УДК 681.32

МАШИННА АРИФМЕТИКА ФІБОНАЧІ НА ОСНОВІ ЗНАКОРОЗРЯДНОГО ТА ТЕРНАРНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Асп. Конате К., докт. техн. наук, доц. Азаров О. Д.

Метою даної статті є викладення результатів досліджень створення швидкісної машинної арифметики Фібоначі з використанням знакорозрядного та тернарного способів зображення чисел.

Знакорозрядне зображення Фібоначі

Числа Фібоначі генеруються рекурентним співвідношенням:

$$F(i)=F(i-1)+F(i-2),\quad F(1)=F(0)=1. \tag{1}$$

У Фібоначієвих системах числення (ФСЧ) будь-яке натуральне число зображується у вигляді

$$N=\sum_{i=0}^{n-1} Ai.F(i),\qquad Ai\ 0\{-1,0,1\}. \tag{2}$$

Загалом, за допомогою (2) є три форми зображення, а саме :

— повне тернарне, при якому використовуються всі номери ряду, як парні, так і непарні. Цю форму будемо називати знакорозрядним кодом Фібоначі (ЗКФ);

— тернарне за парним, при якому використовуються тільки парні номери ряду, тернарний код Фібоначі за парним (ТКФп);

— тернарне за непарним, при якому використовуються тільки непарні номери ряду, тернарний код Фібоначі за непарним (ТКФн).

Доведено [1] еквівалентність тернарних, звичайного бінарного (БКФ) та кватернарного зображень. При ЗКФ можна зобразити числа в діапазоні $(-M, M)$, де $M=F(m+1)-1$; m є число розрядів. Причому, якщо позначити кодову надлишковість через R, тоді n і m означатимуть кількість розрядів надлишкового і ненадлишкового зображень відповідно, і маємо: при $n = 2l$, $m = \log_2 (F(2+l) - 1) + 1$, $n \to\infty$, $R = \lim ((n/m) - 1) = 1{,}88$, тому що для кожного тернаного розряду потрібно два двійкових. Оскільки $F(i) - F(i-1) - F(i-2) = 0$, то:

— нуль зображається неоднозначно, що ускладнює визначення нульового значення;

— ускладнюється порівняння чисел. Враховуючи нульові триплети $1\ {-1}\ {-1}$ та $-1\ 1\ 1$, а також можливі заміни $1\ 0\ {-1}$ на $0\ 1\ 0$ та $-1\ 0\ 1$ на $0\ {-1}\ 0$, можна визначити форму зображення, при якій код числа має мінімальну арифметичну вагу. В мінімальній формі код числа записується так, що між одиницями є принаймні два нулі. Це можна використовувати для контролю.

Арифметика в ЗКФ

Виходячи з (1), можна отримати

$$F(i)+F(i)=F(i+1)+F(i)-F(i-1). \tag{3}$$

Цей вираз може бути використаний для додавання двох одноіменних розрядів. При цьому додавання розглядається як процес генерацій розрядної суми Si на F(i) та двох переносів Li на F(i+1) та Pi на F(i−1). Додавання виконується згідно табл. 1.

При додаванні розрядів типу $1 + 0$ та $-1 + 0$ є дві можливості утворення результату.

Пропонується керувати генерацією і поширенням переносів залежно від цифр у сусідніх розрядах із тим, щоб обмежити їх дії.

Таблиця 1

Ai	Bi	Li	Si	Pi
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	−1	0	−1	0
-1	1	0	0	0
1	1	1	1	−1

Таблиця 2

Ai	Bi	Li	Si	Pi
0	0	0	0	0
-1	1	0	0	0
1	1	1	1	-1
1		1	0	-1
−1	0	−1	0	1

Додавання реалізується в два етапи. У відповідності з теорією знакорозрядного зображення [2]:

$$S = A + B = (A + B^+) + B^- = C + B^- . \qquad (4)$$

При цьому число N розглядається як складене із додатньої N^+ та від'ємної N^- частин. На першому етапі додавання виконується над тернарними цифрами A та невід'ємними B^+ з генерацією переносів (табл. 2).

