійних елементів отримують експериментально. Їх можна подати у різні способи.

Простим і досить точним способом є подання характеристик у вигляді таблиці. Цей спосіб особливо зручний при аналізі процесів у колах за допомогою ЕОМ; аргумент і функція утворюють у запам'ятовувальному пристрої двовимірний масив чисел.

Якщо дослідження має проводитись не чисельними, а аналітичними методами, то потрібно підібрати таку функцію (функцію апроксимації), яка, будучи досить простою, відображала б усі найважливіші особливості

експериментально знятої характеристики, тобто описала б цю характеристику з достатнім ступенем точності.

У радіотехніці найчастіше використовують такі способи апроксимації ВАХ нелінійних двополюсників:

- кусково-лінійна апроксимація;
- степенева апроксимація;
- показникова апроксимація.

### Кусково-лінійна апроксимація

Даний спосіб ґрунтується на наближеній заміні реальної характеристики відрізками прямих ліній з різними нахилами. Така апроксимація найчастіше застосовується при розрахунках процесів у нелінійних елементах у випадку великих амплітуд зовнішніх дій, наприклад, у підсилювачах потужності радіопередавальних пристроїв.

Розглянемо, для прикладу, вхідну характеристику реального транзистора, яка замінюється (апроксимується) двома відрізками прямих (рис. 9.2).

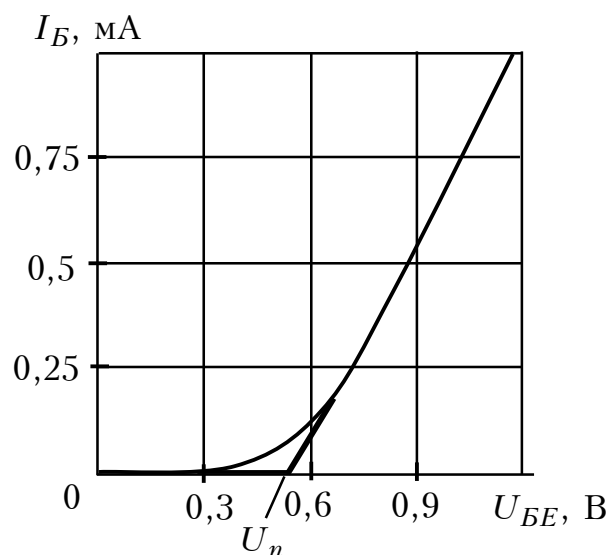


Рисунок 9.2 – Вхідна характеристика транзистора КТ-306 – залежність струму бази від напруги база-емітер

Апроксимація визначається двома параметрами – напругою початку характеристики  $U_{II}$  і крутістю характеристики  $S$ , яка має розмірність провідності. Апроксимована ВАХ складається з двох лінійних відрізків:  $0 - U_{II}$ , де струм бази  $i_B = 0$  та правого відрізка, де струм бази  $i_B$  лінійно зростає від нуля до 1мА. Тому математична форма апроксимованої вольт-амперної характеристики буде такою:

$$i_B(U_{BE}) = \begin{cases} 0, & \text{при } U_{BE} < U_{II}, \\ S(U - U_{II}), & \text{при } U_{BE} \geq U_{II}. \end{cases} \quad (9.1)$$

Напруга початку вхідних характеристик біполярних транзисторів дорівнює приблизно 0,2...0,8В; крутість характеристики струму бази  $i_B(U_{BE})$ , як правило, біля 10мА/В.

### Ступенева апроксимація

Цей спосіб ґрунтується на розкладанні нелінійної вольт-амперної характеристики  $i(U)$  у ряд Тейлора, який збігається у околі робочої точки  $U_0$ :

$$i(U) = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2 + \dots, \quad (9.2)$$

де коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2, \dots$  - деякі сталі числа.

Кількість членів розкладання залежить від заданої точності розрахунків. Ступеневу апроксимацію широко використовують при аналізі роботи нелінійних пристроїв, на які подаються відносно малі зовнішні дії.

Спосіб надходження коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2, \dots$  проілюструємо таким простим прикладом.

*Приклад.* Експериментально знята вхідна характеристика  $i_B = f(U_{BE})$  транзистора КТ-301 (рис. 9.3). Знайти коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2$ , які визначають апроксимацію вигляду  $i_B = a_0 + a_1(U_{BE} - U_0) + a_2(U_{BE} - U_0)^2$  у околі робочої точки  $U_0 = 0,7В$ .

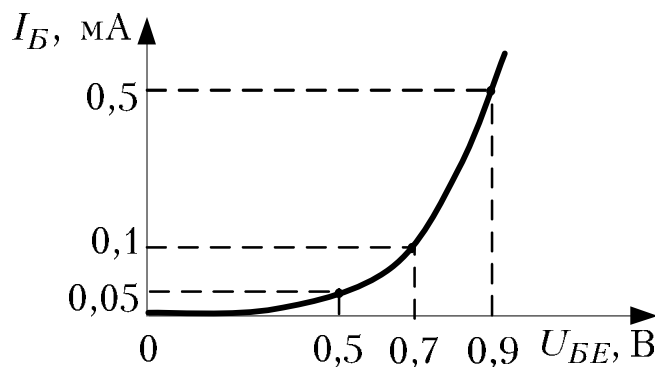


Рисунок 9.3 – Ступенева апроксимація вхідної характеристики транзистора КТ-3011

Як вузли апроксимації вибираємо точки 0,5; 0,7 і 0,9В. Як видно на рисунку, для знаходження невідомих коефіцієнтів слід розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 + a_1(0,5 - 0,7) + a_2(0,5 - 0,7)^2 = 0,05; \\ a_0 + a_1(0,7 - 0,7) + a_2(0,7 - 0,7)^2 = 0,15; \\ a_0 + a_1(0,9 - 0,7) + a_2(0,9 - 0,7)^2 = 0,5; \end{cases}$$

або



$$\begin{cases} a_0 - 0,2a_1 + 0,04a_2 = 0,05; \\ a_0 = 0,15; \\ a_0 + 0,2a_1 + 0,04a_2 = 0,5; \end{cases}$$

звідки  $a_0 = 0,15\text{мА}$ ;  $a_1 = 1,125\text{мА/В}$ ;  $a_2 = 3,125\text{мА/В}^2$ .

