

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОМПОЗИЦІЇ ДВОХ СИМЕТРІЙ ВІДНОСНО ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Вінницький національний технічний університет

## Анотація

Ми знаходимо матрицю композиції двох симетрій відносно прямих на площині, що проходять через початок координат. Така композиція є поворотом на кут  $2\alpha$  навколо початку координат, де  $\alpha$  – кут між прямими.

**Ключові слова:** симетрія відносно прямої, лінійне перетворення, матриця лінійного перетворення, композиція лінійних перетворень.

## Abstract

We find the matrix of the composition of two symmetries with respect to straight lines in the plane passing through the origin. Such a composition is a rotation about the origin by an angle  $2\alpha$ , where  $\alpha$  is the angle between the straight lines.

**Keywords:** symmetry with respect to a line, linear transformation, matrix of linear transformation, composition of linear transformations.

Нехай в декартовій площині дано пряму  $l$ . Симетрія відносно прямої  $l$  буде лінійним перетворенням векторного простору  $R^2$  тоді і лише тоді, коли пряма  $l$  проходить через початок координат. Отже, нехай  $l$  – пряма, що проходить через початок координат і утворює з віссю  $OX$  кут  $\alpha$ . В цьому випадку напрямний орт прямої  $l$  – це вектор  $\vec{q} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$ . Рівняння прямої  $l$  в параметричній формі можна записати так:

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha} = t$$

або

$$\begin{cases} x = \cos \alpha \cdot t; \\ y = \sin \alpha \cdot t. \end{cases}$$

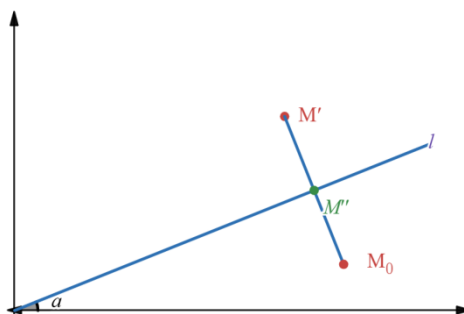


Рис.1

Далі, нехай  $M_0(x_0; y_0)$  – довільна точка на площині. Позначимо через  $M'(x'; y')$  точку, яка симетрична точці  $M_0$  відносно прямої  $l$ , а через  $M''(x''; y'')$  позначимо середину відрізка  $M_0M'$ . Наша перша задача – виразити координати точки  $M'$  через координати точки  $M_0$ . Для цього спочатку координати точки  $M''$  виразимо через координати точки  $M_0$ . Оскільки вектори  $\overrightarrow{M''M_0}$  і

вектор  $\vec{q} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$  перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює 0. Нехай точці  $M''$  відповідає параметр  $t''$ , тоді  $x'' = \cos \alpha \cdot t''$ ;  $y'' = \sin \alpha \cdot t''$  і

$$\overrightarrow{M_0 M''} = (x'' - x_0; y'' - y_0) = (\cos \alpha \cdot t'' - x_0; \sin \alpha \cdot t'' - y_0).$$

Оскільки  $\vec{q} \cdot \overrightarrow{M_0 M''} = 0$ , то

$$\cos \alpha \cdot (\cos \alpha \cdot t'' - x_0) + \sin \alpha \cdot (\sin \alpha \cdot t'' - y_0) = 0.$$

Розв'язуємо відносно  $t''$ :

$$t'' = \cos \alpha \cdot x_0 + \sin \alpha \cdot y_0.$$

Звідси

$$x'' = \cos \alpha \cdot t'' = \cos^2 \alpha \cdot x_0 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot y_0 \quad \text{і}$$

$$y'' = \sin \alpha \cdot t'' = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot x_0 + \sin^2 \alpha \cdot y_0.$$

Оскільки точка  $M''$  є серединою відрізка  $M_0 M'$ , то  $\frac{x' + x_0}{2} = x''$  і  $\frac{y' + y_0}{2} = y''$ . Звідси

$$x' = 2x'' - x_0 = 2\cos^2 \alpha \cdot x_0 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot y_0 - x_0 = \cos 2\alpha \cdot x_0 + \sin 2\alpha \cdot y_0.$$

Аналогічно

$$y' = 2y'' - y_0 = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot x_0 + 2\sin^2 \alpha \cdot y_0 - y_0 = \sin 2\alpha \cdot x_0 - \cos 2\alpha \cdot y_0.$$

Далі, позначимо через  $S$  перетворення симетрії відносно прямої

$$l: \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha} = t$$

Симетрія  $S$  задається формулою:

$$S: (x_0; y_0) \mapsto (x', y') = (\cos 2\alpha \cdot x_0 + \sin 2\alpha \cdot y_0; \sin 2\alpha \cdot x_0 - \cos 2\alpha \cdot y_0).$$

Легко перевірити, що перетворення  $S$  є лінійним. До того ж очевидно, що  $S$  – є ізометрією, тобто перетворення, що зберігає відстань між точками. З курсу лінійної алгебри відомо (див. [1]), що матриця ізометричного лінійного перетворення є ортогональною. В стандартному декартовому базисі знайдемо матрицю симетрії  $S$ . Оскільки  $S((1;0)) = (\cos 2\alpha; \sin 2\alpha)$  і  $S((0;1)) = (\sin 2\alpha; -\cos 2\alpha)$ , то матриця  $M_S^l$  симетрії  $S$  відносно прямої  $l$  має вигляд:

$$M_S^l = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Відмітимо, що  $\det M_S^l = -1$ .