Потім переноси поширюються у відповідності з таким виразом:

$$L_i^- = P_i^+ = P_{0i}^+ \wedge ((P_{0i+1}^+ \vee L_{0i-1}^+) \vee (P_{0i+1}^- \wedge L_{0i-1}^- \wedge Ai^+ \wedge Bi^+)). \qquad (5)$$

Отримані переноси утворюють 2 числа: L і P, які додаються до отриманої суми до тих пір, поки обидва не будуть дорівнювати нулю. Результат цього етапу, позначений C, буде додаватися з від'ємною частиною другого доданка. Додавання виконується так, як і на першому етапі, з тією різницею, що змінюються знаки.

Приклад 1. Додати A = 0 1 1 0 1−1 1 0 = 23 і B = 0 0 1 1−1−1 0 1 = 9

	0 1 1 0 1−1 1 0	A
+	0 0 1 1 0 0 0 1	B^+
	0 0 1 0 1 0 0 1	S
+	0 1 1 1 0−1 1 0 0	L
+	0 0 0−1−1−1 0 1−1	P
	1 1 1−1−1 1 1 0	C
+	0 0 0 0 0−1−1 0 0	B^-
	1 1 1 0−1 0 1 0	S
	0 0 0−1 0−1 0 0 0	L
+	0 0 0 0 0 1 0 0 0	P
	1 1 0 0−1 0 1 0	A + B = 32.

При додаванні двох чисел, зображених в ЗКФ, переноси з i-го розряду не поширюються далі, чим на три розряди, як у бік старших, так і в бік молодших розрядів.

Віднімання виконується точно таким же чином. Необхідно лише поміняти знак віднімання на додавання. Той факт, що переноси Li та Pi протилежні за знаком і зв'язані між собою, може бути використаний для здійснення контролю над операцією.

В роботі [3] наведені алгоритми множення та ділення, які залишаються в силі і при знакорозрядному зображенні. Результатом множення є сума двох операндів:

$$A.B = A.B^+ + A.B^- = A.Bi^+.F(i) + A.Bi^-.F(i). \qquad (6)$$

При застосуванні згаданого алгоритму слід враховувати той факт, що цифри множника можуть бути як додатніми, так і від'ємними. Тоді алгоритм множення в ЗКФ буде таким:

1. Встановити значення множників A і B, суму частинних добутків S:=0, номер поточного розряду i:=1.

2. Обчислити добуток множника на поточне число Фібоначі, A.F(i).

3. Якщо Bi = 1, то S:= S + A.F(i); перейти до п. 4, інакше, якщо Bi = −1, то S:= S − A.F(i).

4. i:= i + 1, розглядати наступний розряд.

5. Якщо всі цифри множника ще не розглянуті, то перейти до п. 2, інакше зупинити процес; результат є S.

Відзначимо, що даний алгоритм не є ефективним, якщо множник не зображений у мінімальній формі. Це пояснюється тим, що виконуються зайві операції, обумовлені присутністю в множнику триплетів типу 1−1−1, 1 0 −1, 0 1 1, які можна було би замінити на 0 0 0, 0 1 0, 1 0 0. Цього недоліку позбавлений алгоритм множення в ТКФ. Алгоритм ділення буде таким:

1. Встановити початкові значення діленого A, дільника B, остачі R та частки Q.

2. Якщо A = B, то Q:= 1, інакше якщо R < B то Q:= 0 і перейти до п. 4.

3. Обчислити B.F(i), якщо R ≥ B.F(i), то i:=i+1, інакше R:=R − B.F(i), Qi+1:=1, повторити п. 3.

4. Якщо A < 0, то Sg(R):= '−', якщо Sg(A) ≠ S(B), то Sg(Q):= '−'. Зупинити ділення.