Слід пам'ятати, що ступенева апроксимація є спосіб локального (на невеликій частині кривої) описування характеристик. Користування нею при значних відхиленнях миттєвих значень вхідного сигналу від робочої точки недоцільне через суттєві погіршення точності.

### Показникова апроксимація

Показникову апроксимацію часто використовують при вивченні нелінійних явищ у радіотехнічних колах, які містять напівпровідникові діоди. У цих випадках вольт-амперна характеристика діода описується експоненціальною функцією (її апроксимують експонентою). Але така апроксимація є достатньо точною лише при значеннях струму, які не перевищують декілька міліампер. При більших струмах експоненціальна характеристика плавно переходить у пряму лінію через вплив об'ємного опору напівпровідникового матеріалу.

### 9.2 Спектральний склад струму у нелінійному елементі при гармонічній зовнішній дії

Розглянемо явища у найпростішому колі, утвореному послідовним з'єднанням джерела гармонічного сигналу  $U_c(t) = U_m \cos \omega t$ , джерела постійної напруги зміщення  $U_0$  і нелінійного елемента (рис. 9.4,а). Знайдемо форму струму у колі, скориставшись нескладними графічними побудовами (рис. 9.4,б і в).

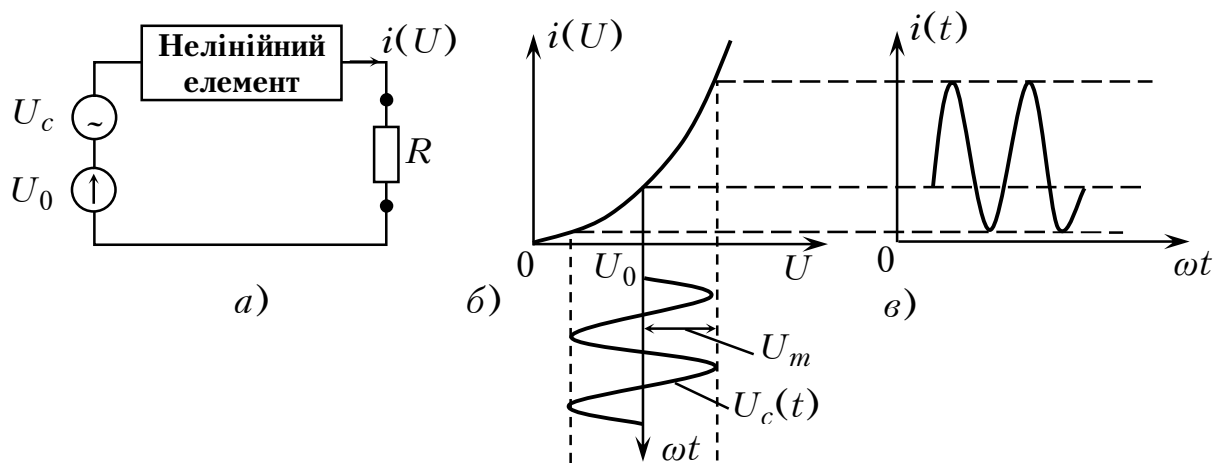


Рисунок 9.4 – Знаходження форми струму у нелінійному колі: а) – схема кола, б) – графік вольт-амперної характеристики нелінійного елемента і вхідного сигналу, в) – форма струму через нелінійний елемент

Легко помітити, що форма струму і напруги є різними. Причина спотворення кривої струму (відхилення від синусоїдної форми) досить прозора: однаковим приростам напруги (у додатний і від'ємний півперіоди вхідної гармоніки  $U_c(t)$  відповідають неоднакові прирости струму, оскільки крутість вольт-амперної характеристики нелінійного елемента  $i(U)$  на різних її ділянках є різною. Отже, струм у колі має несинусоїдну форму.

Перейдемо до кількісних оцінок спектрального складу струму через нелінійний елемент.

За способом кусково-лінійної апроксимації, як уже зазначалося, форма струму у колі з нелінійним елементом аналітично описується так:

$$i(U) = \begin{cases} 0, & \text{коли } U < U_{II}, \\ S(U - U_{II}), & \text{коли } U \geq U_{II}. \end{cases}$$

На вхід кола (рис. 9.4,а) подається напруга:

