УДК 004.925

С. О. РОМАНЮК, О. В. РОМАНЮК, Д.Л.БЛАГОДИР
Вінницький національний технічний університет

ВИЗНАЧЕННЯ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ДВОХ ВЕКТОРІВ, ЗАДАНИХ У ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ, ДЛЯ ЗАДАЧ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

Запропоновано нову формулу для визначення скалярного добутку двох векторів, заданих у полярних координатах, яка дозволяє зменшити обчислювальні витрати та прискорити процес формування реалістичних зображень. Запропоновано структурну схему блока визначення скалярного добутку двох векторів, у якому реалізовано нову формулу.

Ключові слова: вектор, скалярний добуток, полярна система координат.

S.O. ROMANIUK, O. V. ROMANIUK, D. L. BLAGODYR
Vinnytsia National Technical University

PROCEDURE OF DETERMINING SCALAR PRODUCT OF TWO VECTORS GIVEN IN POLAR COORDINATES FOR THE TASKS OF COMPUTER GRAPHICS

There had been proposed new formula for determining the scalar product of two vectors given in polar coordinates, which reduces the computational cost and accelerate the formation of realistic images. There had been proposed a block diagram of unit for definition of scalar product of two vectors, in which new formula was implemented.

Вступ

Сьогодні в галузі комп'ютерної графіки велика увага приділяється формуванню реалістичних просторових зображень, які максимально відтворюють конструктивні та образотворчі властивості об'єктів реального світу. Одним з найважливіших і трудомістких етапів процесу формування реалістичних зображень є етап зафарбовування [1-3], на якому для кожної точки зображення розраховується значення інтенсивності кольору відповідно до обраної моделі освітлення. Для різних моделей освітлення спільною є процедура визначення скалярного добутку двох векторів, яка виконується за формулою [3]

$$\vec{N} \cdot \vec{L} = \vec{N}_x \cdot \vec{L}_x + \vec{N}_y \cdot \vec{L}_y + \vec{N}_z \cdot \vec{L}_z, \tag{1}$$

де вектор нормалі $\vec{N}$ і вектор до джерела світла $\vec{L}$ подані у декартовій системі координат.

Найбільш поширеною є модель освітлення Бліна [2] з дифузним ламбертовим відбиттям, яка окрім знаходження скалярного добутку $\vec{N} \cdot \vec{L}$ потребує знаходження скалярного добутку вектора нормалі $\vec{N}$ і вектора півшляху $\vec{H} = \left(\vec{L} + \vec{V}\right) / \left|\vec{L} + \vec{V}\right|$, де $\vec{V}$ - вектор спостереження. Дана модель освітлення є емпіричною. На відміну від неї модель освітлення Торренса-Сперроу [1] базується на фізичних законах оптики та статистичному аналізу структури мікрограней поверхні, тому окрім скалярних добутків $\vec{N} \cdot \vec{L}$ і $\vec{N} \cdot \vec{H}$ вимагає розрахунку значень $\vec{N} \cdot \vec{V}$, $\vec{H} \cdot \vec{L}$ та $\vec{H} \cdot \vec{V}$. Оскільки такі розрахунки необхідно проводити для кожної точки зображення, то процес зафарбовування є досить трудомістким, що впливає на швидкість формування кінцевого зображення. Тому питання зменшення обчислювальної складності процесу зафарбовування є досить актуальним.

Аналіз відомих формул знаходження скалярного добутку двох векторів, заданих у полярних координатах

На сьогодні широкого поширення набули методи формування реалістичних зображень, які використовують полярну систему координат для завдання векторів [4-6].

Зокрема, Кім Дж. у роботі [5] для визначення добутку двох векторів, заданих у полярних координатах, запропонував таку формулу:

$$\vec{N} \cdot \vec{L} = cos\,\alpha_N cos\,\alpha_L + sin\alpha_N sin\alpha_L cos\left(\beta_L - \beta_N\right). \tag{2}$$

Розрахунок формули (2) вимагає виконання 3 операцій множення, 2 операцій додавання та 5 тригонометричних операцій.

У роботі [6] Ікедо Т. запропонував таку формула для визначення скалярного:

$$\vec{N} \cdot \vec{L} = cos\,\alpha_N \left\{cos\,\alpha_L \left[cos\left(\beta_L - \beta_N\right) - 1\right]\right\} + cos\left(\alpha_L - \alpha_N\right). \tag{3}$$

Для розрахунку формули (3) необхідно виконати 2 операції множення, 3 операції додавання, 1 операцію декрементування та 4 тригонометричних операції.

