АЛГОРИТМИ ЛОГІЧНОГО ВИВЕДЕННЯ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ СКЛАДНОСТІ

В.П. Семеренко

Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна

Однією із глобальних проблем в сфері штучного інтелекту є проблема представлення і обробки знань на основі логічного виведення.

Якщо деяке логічне твердження задане посилками $A_1, A_2, \ldots, A_n$ і висновком C, тоді перевірка його коректності буде еквівалентною виконанню розв'язної процедури, тобто перевірці того, чи є формула $F(A_1, A_2, \ldots, A_n, C)$ тотожно-істинною (загальнозначущою).

В численні висловлювань можна перейти від формули $F(A_1, A_2, \ldots, A_n, C)$ до логічної (булевої) функції $f(A_1, A_2, \ldots, A_n, C)$, і тоді ця формула представляється у вигляді диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ) або кон'юнктивної нормальної форми (КНФ) логічної функції. В цьому випадку розв'язна процедура полягає в розпізнавання того, до якого класу належить логічна функція f: тотожно-істинних, тотожно-хибних або нейтральних функцій.

Аналогічну розв'язну процедуру можна представити і в термінах числення предикатів.

В сучасному логічному виведенні основним методом виконання розв'язної процедури є принцип резолюцій Робінсона [1]. Згідно відомої теореми про повноту методу резолюцій логічне виведення на основі цього методу завершиться успішно (буде отримано пустий диз'юнкт) тоді і тільки тоді, коли відповідна логічна функція f є тотожно-хибною. Якщо ж функція f належить до класу нейтральних функцій, тоді пустий диз'юнкт не може бути отримано, значить, розв'язна процедура на основі принципу резолюцій Робінсона ніколи не завершиться.

В задачах логічного виведення на основі принципу резолюцій Робінсона, а також інших відомих стратегій логічного виведення (наприклад, на основі генетичних алгоритмів чи нечіткого адаптивного методу [2]), використовується недетермінований пошук [3], що змушує їх класифікувати як NP-складні задачі [4]. Тому задачі логічного виведення необхідно звести до задач класу P і розробити для них точні алгоритми поліноміальної складності.

Для виконання такої розв'язної процедури в численні висловлювань і в численні предикатів першого порядку пропонується математичний апарат булевої алгебри кубічних функцій [5], яка ізоморфна булевій алгебрі логічних функцій. Операціям кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення в булевій алгебрі логічних функцій відповідають операції перетину, об'єднання і доповнення кубів в булевій алгебрі кубічних функцій, а нормальним формам відповідають кубічні покриття.

Кубічне K - покриття (кубічне Q - покриття) деякої логічної функції f – це представлена в кубічній формі (тобто в алфавіті $\{0,1, x\}$) КНФ прямої функції f (інверсної функції $\overline{f}$). Кожному диз'юнкту КНФ відповідає один куб покриття, пряме (інверсне) значення змінної в диз'юнкті КНФ відповідає одиничному (нульовому) значенню компоненти куба покриття, а число n змінних булевої функції дорівнює числу n компонент куба покриття. Якщо в диз'юнкті КНФ відсутня змінна, тоді їй відповідатиме значення x в компоненті куба. X_n - це куб, всі n компонент якого дорівнюють x.

Кубічне D - покриття (кубічне R - покриття) деякої логічної функції f – це представлена в кубічній формі ДНФ прямої функції f (інверсної функції $\overline{f}$). Відповідність між диз'юнктами ДНФ і кубами D - покриття (R -покриття) таке ж, як і для K - покриття (Q -покриття).

В [6] доведено, що

а) для тотожно-істинної функції покриття K і R пусті, а мінімальні покриття D і Q рівні кубу X_n: $D = X_n, \quad Q = X_n, \quad K = \varnothing, \quad R = \varnothing$;

б) для тотожно-хибної функції покриття D і Q пусті, а мінімальні покриття K і R

рівні кубу X_n: $D=\varnothing,\quad Q=\varnothing,\quad K=X_n,\quad R=X_n$;

в) для нейтральної функції покриття D, Q, K і R не пусті і не рівні кубу X_n.

Таким чином, клас булевої функції можна визначити по вигляду кубічного покриття. Якщо відомі відповідні пари покриттів (D і K, D і R, K і Q, R і Q), тоді можна відразу розпізнати клас функції. Найчастіше відомим є лише один вид із вказаних пар покриттів. Визначення другого виду покриття, як і визначення інверсної логічної функції $\overline{f}$ по відомій прямій функції f, може бути NP-складною задачею, якщо використовувати традиційні методи.

В булевій алгебрі кубічних функцій перехід між різними видами покриттів строго формалізований і не вимагає великих обчислювальних витрат. Загальна формула, яка пов'язує між собою вказані пари покриттів:

$$X_n = D \quad K,\qquad X_n = D \quad R,\qquad X_n = K \quad Q,\qquad X_n = R \square Q. \tag{1}$$

Кожне покриття із відповідної пари покриттів в (1) визначається за допомогою операцій над кубами. Наприклад, так можна визначити R-покриття по відомому D-покриттю, яке складається із m кубів d_i ($i=1\div m$):

$$R = X_n \# D = (\ldots((X_n \# d_1)\# d_2)\#\ldots\# d_m). \tag{2}$$

Безпосереднє обчислення по формулі (2) призведе до дуже швидкого збільшення кількості #-операцій між парами кубів на кожному кроці. Лавинного ефекту збільшення обчислень можна позбутися, якщо формулу (2) представити і вигляді:

$$R = X_n \# D = (X_n \# d_1)\cap(X_n \# d_2)\cap\ldots\cap(X_n \# d_m). \tag{3}$$

В цьому випадку максимальна кількість бінарних операцій між кубами обмежена такими значеннями: m #-операцій та $n^2(m-1)$ $\cap$-операцій. Таким чином, алгоритм логічного виведення на основі (3) матиме складність $O(n^2)$.

Отримати лінійну складність обчислень $O(n)$ можна при переході до паралельної обробки даних. Пропонується використати двоступеневий обчислювальний конвеєр: перша ступінь для виконання #-операцій і друга ступінь для $\cap$-операцій. Друга ступінь конвеєра починає працювати одночасно з першою із затримкою лише на один такт. Конвеєрна обробка може бути реалізована як апаратно, так і програмно на рівні процедур.

Литература

1. Чень Ч. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем: / Ч. Чень, Р. Ли. – Наука, 1983. – 360 с.
2. Li, Q. Fuzzy Adaptive Search Method for Parallel GA Based on Diversity Measure: / Q. Li, Y. M. Maeda // Biomedical Soft Computing and Human Sciences. – 2008. – Vol.13, No.1.
3. Вагин В.Н. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / В.Н. Вагин, Е.Ю. Головина, А.А. Загорянская, М.В. Фомина. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 704 с.
4. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 419 с.
5. Семеренко В.П. Систолическая реализация кубических функцій / В.П. Семеренко // Электронное моделирование. – 1992. – №1. – С. 21-25.
6. Semerenko V.P. An Algebraic Method to Identify Classes of Formulas in Calculus of Predicate / V.P. Semerenko // International Journal of Biomedical Soft Computing and Human Sciences. – 2012. Vol.18, No.1, pp. 69-76.