$$U(t) = U_0 + U_m \cos \omega t.$$

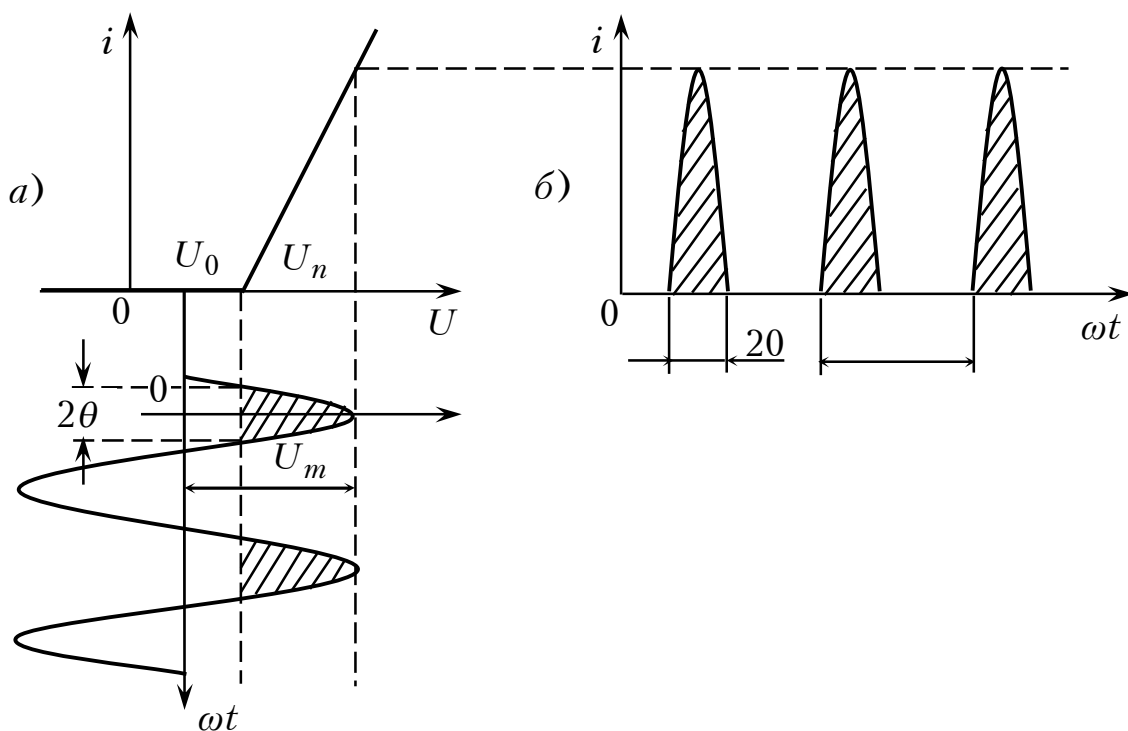


Рисунок 9.5 – Форми: а) – ВАХ з кусково-лінійною апроксимацією, б) – струму у колі нелінійного елемента

З побудови на рис. 9.5 видно, що графік струму і має характерний вигляд косинусних імпульсів з відтинанням. Кут  $\theta$  відтинання імпульсів струму визначається з рівності  $U_0 + U_m \cos \theta = U_{II}$ , звідки

$$\cos \theta = \frac{U_{II} - U_0}{U_m}.$$

Сталу складову і амплітуди гармонік струму обчислюють за формулами:

$$I_0 = S U_m \cdot \gamma_0(\theta),$$

$$I_n = S \cdot U_m \cdot \gamma_n(\theta), \text{ де } n = 1, 2, 3, \dots$$

У ці вирази входять функції Берга  $\gamma_n(\theta)$ , значення яких зазвичай даються у довідникових матеріалах, присвячених проектуванню радіопередавальних пристроїв.

*Приклад.* Нелінійний елемент має кусково-лінійну ВАХ з параметрами  $U_{II} = 0,6\text{В}$ ;  $S = 25\text{мА/В}$ . До даного елемента прикладена напруга (у вольтах)  $U = 0,2 + 0,8 \cos \omega t$ . Визначити сталу складову  $I_0$  та першу гармоніку  $I_1$  струму через нелінійний елемент.

Оскільки

$$\cos = \frac{U_{II} - U_0}{U_m} = \frac{0,6 - 0,2}{0,8} = 0,5; \quad \theta = 60^\circ.$$

Значення функції Берга для певних значень кута відтинання називаються коефіцієнтами Берга. У даному випадку:

$$\gamma_0(\theta) = \frac{1}{\pi} (\sin \theta - \theta \cdot \cos \theta) = 0,109;$$

$$\gamma_1(\theta) = \frac{1}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta) = 0,196.$$

Тоді стала складова струму:

$$I_0 = S \cdot U_m \cdot \gamma_0(60^\circ) = 25 \cdot 0,8 \cdot 0,109 = 2,18\text{мА};$$

амплітуда першої гармоніки струму:

$$I_1 = S \cdot U_m \cdot \gamma_1(60^\circ) = 25 \cdot 0,8 \cdot 0,196 = 3,92\text{мА};$$

**За способом ступеневої апроксимації** задача розв'язується таким чином. Нехай у околі робочої точки  $U_0$  вольт-амперна характеристика нелінійного елемента подана у вигляді:

$$i = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2 + \dots;$$

прикладена до нелінійного елемента (двополюсника) напруга:

$$U(t) = U_0 + U_m \cos \omega t.$$

Скориставшись відомими з тригонометрії формулами:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x),$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2x + \cos 4x),$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x).$$

Шляхом підстановки значення  $U(t)$  у вираз для струму та простих математичних дій отримаємо:

$$\begin{aligned}
 i(t) = & i \left( a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots \right) + \\
 & + \left( a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots \right) \cos \omega t + \\
 & + \left( \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{8} a_4 U_m^4 + \dots \right) \cos 2\omega t + \\
 & + \left( \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5 + \dots \right) \cos 3\omega t + \dots
 \end{aligned}$$

Звідси випливають такі співвідношення для розрахунку сталої складової струму і амплітуд його гармонік:

$$\left. \begin{aligned}
 I_0 &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots, \\
 I_1 &= a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots, \\
 I_2 &= \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{8} a_4 U_m^4 + \dots, \\
 I_3 &= \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5 + \dots,
 \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Як бачимо, стала складова і амплітуди парних гармонік визначаються коефіцієнтами степеневого ряду з парними номерами. Амплітуди непарних гармонік залежать лише від непарних коефіцієнтів.

*Приклад.* Нелінійний елемент має степеневу ВАХ  $i = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2$  у околі робочої точки  $U_0 = 0,5B$ . На нього діє напруга з параметрами  $U = 0,5 + 0,3 \cos \omega t$ . Визначити сталу складову та амплітуди гармонік струму через цей елемент.

У формулу для ВАХ нелінійного елемента підставимо вираз для діючої напруги:

$$\begin{aligned}
 i &= a_0 + a_1 \cdot 0,3 \cos \omega t + a_2 \cdot (0,3 \cos \omega t)^2 = \\
 &= a_0 + a_1 \cdot 0,3 a_1 \cos \omega t + \frac{1}{2} \cdot 0,09 \cdot a_2 + \frac{1}{2} 0,09 a_2 \cos 2\omega t = \\
 &= a_0 + \frac{1}{2} \cdot 0,09 \cdot a_2 + 0,3 a_1 \cos \omega t + \frac{1}{2} 0,09 a_2 \cos \omega t.
 \end{aligned}$$

звідки:

$$I_0 = a_0 + 0,045 a_2, I_1 = 0,3 a_1, I_2 = 0,045 a_2.$$

Такий самий результат отримує, скориставшись системою (9.3):

$$I_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 (0,3)^2 = a_0 + 0,045 a_2,$$

$$I_1 = a_1 \cdot 0,3 = 0,3 a_1, \quad I_2 = \frac{1}{2} a_2 (0,3)^2 = 0,045 a_2.$$

### Резонансне нелінійне підсилення

Повернемося до схеми рис. 9.6,а, але робочу точку виберемо на середині лінійної ділянки вольт-амперної характеристики  $i_K(U_{BE})$ , а вхідна гармонічна напруга не виходила за межі лінійної ділянки. Це є, так званий, режим лінійного підсилення і форма колекторного струму через транзистор теж буде гармонічною (рис. 9.7).