Недоліком формул (2) і (3) є велика кількість операцій множення та тригонометричних операцій, які мають велику обчислювальну складність. Враховуючи, що для кожної точки зображення за різними моделями освітлення необхідно знаходити від одного до трьох скалярних добутків двох векторів, то формування реалістичних зображень є досить трудомістким процесом кінцевої візуалізації, який суттєво впливає на продуктивність формування графічних сцен. Тому, актуальним є питання зменшення обчислювальної складності процесу визначення скалярного добутку векторів.

Постановка задачі

Метою роботи є знаходження простішого виразу для визначення скалярного добутку векторів, заданих у полярних координатах, який, на відміну від відомих, характеризувався б меншою обчислювальною складністю та простотою апаратної реалізації.

Спрощення процедури визначення скалярного добутку двох векторів, заданих у полярних координатах

Розглянемо розрахунок значення $\vec{N}\cdot\vec{L}$ у випадку, коли вектори задано у полярних координатах.

Між декартовими та полярними координатами вектора мають місце такі співвідношення [3]:

$$N_x = \cos\alpha_N \cdot \sin\beta_N\,,\;\; N_y = \sin\alpha_N\,,\;\; N_z = \cos\alpha_N \cdot \cos\beta_N\,, \tag{4}$$

Замінимо у формулі (1) декартові координати векторів на полярні з урахуванням формули (4). Тоді отримаємо

$$\vec{N}\cdot\vec{L} = \cos\alpha_N \sin\beta_N \cdot \cos\alpha_L \sin\beta_L + \sin\alpha_N \sin\alpha_L + \cos\alpha_N \cos\beta_N \cdot \cos\alpha_L \cos\beta_L\,.$$

В останньому виразі винесемо за дужки спільний член $\cos\alpha_N \cos\alpha_L$

$$\vec{N}\cdot\vec{L} = \cos\alpha_N \cos\alpha_L\left(\sin\beta_N \sin\beta_L + \cos\beta_N \cos\beta_L\right) + \sin\alpha_N \sin\alpha_L\,.$$

Після застосування формули перетворення добутку на суму, отримуємо

$$\begin{aligned}\vec{N}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha_N - \alpha_L\right) + \cos\left(\alpha_N + \alpha_L\right)\right)\cos\left(\beta_N - \beta_L\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha_N - \alpha_L\right) - \cos\left(\alpha_N + \alpha_L\right)\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Уведемо умовні позначення $G_1 = \cos\left(\alpha_N - \alpha_L\right)$ і $G_2 = \cos\left(\alpha_N + \alpha_L\right)$. Тоді формула (5) буде мати такий вигляд

$$\begin{aligned}\vec{N}\cdot\vec{L} &= \frac{1}{2}\left(G_1 + G_2\right)\cos\left(\beta_N - \beta_L\right) + \frac{1}{2}\left(G_1 - G_2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(G_1 + G_2\right)\cos\left(\beta_N - \beta_L\right) + \left(G_1 + G_2\right) - 2G_2\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Після спрощення виразу (6) отримаємо кінцеву формулу для розрахунку $\vec{N}\cdot\vec{L}$

$$\vec{N}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\left(\left(G_1 + G_2\right)\left(\cos\left(\beta_N - \beta_L\right) + 1\right)\right) - G_2\,. \tag{7}$$

Таким чином, запропонована формула (7) дозволяє спростити процедуру розрахунку скалярного добутка між векторами, заданих у полярних координатах, оскільки вимагає виконання лише 1 операції множення, 1 операції зсуву, 1 операції інкрементування, 5 операцій додавання та 3 тригонометричних операцій визначення косинусів кутів, які можна розрахувати з використанням таблиць з наперед прорахованими значеннями косинусів.

На рис. 1 наведено приклад зображення, синтезованого з використання запропонованої формули.

Рис. 1. Приклад зображення, синтезованого з використанням запропонованої формули

Апаратна реалізація запропонованої формули

На рис. 2 наведено структурну схему однієї з можливих апаратних реалізацій запропонованої формули для знаходження скалярного добутку двох векторів, заданих у полярних координатах. Запропонований блок містить регістри RG1-RG7. У регістри RG1-RG4 заносяться значення полярних кутів двох векторів, у регістр RG5 – значення $cos(\alpha_N + \alpha_L)$, у регістр RG6 – значення $cos(\alpha_N - \alpha_L)$, а в регістр RG7 – значення $cos(\beta_N - \beta_L)$. У суматорах SUM1-SUM6 виконуються операції $(\alpha_N + \alpha_L)$, $(\alpha_N - \alpha_L)$, $(\beta_N - \beta_L)$, $(G_1 + G_2)$, інкрементування та віднімання значення G_2 відповідно. Операція $1/2$ реалізована шляхом монтажного зсуву: кожний і-й розряд виходу суматора SUM4 під’єднано до і+1-го розряду першого інформаційного входу блока множення MUL1. За допомогою мультиплексора MX1 на вхід блоку постійної пам’яті PROM1 передаються значення відповідних кутів, а на виході якого формуються значення косинусів цих кутів. Для зберігання значення косинусів при кроці квантування 1/1024 і 12-бітній точності подання полярних кутів ємність блока PROM1 становитиме 1,5 Кб.

