

Ю. Г. Ведміцький
Д. О. Медончак
М. В. Постернак
Дм. А. Кушнір
О. В. Шарандак

ЗАКОН ВІДОБРАЖЕННЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ДВОПРОВІДНОЇ ДОВГОЇ ЛІНІЇ В ЙОГО КОМПЛЕКСНУ ФОРМУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, які спостерігаються в одновимірній однорідній стаціонарній динамічній системі з розподіленими параметрами на прикладі двопровідної довгої лінії, для якої на основі рівнянь Хевісайда (телеграфних рівнянь) розкрито закон відображення одновимірного хвильового рівняння довгої лінії в його комплексну форму. Отримані результати доповнюють вихідний базис теорії довгої лінії.

Ключові слова: теоретична електротехніка, електричне коло з розподіленими параметрами, довга лінія, динамічна система, диференціальні рівняння в частинних похідних, телеграфні та хвильові рівняння, напруга, струм

Abstract

The article deals with the mathematical identification of physical processes observed in a one-dimensional homogeneous stationary dynamic system with distributed parameters on the example of a two-wire long line, for which the law of mapping the one-dimensional wave equation of the long line into its complex form is revealed on the basis of the Heaviside equations (telegraphic equations). The obtained results complement the initial basis of the long line theory.

Keywords: theoretical electrical engineering, electric circuit with distributed parameters, long line, dynamic system, partial differential equations, telegraph and wave equations, voltage, current

Робота присвячена уточненню окремих положень *теорії довгої лінії*. Зазначена теорія є важливою складовою вихідного базису *теоретичних основ електротехніки* [1-7], оскільки виявляє та розкриває фундаментальні властивості електричних кіл з розподіленими параметрами. Необхідність таких уточнень обумовлена багатьма чинниками. Найістотнішими з них для авторів стала потреба в пошуку довершеної форми математичного узагальнення щодо опису фізичних процесів, які спостерігаються або можуть спостерігатися в *двопровідній довгій лінії* – одновимірній електромагнітній системі з розподіленими параметрами під час транспортування нею електричної енергії або передачі інформації. Зазначене і є *метою* нашої роботи.

Отже, розглянемо двопровідну довгу лінію як однорідну стаціонарну динамічну електричну систему з розподіленими параметрами.

Фізичні процеси в такому електричному колі описуються системою лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних *О. Хевісайда*, названих в теоретичній електротехніці “*телеграфними рівняннями*”:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

де R_0, L_0, G_0, C_0 – первинні параметри довгої лінії, які і характеризують її електромагнітні властивості. За умовою однорідності та стаціонарності системи ці параметри не є функціями ні одновимірної просторової координати x , ні часу t . Рівняння системи (1) складено відносно миттєвих напруги та струму як функцій водночас двох незалежних змінних: $u = u(x, t)$ та $i = i(x, t)$.

На основі системи (1) неважко отримати і *хвильове рівняння двопровідної довгої лінії*, складене або відносно миттєвої напруги $u = u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial u}{\partial t} - R_0 G_0 u = 0, \quad (2)$$

або миттєвого струму $i = i(x, t)$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial i}{\partial t} - R_0 G_0 i = 0. \quad (3)$$

Хвильове рівняння довгої лінії є одновимірним лінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних 2-го порядку і належить до класу *рівнянь математичної фізики* виду

$$A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0. \quad (4)$$

Надалі зосередимо нашу увагу на *синусоїдному режимі роботи* довгої лінії, позаяк такий режим роботи є надзвичайно важливим: і для електроенергетичних та електромеханічних систем, і для інформаційних.

За синусоїдного режиму роботи розв'язком хвильового рівняння, наприклад, рівняння (2), буде функція виду

$$u(x, t) = U_m(x) \sin(\omega t + \psi_u(x)). \quad (5)$$

Як відомо, основним методом аналізу електричних кіл в синусоїдному режимі роботи є *символічний метод* (або його варіація – метод комплексних амплітуд). В основу символічного методу покладено бієктивне відображення за заданим законом миттєвих синусоїдних напруг та струмів, залежних від часу, в їх комплексні зображення, для яких притаманною буде відсутність зазначеної залежності.

За такого відображення в одновимірних електричних системах з розподіленими параметрами, наприклад, в довгій лінії, комплексні напруги та струми будуть функціями лише просторової координати, в нашому випадку $\underline{U}(x)$ та $\underline{I}(x)$.

Скориставшись зазначеним методом, для хвильового рівняння (2), складеного відносно миттєвої напруги, як функції виду (5), та на його основі відносно комплексу діючого значення напруги

$$\underline{U}(x) = \frac{U_m(x)}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u(x)} \quad (6)$$

побудуємо *диференціальне рівняння двопровідної довгої лінії в комплексній формі*, виявивши, таким чином, поміж ними математичний зв'язок та встановивши такому зв'язку відповідний йому закон відображення.