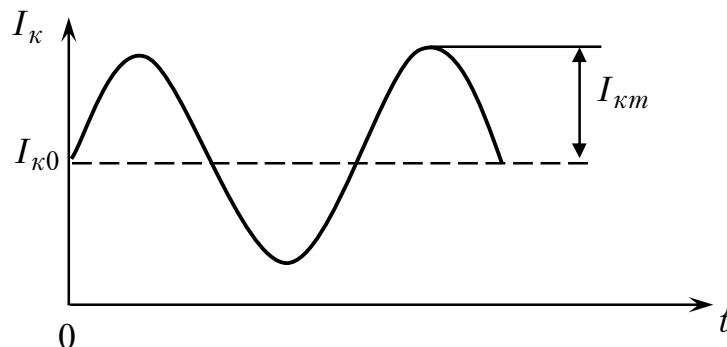


Рисунок 9.6 – Форма колекторного струму при лінійному підсиленні

Коефіцієнт корисної дії підсилювача  $\eta$  визначається формулою:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{0,5 \cdot I_{KM} \cdot U_{KM}}{I_{K0} \cdot E_K},$$

де:  $I_{KM}$  – амплітуда гармонічного колекторного струму;

$U_{KM}$  – амплітуда гармонічної напруги на колекторі транзистора;

$I_{K0}$  – постійна складова колекторного струму (струм через транзистор при відсутності вхідного сигналу);

$E_K$  – напруга колекторного живлення підсилювача.

Для дотримання вимоги лінійного підсилення (без спотворення форми колекторного струму), максимальне значення амплітуди колекторного струму може дорівнювати його постійній складовій ( $I_{KM} = I_{K0}$ ). Амплітуда колекторного струму не може перевищувати напругу колекторного живлення ( $U_{KM} \leq E_K$ ). Таким чином, к.к.д. підсилювача  $\eta \leq 0,5$ , тобто не перевищує 50%. Це означає, що не менше 50% енергії джерела живлення витрачається на нагрівання транзистора. Такий низький к.к.д. може бути допустимим лише у пристроях з мінімальною потужністю. При більш-менш значній потужності підсилювача така неекономічна робота підсилювача недопустима, і потрібно знайти засоби для підвищення коефіцієнта корисної дії пристрою.

Для цього потрібно перейти до нелінійного резонансного підсилення з відтинанням колекторного струму. Ми уже знаємо, що при цьому усе буде

залежати від вибору кута відтину  $\theta$ . Дійсно, у режимі підсилення вихідний сигнал при гармонічній вхідній напрузі має бути також гармонічним коливанням тієї ж частоти.

Це означає, що коливальний контур у колекторному колі резонансного підсилювача (рис. 9.6,а) повинен бути настроєним на першу гармоніку імпульсів колекторного струму. Цей струм матиме постійну складову  $I_{K0} = \gamma_0(\theta) \cdot I_{KMmax}$  і амплітуду першої гармоніки  $I_{KM} = \gamma_1(\theta) \cdot I_{KMmax}$ . Тоді к.к.д. підсилювача  $\eta$  дорівнюватиме:

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_1(\theta)}{\gamma_0(\theta)} \cdot \frac{U_{KM}}{E_K}.$$

При кутові відтину  $\theta = 90^\circ$  маємо  $\gamma_0 = 1/\pi$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ; вважаючи  $U_{KM} \approx E_K$ , отримаємо  $\eta = \pi/4 = 0,785$ . Якщо ж  $\theta = 60^\circ$ , то  $\gamma_0 = 0,218$ ,  $\gamma_1 = 0,391$  ( $U_{KM} \approx E_K$ ) і матимемо  $\eta = 0,9$ .

Взагалі зі зменшенням кута відтину коефіцієнт корисної дії зростає. Це легко пояснюється тим, що при зменшенні  $\theta$  середнє значення (воно ж є постійною складовою) послідовності косинусних імпульсів колекторного струму зменшується швидше, ніж амплітуда першої гармоніки, тобто при  $\theta \rightarrow 0$  відношення  $\gamma_1(\theta)/\gamma_0(\theta) \rightarrow 2$  при  $U_{KM} \approx E_K$ .

### Резонансне множення частоти

Якщо у схемі резонансного підсилювача на транзисторі (тобто підсилювача, коли, наприклад, роль колекторного навантаження виконує паралельний коливальний контур), який працює з великою амплітудою вхідного сигналу, коливальна система (контур) буде настроєна на деяку частоту  $n\omega$  – частоту однієї з вищих гармонік вхідного сигналу, то даний пристрій може використовуватись як помножувач частоти (рис. 9.6).

Потреба у помножувачах виникає, наприклад, при створенні джерел гармонічних коливань високої частоти і з високою її стабільністю. Будують відносно низькочастотний високостабільний автогенератор  $U_C = U_m \sin \omega t$ , а потім множенням частоти на  $n$  отримують високостабільний сигнал з частотою  $n\omega$ .

При кусково-лінійній апроксимації амплітуда вихідного сигналу

$$U_{mvix} = S \cdot R_{pez} U_{mvx} \cdot \gamma_n(\theta).$$

На рис. 9.6,б; в; г показано випадок подвоєння частоти. Тоді у останній формулі  $R_{pez}$  є резонансний на другій гармоніці імпульсу струму (рис. 9.6,в) вхідний опір колекторного контуру  $LC$ , а кут відтинання  $\theta$  вибирається таким, при якому функція Берга  $\gamma_2(\theta)$  буде мати максимальне значення. Розрахувати значення оптимального кута відтину можна за формулою:

$$\theta_{opt} = 180^\circ / n.$$

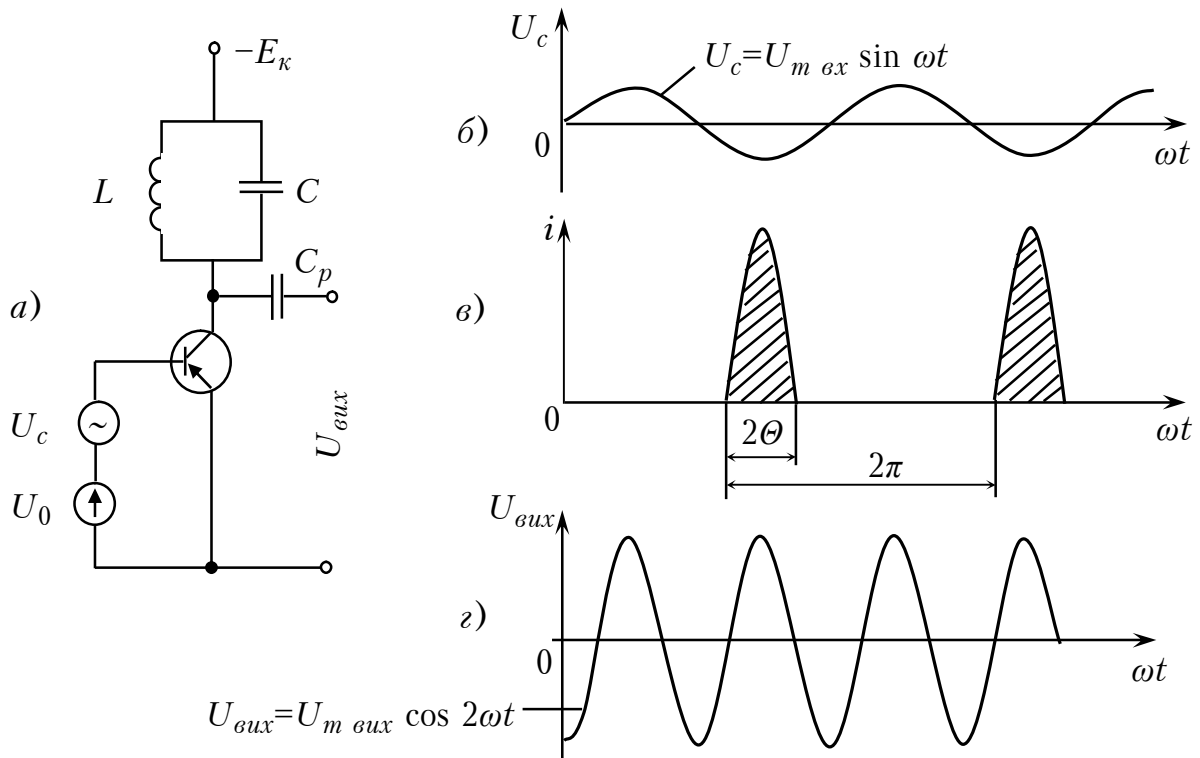


Рисунок 9.6 – Помножувач частоти: а) – спрощена принципова схема резонансного підсилювача; б) – форма вхідного сигналу; в) – форма імпульсу колекторного струму; г) – форма вихідної напруги

У запропонованому варіанті подвоєння частоти кут відтинання колекторного струму дорівнює  $90^\circ (\pi/2)$ . При потроєнні частоти  $\theta_{opt} = 60^\circ (\pi/3)$ , при множенні на 10  $\theta_{opt} = 18^\circ (\pi/10)$  і т.д.

Слід зауважити, що зі зростанням  $n$  кут відтинання зменшується і при цьому зменшується амплітуда імпульсу колекторного струму, а значить і амплітуда вихідної напруги. Через це на практиці коефіцієнт множення частоти складає декілька одиниць.

### 9.3 Нелінійні перетворення суми двох гармонічних сигналів

Властивість нелінійного кола збагачувати спектр, створюючи на виході спектральні складові, які відсутні у вхідному сигналі, найяскравіше проявляється, якщо вхідний сигнал є сумою декількох гармонічних коливань з різними частотами. Ефект виникнення великої кількості нових спектральних складових лежить в основі важливих для радіотехніки нелінійних перетворень сигналів.

Розглянемо випадок, коли вольт-амперна характеристика нелінійного двополюсника описується тричленом другої степені:

$$i(U) = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2. \quad (9.4)$$

### Бігармонічна дія на нелінійний елемент

Нехай прикладена напруга має постійну складову  $U_0$  і дві гармоніки з різними частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$  та амплітудами, відповідно  $U_{m1}$  і  $U_{m2}$ :

$$U = U_0 + U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t. \quad (9.5)$$

Такий сигнал у радіотехніці прийнято називати *бігармонічною* (двогармонічною) дією. Він дуже зручний для з'ясування принципів особливостей перетворення спектра у нелінійних колах.

Підставимо вираз (9.5) у вираз (9.4):

$$\begin{aligned} i(t) &= a_0 + a_1(U_{m1} \cos \omega t + U_{m2} \cos \omega_2 t) + \\ &+ a_2(U_{m1} \cos \omega t + U_{m2} \cos \omega_2 t)^2 = \\ &= a_0 + a_1 U_{m1} \cos \omega t + a_1 U_{m2} \cos \omega_2 t + a_2 U_{m1}^2 \cos^2 \omega_1 t + \\ &+ 2a_2 U_{m1} \cdot U_{m2} \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t + a_2 U_{m2}^2 \cdot \cos^2 \omega_2 t. \end{aligned}$$

Виконавши елементарні тригонометричні перетворення і згрупувавши члени, приходимо до такого спектрального подання струму у нелінійному елементі:

$$\begin{aligned} i(t) &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 (U_{m1}^2 + U_{m2}^2) + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + \\ &+ a_1 U_{m2} \cos \omega_2 t + \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{2} a_2 U_{m2}^2 \cos 2\omega_2 t + \\ &+ a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 + \omega_2)t + a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (9.6) \end{aligned}$$

Бачимо, що у складі струму присутні спектральні складові, які зустрічалися у вхідному сигналі: постійна складова:

$$a_0 + \frac{1}{2} a_2 (U_{m1}^2 + U_{m2}^2),$$

а також перші гармоніки обох джерел вхідного сигналу:

$$a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t \quad \text{та} \quad a_1 U_{m2} \cos \omega_2 t.$$

Новими спектральними складовими є другі гармоніки обох джерел вхідного сигналу:

$$\frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 \cos 2\omega_1 t \quad \text{і} \quad \frac{1}{2} a_2 U_{m2}^2 \cos 2\omega_2 t,$$

хоча, зауважимо, друга гармоніка зустрічалася у струмі нелінійного елемента і при дії моногармонічної напруги на вході у попередньому підрозділі.