Зокрема, матриця симетрії відносно осі  $OX$ :

$$M_S^{OX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Матриця  $M_S^l$  – це математична модель перетворення симетрії відносно прямої

$$l: \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha}$$

Далі ми будемо розглядати композицію двох симетрій відносно прямих  $l_\alpha$  і  $l_\beta$

$$l_\alpha: \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha};$$

$$l_\beta: \frac{x}{\cos \beta} = \frac{y}{\sin \beta}.$$

З курсу лінійної алгебри відомо (див. [1]), що композиція двох лінійних перетворень є лінійним перетворенням, причому в фіксованому базисі композиції лінійних перетворень відповідає звичайне множення матриць цих перетворень. Знайдемо добуток матриць  $M_S^{l_\alpha}$  і  $M_S^{l_\beta}$ :

$$\begin{aligned} M_S^{l_\alpha} \cdot M_S^{l_\beta} &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta & \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta \\ \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

З курсу лінійної алгебри добре відомо (див. [1]), що матриця

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

є ортогональною матрицею повороту навколо початку координат проти ходу годинникової стрілки на кут  $\varphi$ . Таким чином, матриця

$$\begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

реалізує поворот навколо початку координат на кут  $2(\alpha - \beta)$  проти ходу годинникової стрілки. Припустимо, для конкретності, що  $\alpha > \beta$ , тоді  $(\alpha - \beta)$  – це кут між прямими  $l_\alpha$  і  $l_\beta$ . Отже, ми бачимо, що кут повороту  $2(\alpha - \beta)$  вдвічі більший ніж кут між прямими  $l_\alpha$  і  $l_\beta$ . Тепер покажемо, що будь-яку матрицю повороту

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

можна подати як добуток матриць двох симетрій, а саме:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тут

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} -$$

матриця симетрії (в декартовому базисі) відносно прямої, що проходить через початок координат і утворює кут  $\frac{\varphi}{2}$  з віссю  $OX$ . Далі, по ходу виведення формули перетворення симетрії відносно прямої

$$l: \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha}$$

ми виразили координати точки  $M''$  через координати точки  $M_0(x_0; y_0)$ . Але точка  $M''$  - це проекція точки  $M_0$  на пряму  $l$ . Таким чином, перетворення проекції на пряму  $l$  задається формулою:

$$P_r: (x_0; y_0) \mapsto (\cos^2 \alpha \cdot x_0 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot y_0, \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot x_0 + \sin^2 \alpha \cdot y_0).$$

Знайдемо матрицю перетворення проектування  $P_r$  на пряму  $l$  в декартовому базисі. Для цього подіємо перетворенням  $P_r$  на базисні вектори  $\vec{i} = (1; 0)$  і  $\vec{j} = (0; 1)$

$$P_r(\vec{i}) = P_r(1; 0) = (\cos^2 \alpha, \sin \alpha \cdot \cos \alpha);$$

$$P_r(\vec{j}) = P_r(0; 1) = (\sin \alpha \cdot \cos \alpha, \sin^2 \alpha).$$

Отже, матриця перетворення  $P_r$  в стандартному базисі має вигляд:

$$M_{P_r} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Очевидно, що перетворення проектування не є ізометрією, тому матриця  $M_{P_r}$  не є ортогональною.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. David C. Lay, Steven R. Lay, Judi J. McDonald. Linear Algebra and Its Applications: Pearson Education Limited, sixth edition-2022. P. 755.

**Боримський Євгеній Володимирович**, студент групи СА-24(б) ФІТА Вінницького національного технічного університету, Вінниця, [zenia.zt2006@gmail.com](mailto:zenia.zt2006@gmail.com)

**Подзігун Дмитро Костянтинович**, студент групи СА-24(б) ФІТА Вінницького національного технічного університету, Вінниця, [dmitropodzigun@gmail.com](mailto:dmitropodzigun@gmail.com)

Науковий керівник: **Дереч Володимир Дмитрович**, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, [derech@vntu.edu.ua](mailto:derech@vntu.edu.ua)

**Borymskyi Yevhenii Volodymyrovych**, student of the Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, VNTU, Vinnytsia, [zenia.zt2006@gmail.com](mailto:zenia.zt2006@gmail.com)

**Podzihun Dmytro Kostiantynovych**, student of the Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, VNTU, Vinnytsia, [dmitropodzigun@gmail.com](mailto:dmitropodzigun@gmail.com)

Supervisor: **Derech Volodymyr Dmytrovych**, PhD in Mathematics, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, [derech@vntu.edu.ua](mailto:derech@vntu.edu.ua)