Тернарне зображення Фібоначі (ТКФ)

Під ТКФп (відповідно ТКФн) розуміється зображення натуральних чисел у вигляді (2), при якому всі індекси парні є (відповідно непарні). При такому зображенні діапазон чисел лежить у межах (−M, M), де M=F(m+1)−1 при ТКФп і M=F(m+1) при ТКФн. Від'ємні числа зображуються без особливих прийомів. Знак числа співпадає зі знаком найбільш значущої цифри коду числа. Нуль має одну форму зображення, при якій на всіх розрядах стоять нулі. Це полегшує операцію визначення нульового значення. Надлишковість можна обчислити, маючи на увазі, що за допомогою n-розрядного коду можна зобразити в ТКФ 2F(n+1)−1 чисел; а в ненадлишковому коді для зображення цих же чисел потрібно $m = \log_2(F(n+1)-1)$ двійкових розрядів. Звідси при $n \to \infty$ $R = \lim((n/m)-1) = 0{,}5$.

Арифметика в ТКФ

Розглянемо, як можна виконати арифметичні операції з підвищеною швидкістю в ТКФ. Оскільки ТКФп і ТКФн еквівалентні, то ми можемо обмежитися розглядом ТКФп, знаючи, що отримані результати будуть дійсними і для ТКФн.

При розробці алгоритму основна задача полягає в тому, щоб обмежити поширення переносів. Для того, щоб досягти поставленої мети, пропонується скористатися принципом керування генерацією та дозволом розповсюдження переносів при додаванні одноіменних розрядів, що можливо завдяки властивостям чисел Фібоначі [4].

$$2F(I) = F(i+2) - F(i) + F(i-2). \tag{7}$$

Це дозволяє записати F(i) = F(i+2) − 2F(i) + F(i−2) або F(i) = F(i). Тоді є можливість керування переносами при додаванні цифр 1 + 0 або −1 + 0. У табл. 3 наведені дані для додавання одноіменних розрядів.

Таблиця 3

Ai	Bi	Li	Si	Pi
0	0	0	0	0
−1	1	0	0	0
−1	−1	−1	1	−1
1	1	1	−1	1
1	0	1	−2	1

Тут додавання виконується за схемою $S = A + B = (A + B^{+}) + B^{-} = C + B^{-}$. Для кожного етапу спочатку генеруються початкові переноси, потім дозволяється або забороняється їх розповсюдження в залежності від стану сусідніх розрядів. На першому етапі початкові переноси генеруються у відповідності з табл. 3. При цьому розрядна сума зображується логічно рівною −2, коли в даний розряд приходить хоч би один перенос Li або Pi, рівний одиниці. Очевидно, що при цьому розповсюдження даного переносу закінчується на цьому розряді. Таким чином умова розповсюдження переносів буде така:

$$L_i = P_i = P_{0i} \wedge (S_i \wedge (S_{i-2} \vee P_{0i+2} \vee L_{0i-2} \vee S_{i-2})). \qquad (9)$$

Отримані переноси L і P, які додаються з сумою S, якщо хоч би один з них був відмінним від нуля. Оскільки розрядна сума та переноси мають протилежні знаки, то зрозуміло, що через визначену кількість додавань S з L та P, всі розрядні переноси будуть дорівнювати нулю. Отримане після першого етапу число C є тернарним і його необхідно додавати з від'ємною частиною другого доданку B^{-}. Додавання виконується за аналогічними правилами, що і на першому етапі з врахуванням того, що треба поміняти знаки. Обмеження розповсюдження переносів досягається тими ж способами.

Слід відзначити, що при додаванні двох чисел, зображених в ТКФ, переноси не розповсюджуються далі, ніж на два розряди, як в бік молодших, так і в бік старших розрядів.

Приклад 2. Додати A = 1 1 0 1 −1 1 0 і B = 0 1 1 −1 −1 0 1.

0	0	1	1	0	1	−1	1	0	A
+0	0	0	1	1	0	0	0	1	B^{+}
0	0	−2	−1	−2	−2	−1	−2	−2	S
+0	1	1	1	1	0	1	1	0	L
+0	0	0	1	1	1	1	0	1	P
0	1	−1	1	0	−1	1	−1	−1	C
+0	0	0	0	0	−1	−1	0	0	B^{-}
0	1	−1	1	0	1	0	2	2	S
+0	0	0	0	−1	0	−1	−1	0	L
0	0	0	0	0	0	−1	0	−1	P
0	1	−1	1	−1	1	1	1	1	S
+0	0	0	0	0	−1	0	0	0	L
+0	0	0	0	0	0	0	−1	0	P
0	1	−1	1	−1	0	1	0	1	A + B.