Принципово новим є поява двох гармонічних складових:

$$a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 + \omega_2)t \quad \text{і} \quad a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t$$

з частотами  $(\omega_1 + \omega_2)$  та  $(\omega_1 - \omega_2)$ . Амплітуди цих коливань, рівні  $a_2 U_{m1} U_{m2}$ , однаковою мірою залежать від амплітуд вхідних сигналів і



стають рівними нулю, якщо один з джерел сигналів є відсутнім ( $U_{m1} = 0$  або  $U_{m2} = 0$ ). Це свідчить про те, що через нелінійність даного двополюсника (елемента) у ньому відбувається взаємодія коливань, які відповідають окремим гармонічним складовим вхідного сигналу.

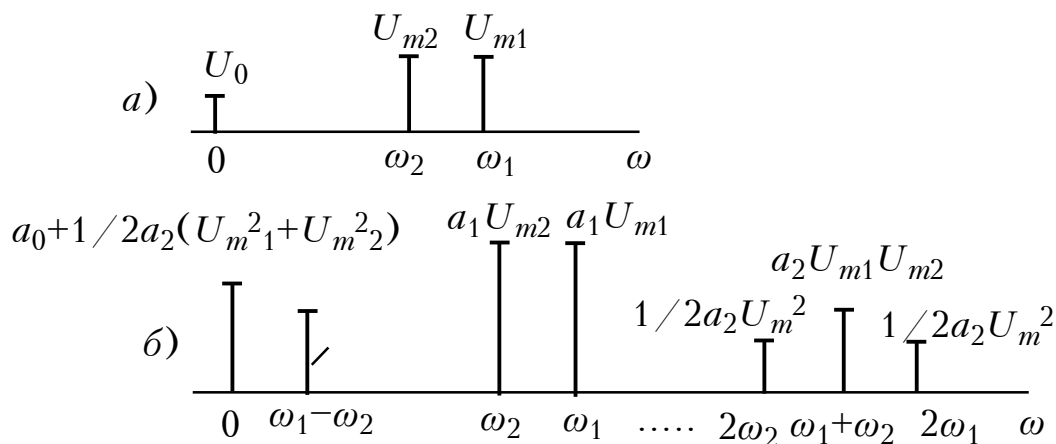


Рисунок 9.7 – Спектри: а) – вхідної напруги; б) – спектр струму через нелінійний елемент

На рис. 9.7 зображено амплітудно-частотний спектр вхідної напруги та амплітудно-частотний спектр струму через заданий нелінійний елемент.

### Гетеродинування у нелінійних колах

Перетворення, результатом якого є зміщення спектра сигналу вздовж осі частот без змін його спектрального складу, називається *гетеродинуванням*. На практиці частіше використовують зміщення спектра у бік більш низьких частот (рис. 9.7,б), для цього фільтр  $\Phi$  має бути розрахованим на пропускання тільки різницевої частоти (рис. 9.7).

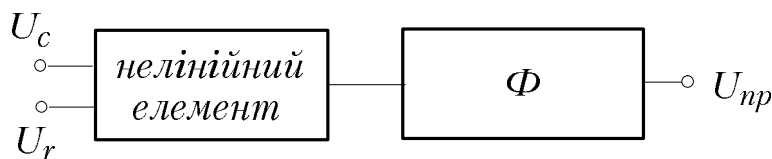


Рисунок 9.8 – Структурна схема перетворювача частоти

Припустимо, що на вході нелінійного елемента діють два гармонічних коливання.

$$U_{\text{вх}} = U_C + U_\Gamma,$$

де  $U_C = U_{mC} \cos \omega_C t$  – високочастотний сигнал;

$U_\Gamma = U_{m\Gamma} \cos \omega_\Gamma t$  – високочастотне гармонічне коливання, створене допоміжним генератором, який називається гетеродином.

Їх різницева частота  $|\omega_C - \omega_\Gamma|$  вибрана також відносно високою, вищою, ніж будь-яка зі звукових частот. Тоді, згідно з формулою (9.6), на виході лінійного елемента матимемо:

$$U(t) = a_0 + \frac{1}{2}a_2(U_{mC}^2 + U_{m\Gamma}^2) + a_1U_{m1} \cos \omega_C t + a_1U_{m\Gamma} \cos \omega_\Gamma t + \\ + \frac{1}{2}a_2U_{mC}^2 \cos 2\omega_C t + \frac{1}{2}a_2U_{m\Gamma}^2 \cos 2\omega_\Gamma t + \\ + a_2U_{mC} \cdot U_{m\Gamma} \cos(\omega_C - \omega_\Gamma)t + a_2U_{mC} \cdot U_{m\Gamma} \cos(\omega_C + \omega_\Gamma)t.$$

Після фільтра  $\Phi$  отримуємо:

$$U_{np}(t) = U_{mnp} \cos \omega_{np} t,$$

де  $\omega_{np} = \omega_C - \omega_\Gamma$  називається *проміжною частотою*, а пристрій побудований за структурною схемою рис. 9.8 називається *перетворювачем частоти*, нелінійний елемент – *змішувачем*.

Якщо гетеродин перестроювати за частотою так, щоб  $\omega_{np}$  залишалася незмінною, то на виході перетворювача матимемо сигнал, частота якого не буде залежати від частоти на якій працює радіостанція, повідомлення якої ми слухаємо за допомогою радіоприймача. Наприклад, у сучасних радіоприймачах АМ-діапазонів проміжна частота є стандартною і дорівнює 465 кГц.

Слід згадати ще про одне застосування гетеродинування, пов'язане уже не з перетворенням частоти сигналів, а з вимірюванням чи контролем частоти коливань.

Якщо до нелінійного елемента підведені коливання вимірюваної частоти  $f_x$ , а також коливання еталонної частоти  $f_{em}$ , вихідна напруга має частоту  $F = f_x - f_{em}$ .

Знаючи  $F$  і  $f_{em}$  можна визначити значення невідомої частоти  $f_x = f_{em} + F$ . Якщо  $F=0$  (“нульові биття”), то  $f_x = f_{em}$ .