Оскільки вздовж довгої лінії для миттєвої напруги

$$u(x, t) = \text{Im}\{U_m(x) e^{j\psi_u(x)} e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \text{Im}\{\underline{U}(x) e^{j\omega t}\}, \quad (7)$$

то з урахуванням рівнянь (5) та (6) для першої і другої її частинних похідних за часом t та просторовою координатою x можна записати:

$$\text{а) } \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \omega U_m(x) \sin\left(\omega t + \psi_u(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \text{Im}\{j\omega \underline{U}(x) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \text{Im}\{j\omega \underline{U}(x) e^{j\omega t}\}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 U_m(x) \sin(\omega t + \psi_u(x)) = \sqrt{2} \text{Im}\{-\omega^2 \underline{U}(x) e^{j\psi_u(x)} e^{j\omega t}\} = \\ &= \sqrt{2} \text{Im}\{-\omega^2 \underline{U}(x) e^{j\omega t}\}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{dU_m(x)}{dx} \sin(\omega t + \psi_u(x)) + U_m(x) \sin\left(\omega t + \psi_u(x) + \frac{\pi}{2}\right) \frac{d\psi_u(x)}{dx} = \\ &= \sqrt{2} \text{Im}\left\{\left[\frac{d\underline{U}(x)}{dx} e^{j\psi_u(x)} + j\underline{U}(x) \frac{d\psi_u(x)}{dx}\right] e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2} \text{Im}\left\{\frac{d\underline{U}(x)}{dx} e^{j\omega t}\right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{d^2 U_m(x)}{dx^2} \sin(\omega t + \psi_u(x)) + 2 \frac{dU_m(x)}{dx} \sin\left(\omega t + \psi_u(x) + \frac{\pi}{2}\right) \frac{d\psi_u(x)}{dx} - \\
&- U_m(x) \sin(\omega t + \psi_u(x)) \left(\frac{d\psi_u(x)}{dx}\right)^2 + U_m(x) \sin\left(\omega t + \psi_u(x) + \frac{\pi}{2}\right) \frac{d^2 \psi_u(x)}{dx^2} = \\
&= \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{d^2 U(x)}{dx^2} e^{j\psi_u(x)} + j 2 \frac{dU(x)}{dx} e^{j\psi_u(x)} \frac{d\psi_u(x)}{dx} - U(x) e^{j\psi_u(x)} \left(\frac{d\psi_u(x)}{dx}\right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + j U(x) e^{j\psi_u(x)} \frac{d^2 \psi_u(x)}{dx^2} \right] e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} e^{j\omega t} \right\};
\end{aligned} \tag{11}$$

Співвідношення (7), (8), (9) та (11) підставляємо в хвильове рівняння довгої лінії (2) і після еквівалентних перетворень та спрощень отримуємо диференціальне рівняння довгої лінії, складене відносно комплексу діючого значення напруги $\underline{U}(x)$

$$\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} - [R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(G_0 L_0 + R_0 C_0)] \underline{U}(x) = 0, \tag{12}$$

яке внаслідок перегруповань можемо записати у вигляді

$$\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} - (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0) \underline{U}(x) = 0 \tag{13}$$

або

$$\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} - \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{U}(x) = 0, \tag{14}$$

де $\underline{Z}_0$ – комплексний повздовжній опір довгої лінії, а $\underline{Y}_0$ – її комплексна поперечна провідність:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_0 &= R_0 + j\omega L_0 \\
\underline{Y}_0 &= G_0 + j\omega C_0
\end{aligned} \tag{15}$$

Рівняння (14) відоме в теоретичній електротехніці як *диференціальне рівняння довгої лінії в комплексній формі*.

Висновки

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, які спостерігаються в одновимірній однорідній стаціонарній динамічній системі з розподіленими параметрами на прикладі двопровідної довгої лінії, для якої на основі рівнянь Хевісайда (телеграфних рівнянь) розкрито закон відображення одновимірного хвильового рівняння довгої лінії в його комплексну форму. Отримані результати доповнюють вихідний базис теорії довгої лінії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ “Політехніка”, 2004. – 272 с.
2. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 392 с.
3. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
4. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 377 с.
5. Теоретичні основи електротехніки. Задачі та приклади розрахунку лінійних електричних кіл : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук та інш. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2016. – 346 с.

6. Теоретичні основи електротехніки. Методи розрахунку електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 262 с.

7. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, ВНТУ, м. Вінниця, wjg4224@gmail.com

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg4224@gmail.com

Денис Олегович Медончак — студент, гр. ЕМСА-22, ФЕЕЕМ, ВНТУ, м. Вінниця
Denis O. Medonchak — student, gr. EMCA-22, FPEEM, VNTU, Vinnytsia

Микола Володимирович Постернак — студент, гр. ЕМСА-22, ФЕЕЕМ, ВНТУ, м. Вінниця
Mikola V. Posternak — student, gr. EMCA-22, FPEEM, VNTU, Vinnytsia

Дмитро Анатолійович Кушнір — студент, гр. ЕМСА-22, ФЕЕЕМ, ВНТУ, м. Вінниця
Dmitro A. Kushnir — student, gr. EMCA-22, FPEEM, VNTU, Vinnytsia

Олександр Володимирович Шарандак — студент, гр. ЕМСА-22, ФЕЕЕМ, ВНТУ, м. Вінниця
Oleksandr V. Sharandak — student, gr. EMCA-22, FPEEM, VNTU, Vinnytsia