В ТКФн A = 537, B = 171, A + B = 708. В ТКФп A = 332, B = 106, A + B = 438.

Віднімання виконується як додавання після зміни знаків цифр від'ємника на протилежні. Оскільки дія переносів суворо локалізована незалежно від довжини доданків, то додавання може виконуватися за допомогою комбінаційних схем за постійний час.

По сутності числа в ТКФ зображуються у вигляді послідовності цифр зі знаком, тобто ми маємо діло з окремим випадком розглянутого вище ЗКФ. Тоді розроблений для цього способу зображення алгоритм множення може бути застосований і тут. Тобто для множення на число Фібоначі можемо застосувати співвідношення

$$F(i).B = F(i-1).B + F(i-2).B.$$

Проте при цьому прийдеться множити число B на парні та непарні за індексом числа Фібоначі. Це неефективно, оскільки виконується одне зайве множення, хоч використовуються лише парні чи непарні індекси. Операцію можна прискорити, якщо позбутися зайвих операцій. Для цього можна скористатися такою формулою для множення двох чисел Фібоначі:

$$F(i).F(j) = \sum_{l=2}^{n} F(i + j - 2 - 4(m - l)) + F(r - 2m), \qquad (10)$$

де m= [t/2], t = inf(i,j), r = sup(i,j).

Тоді для множення числа B на F(i) ми застосовуємо (10) для всіх розрядів B із наступним додаванням окремих добутків. Взагалі при тернарному зображенні можна мати такі випадки: 1) множене зображене в ТКФп, множник — у ТКФп; 2) множене — в ТКФп, множник — у ТКФн; 3) множене — в ТКФн, множник — у ТКФн; 4) множене —в ТКФп, множник — у ТКФп. Легко показати, виходячи з (10), що тільки в першому випадку результат множення зображений також у ТКФп. У всіх інших випадках результат зображений всіма розрядами. Тоді ТКФп є кращою формою, тому що немає необхідності перетворення для подальшого використання. Якщо всі індекси парні, то (10) має вигляд:

$$F(i).F(j) = \sum_{l=1}^{n} F(i + j - 2 - 4(j/2 - l)). \tag{11}$$

Праву частину формули (10) можна розглядати як складену з двох частин: $\sum_{l=1}^{n} F(i + j - 2 - 4(j/2 - l))$ і $F(r - 2(m - 1))$. Тому добуток двох чисел Фібоначі з додатніми індексами є сумою двох чисел: першого, зсунутого на одну позицію вліво — $F(i).F(j-2)$, та другого, зсунутого на К-1 позицій вправо — $F(i)$, $K = j/2 + 1$.

Значить, якщо відомо $A.F(i-2)$, то $A.F(i)$ можна знайти шляхом додавання $A.F(i-2)$, зсунутого на одну позицію вліво, та А, зсунутого на К−1 позицій вправо. Відзначимо, що при зсуві А вправо молодші розряди втрачаються. Відповідно, коли А дорівнює нулю, множення зводиться до зсуву вліво.

Алгоритм множення чисел у ТКФн буде таким:

Приклад 3. A = 1 0 1 1 = 25, F(5) = 8 в ТКФн

0 0 1 0 1 1 0	L1.A.0
+ 0 0 0 0 1 0 1	0.A.R1
0 0 1 1 0 0 −1 1	A.F(3)
0 1 1 0 0 −1 1 0	L1.(A.F(3)).0
+ 0 0 0 0 0 1 0 0	0.A.R1
0 1 1 0 0 0 1 0	A.F(5) = 200.

1. Встановити множники А і В, результат Р рівним нулю, частковий добуток S рівним А, молодший розряд множника рівним поточному розрядному і;

2. Якщо поточний розряд дорівнює 1, то додати частковий добуток із результатом, P:= P + S; інакше, якщо поточний розряд дорівнює −1, то віднімати частковий добуток від результату, P:= P − S;

3. Взяти наступний розряд як поточний, i:= i + 2. Якщо всі розряди ще не розглянуті, то обчислити поточний частковий добуток, S:= A.F(i); перейти до п. 2;

4. Зупинити процес множення.