На цьому принципі, наприклад, працюють пристрої, які називаються гетеродинними частотомірами.

### **Амплітудне модулювання**

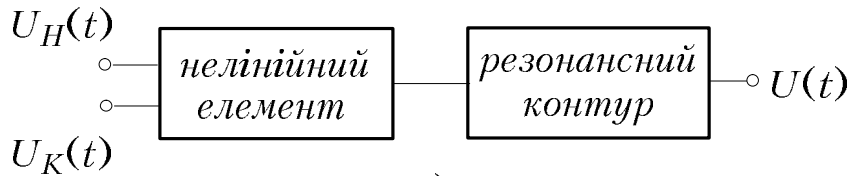
Найпростіший амплітудний модулятор може бути побудований за структурною схемою, поданою на рис. 9.9,а.

Таким чином, на вході нелінійного елемента діє сума двох гармонічних напруг високочастотного гармонічного коливання несучої частоти  $U_H(t) = U_{mH} \cos \omega_H t$  і гармонічного керуючого низькочастотного коливання  $U_K(t) = U_{mK} \cos \Omega t$ :

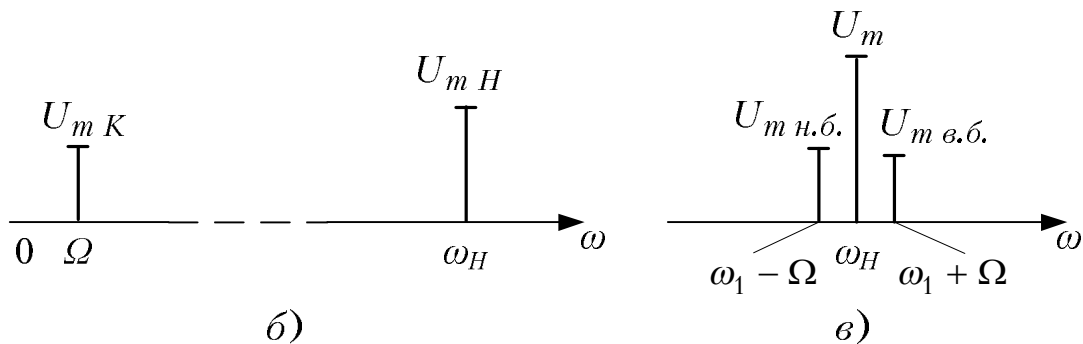
$$U_{вх}(t) = U_0 + U_{mH} \cos \omega_H t + U_{mK} \cos \Omega t.$$

згідно з формулою (9.6) на резонансний контур, настроєний на частоту  $\omega_H$ , діятиме напруга:

$$U'_{вих}(t) = a_0 + \frac{1}{2}a_2(U_{mH}^2 + U_{mK}^2) + a_1U_{mH} \cos \omega_H t + a_1U_{mK} \cos \Omega t + \\ + \frac{1}{2}a_2U_{mH}^2 \cos 2\omega_H t + \frac{1}{2}a_2U_{mK}^2 \cos 2\Omega t + \\ + a_2U_{mH}U_{mK} \cos(\omega_H + \Omega)t + a_2U_{mH}U_{mK} \cos(\omega_H - \Omega)t.$$



а)



б)

в)

Рисунок 9.9 – Амплітудний модулятор: а) – структурна схема; б) – амплітудні спектри керуючого і керованого сигналів; в) – амплітудний спектр АМ-сигналу

Резонансний контур “відреагує” лише на: гармонічну складову  $a_1U_{mH} \cos \omega_H t$  і на виході з’явиться напруга:

$$U_m \cos \omega_H t,$$

та на гармонічні складові, близькі до неї за частотою,  $a_2U_{mH}U_{mK} \cos(\omega_H + \Omega)t$  та  $a_2U_{mH}U_{mK} \cos(\omega_H - \Omega)t$  і на виході матимемо ще дві напруги:

$$U_{mв.б.} \cos(\omega_H + \Omega)t \text{ та } U_{mн.б.} \cos(\omega_H - \Omega)t.$$

Оскільки резонансний контур є лінійним колом, то, у відповідності до принципу суперпозицій (накладання), на виході пристрою, побудованого за структурною схемою рис. 9.9,а, отримаємо напругу, яка являє собою АМ-коливання:

$$U(t) = U_m \cos \omega_H t + U_{mв.б.} \cos(\omega_H + \Omega)t + U_{mн.б.} \cos(\omega_H - \Omega)t,$$

де  $U_{mв.б.} = \frac{1}{2}mU_m$  – амплітуда верхньої бічної складової,

$U_{mн.б.} = \frac{1}{2}mU_m$  – амплітуда нижньої бічної складової,

$m$  – коефіцієнт амплітудної модуляції.

### Лінійне детектування

На вході нелінійного елемента діє амплітудно-модульована напруга:

$$U_{вх}(t) = U_0 + U_{mвх}(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_H t.$$