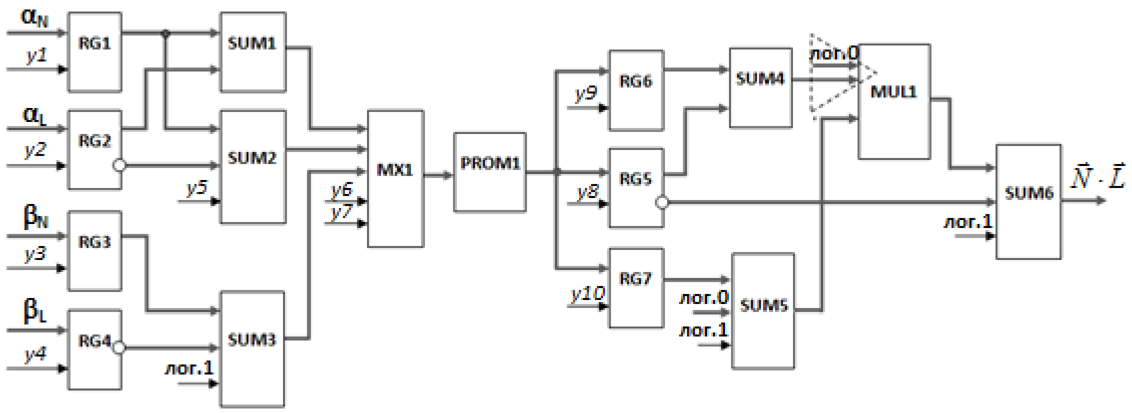

Рис. 2. Структурна схема блока визначення скалярного добутку двох векторів, заданих у полярних координатах

Апаратна реалізація формул (2) і (3) потребувала б значно більших апаратних витрат. Для прикладу, широко поширений завдяки своїй високій швидкодії 12-розрядний помножувач К1802ВР4 містить 11998 інтегральних елементів [7], в той час як 12-розрядний суматор, побудований на трьох 4-розрядних суматорах К133ИМ3 або К134ИМ4, міститиме лише 540 інтегральних елементів [8]. Таким чином, зменшення операцій множення дозволяє суттєво знизити апаратні витрати, що є дуже актуально для мобільних обчислювальних пристроїв.

Висновки

У роботі запропоновано нову формулу для знаходження скалярного добутку двох векторів, заданих у полярних координатах, яка на відміну від відомих формул визначення скалярного добутку векторів, заданих в полярних координатах, містить лише одну операцію множення та три тригонометричні операції, що дозволяє суттєво зменшити обчислювальні та прискорити процес формування реалістичних зображень. Запропонована структурна схема блока визначення скалярного добутку характеризується простотою апаратної реалізації. Для знаходження трьох значень косинусів запропоновано використовувати блок постійної пам’яті, у якому містяться наперед прораховані значення косинусів.

Література:

1. Романюк О. Н. Високопродуктивні методи та засоби зафарбовування тривимірних графічних об’єктів. Монографія. / О. Н. Романюк, А. В. Чорний. – Вінниця : УНІВЕСУМ-Вінниця, 2006. – 190 с.
2. Blinn J. F. Simulation of wrinkled surfaces / J. F.Blinn // Computer graphics and interactive techniques. – ACM Press, 1978. – P. 286–292.
3. Shirley P. Fundamentals of computer graphics / P. Shirley, S. Marschner. – AK Peters, 2009. – 752 p. – ISBN 13: 978-1568-8146-98.
4. Романюк О.Н. Метод прискореної імітації нерівностей на зображеннях поверхонь віртуальних об’єктів з використанням полярних координат / О. Н. Романюк, О.В. Романюк, Д.Л. Благодир // Наукові праці ДонНТУ. Серія: Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. – 2012. – № 16 (204). – С. 91–94.
5. Kim J. S. A fast and efficient bump mapping algorithm by angular perturbation / J. S. Kim, J. H. Lee, K.H. Park // Computers and Graphics. – 2001. - №25 (5). – P. 401-407.
6. Ikedo T. Illumination Engine for a Billion Pixels per Second / T. Ikedo // Technical Report HCIS-2203-03. – 2003. – 32 p.

7. Нефедов А.В. Интегральные микросхемы и их зарубежные аналоги: Справочник. Т.11. – М.: ИП РадиоСофт, 2001. – 512 с.
8. Нефедов А.В. Интегральные микросхемы и их зарубежные аналоги: Справочник. Т.1. – М.: ИП РадиоСофт, 2000. – 512 с.