В [3] запропонований алгоритм ділення, при якому наступна ненульова цифра має вагу (і−1)-го числа Фібоначі, якщо добуток дільника на (і−2)-й число Фібоначі більший за поточну остачу (тобто $F(i).B > R$).

При використанні цього алгоритму для чисел, зображених у ТКФн, зокрема у випадку, коли $F(i-1).B < R < F$ (i0.B, i = 2k, k = 1,2,3, ...) наступна цифра частки повинна мати вагу $F(i-1)$. Але оскільки використовуються тільки парні розряди, то вага розряду буде $F(i-2)$, що дає невірний результат. Вирішити цю проблему можна, якщо дописати 1 і−1 в і-й і в (і−2)-й розряд частки 1 і−1 відповідно. Проте і це створює іншу проблему. Припустимо, що здійснено описану заміну, але, якщо в (і−2)-й розряд необхідно ставити цифру з таким же знаком, то виникає нова проблема. Вийти з цього становища можна, якщо на кожному кроці перевіряти відношення величин та знаків остачі і дільника. З урахуванням цього сформулюємо алгоритм ділення в ТКФ:

1. Встановити початкові значення діленого A, дільника B, остачі R:=A, номера поточного розряду i:= 2, ознаку парності поточної позиції,

2. Якщо поточна остача меньша дільника, то Q:= 0, перейти до п.7.

3. Замінити ознаку парності на протилежне значення; обчислити добуток дільника на наступне число Фібоначі, F(i+1).B; якщо добуток менше чи дорівнює поточній остачі, то повторити п. 3.

4. Якщо i — парне, то встановити цифри частки Qi:=1, Qi−2:= −1; інакше, якщо i — непарне, то встановити цифру частки Qi:=1.

5. Взяти як поточну остачу R − F(i − 1).B, перейти до п. 3.

6. Якщо знаки діленого та дільника протилежні, то замінити всі значущі цифри частки на протилежні.

7. Зупинити процес ділення.

Швидкість додавання в ЗКФ і в ТКФ підвищується в $Г_{зкф}$ і $Г_{ткф}$ разів відповідно, причому:

$$Г_{зкф} = T_{бкф}/T_{зкф} = M_p N_{леб}/N_{лез}, \tag{12}$$

$$Г_{ткф}=T_{бкф}/T_{ткф}=M_p N_{леб}/N_{лет}, \tag{12a}$$

де $N_{леб}$, $N_{лез}$ і $N_{лет}$ — кількість елементів у найбільш довгому шляху проходження сигналу, $T_{бкф}$, $T_{зкф}$ і $T_{ткф}$ — час додавання для СЧ БКФ, ЗКФ і ТКФ відповідно; M_p — найбільша кількість переносів. При n=32 $Г_{зкф}=4$ і $Г_{ткф}=5$.

ВИСНОВКИ

Розглянуті СЧ мають визначені переваги.

1. Перехід до тернарного зображення дозволяє вводити визначену інформаційну надлишковість, яка дає можливість багатозначного зображення чисел. Це дозволяє отримати підвищену швидкість обробки завдяки обмеженню розповсюдження переносів при додаванні, а швидкість множення та ділення підвищується за рахунок відмови від зайвих операцій.

2. Надлишковість дозволяє здійснювати контроль над арифметичними операціями шляхом використання мінімальної форми або протилежних переносів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ligomenides P., Newcomb R. Equivalence of some binary, ternary and quaternary Fibonacci computers // Proc. 11th Int. Symp. on Multiple-valued Logic, May 27—29, 1981, pp. 82—84.

2. Avizienis A. Signed-digit number representation for fast parallel arithmetic // IRE Transaction on Electronic Computers Vol. EC-10, Sept. 1961, pp. 389—400.

3. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. — М: Радио и Связь, 1984. —151 с.

4. Hoggatt V.E., Jr. Fibonacci and Lucas numbers. — Houghton Mifflin Company, Boston 1969.

5. Поспелов Д. А. Машинная арифметика вычислительных устройств дискретного действия. — М.: Высшая школа, 1978. — 308 с.

Кафедра обчислювальної техніки