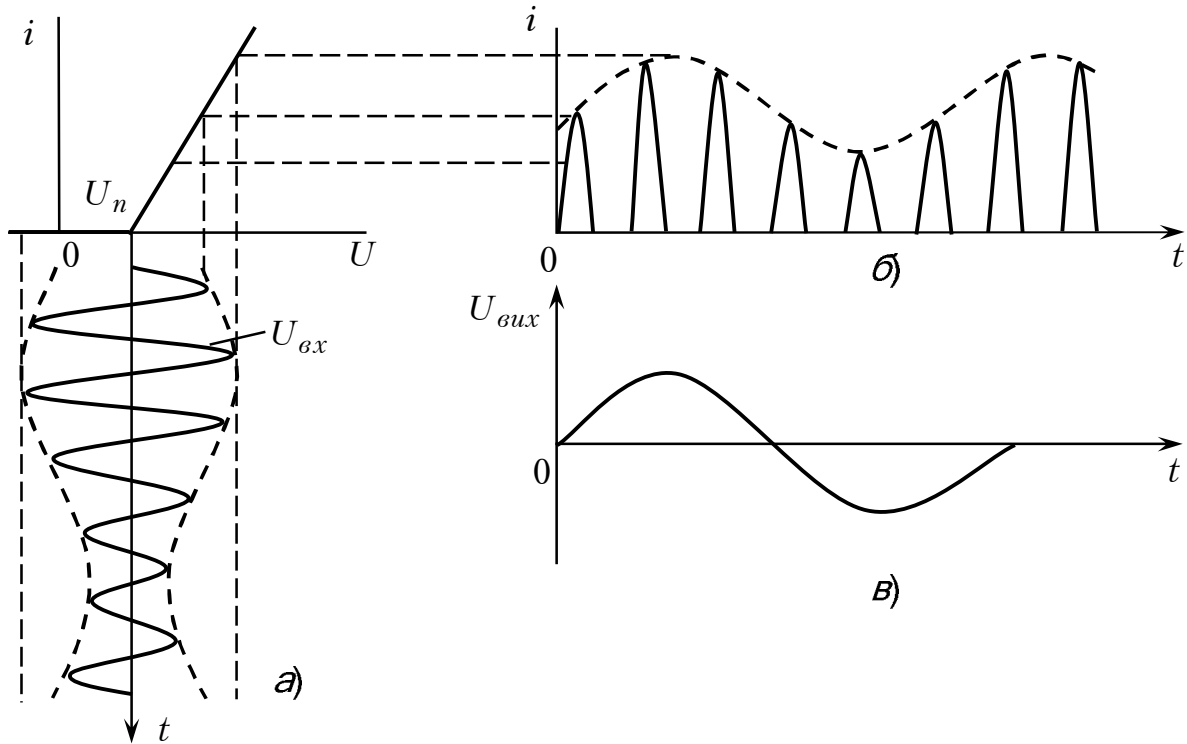


Рисунок 9.10 – Лінійне детектування: а) – форма вхідної напруги, б) – форма струму через нелінійний елемент і в) – форма вихідної напруги при лінійному детектуванні

Постійна складова вхідної напруги  $U_0$  нехай дорівнює  $U_{II}$ , а амплітуда  $U_{mвх}$  буде достатньо велика для того, щоб можна було скористатися кусково-лінійною апроксимацією ВАХ нелінійного елемента, кут відтину  $\theta = 90^\circ$ .

Послідовність імпульсів струму через нелінійний елемент і виявляється промодульованою за амплітудою. Нульова складова (середнє значення такої послідовності імпульсів) змінюється у часі, причому її величина:

$$I_0 = kU_{mвх}(1 + M \cos \Omega t) \cdot \gamma_0(90^\circ) = 0,318I_m(1 + M \cos \Omega t),$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності;  $\gamma_0(90^\circ) = 0,318$ .

Звідки, після фільтра нижніх частот, вихідна напруга буде дорівнювати:

$$U_{вих} = 0,318I_m R_H (1 + M \cos \Omega t),$$

де  $R_H$  – опір навантаження фільтра.

Суттєвим тут є те, що амплітуда сигналу на виході пропорційна амплітуді сигналу на вході, через що таке детектування називається *лінійним*. Його особливість – відсутність спотворень повідомлення, що передається.

Але нагадаємо, що таке можливе лише тоді, коли на вході амплітудного детектора діє сигнал з достатньо великою амплітудою.

### **Квадратичне детектування**

Тепер розглянемо дуже поширений у радіотехніці випадок, коли детектуванню підлягає слабкий сигнал і ВАХ нелінійного елемента може бути апроксимована степеневою залежністю вигляду:

$$i(U) = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2,$$

тобто поліномом другого ступеня.

Будемо вважати, що на нелінійний елемент подано напругу зміщення  $U_0$ , яка дорівнює постійній складовій АМ-сигналу:

$$U_{ex}(t) = U_0 + U_{mex}(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t.$$

Підставивши значення  $U_{ex}(t)$  замість  $U$  у виразі для  $i(U)$ , виявимо, серед різноманітних комбінаційних коливань, які присутні у струмі через нелінійний елемент, таку низькочастотну складову:  $a_2 U_{mex}^2 \cdot m \cdot \cos \Omega t$ . Після фільтра нижніх частот, у якого частота зрізу буде:  $\Omega < \omega_{зр} < 2\Omega$ , отримаємо:

$$U_{вих} = U_{mвих} \cos \Omega t.$$

Оскільки амплітуда вихідного сигналу детектора пропорційна квадрату вхідної напруги, таке детектування називається *квадратичним*.

### ЛІТЕРАТУРА (1-3 РОЗДІЛИ)

1. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1969. – 424 с.
2. Евдокимов Ф.Е. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1981. – 488 с.
3. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989. – 328 с.
4. Добротворский И.Н. Теория электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989. – 472 с.
5. Зернов Н.В. Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. – Л.: Энергия, 1972. – 816 с.
6. Лосев А.К. Теория линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1987. – 512 с.
7. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. – М.: Высшая школа, 1981. – 336 с.
8. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 1985. – 497 с.
9. Попов П.А. Теория связи по проводам. – М.: Связь, 1978. – 272 с.
10. Шебес М.Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1982. – 488 с.

### ЛІТЕРАТУРА (4-9 розділи)

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1988. – 536 с.
2. Белоцерковский Г.Б. Основы радиотехники и антенны. Ч.1 Основы радиотехники. – М.: Советское радио, 1979. – 328 с.
3. Власов В.Ф. Курс радиотехники. – М.: Госэнергоиздат, 1962. – 928 с.
4. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Советское радио, 1977. – 511 с.
5. Добротворский И.Н. Теория электрических цепей: Учебник для техникумов. – М.: Радио и связь, 1989. – 472 с.
6. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. – Л.: Энергия, 1972. – 816 с.
7. Калашников А.М., Степук Я.В. Основы радиотехники и радиолокации: Колебательные системы. – М.: Воениздат, 1962. – 366 с.

*Навчальне видання*

Юрій Володимирович Крушевський  
Дмитро Володимирович Гаврілов

## **Основи радіоелектроніки Частина 2**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Гавріловим Д.В.

Редактор В. О. Дружиніна  
Коректор З. В. Поліщук

Науково-методичний відділ ВНТУ  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК № 746 від 25.12.2001  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку  
Формат 29,7x42  $\frac{1}{4}$   
Друк різнографічний  
Тираж прим.  
Зам. №

Гарнітура Times New Roman  
Папір офсетний  
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
Вінницького національного технічного університету  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК № 746 від 25.12.2001  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