

ТЕЗИ №1. ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНА ФУНКЦІЯ ЗОБРАЖЕННЯ МЕТОДИЧНОЇ ПОХИБКИ В РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА ЗА НЕНУЛЬОВИХ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола за нульових та ненульових початкових умов в фундаментальній задачі Коші. На підставі здійсненого порівняльного аналізу (за інтегральним перетворенням Лапласа) отримано дробово-раціональну функцію зображення методичної похибки, що з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі штучного знулення ненульових за умовою задачі початкових умов. Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.

Ключові слова: теоретична електротехніка, стаціонарне електричне коло, динамічна система, перехідний процес, диференціальне рівняння, задача Коші, нульові та ненульові початкові умови, інтегральне перетворення Лапласа, методична похибка, напруги, струми

Abstract

The article presents a mathematical identification of physical processes observed during the evolution of a stationary electric circuit under zero and non-zero initial conditions in the fundamental Cauchy problem. Based on the comparative analysis (using the Laplace integral transform), a fractional-rational function representing the methodological error that appears in the solution of the differential equation in the case of artificially zeroing the initial conditions that are non-zero according to the condition of the problem was obtained. The obtained results provide a mathematical basis for adjusting known methods of analyzing transient processes both in stationary electrical circuits and in dynamic systems of a different physical nature.

Keywords: theoretical electrical engineering, stationary electrical circuit, dynamic system, transient process, differential equation, Cauchy problem, zero and nonzero initial conditions, Laplace integral transform, methodological error, voltages, currents

Теоретичні основи електротехніки є точною наукою, оскільки оперують не тільки поняттями, що наділені якісним змістом, але і його кількісними характеристиками [1-7].

Розв'яжемо задачу визначення в *операторній формі* зображення (за інтегральним перетворенням Лапласа) функції-спотворення, яка з'являється повсякчас там і тоді, де і коли, застосовуючи операторний метод розрахунку перехідних процесів в стаціонарних електричних колах, керуються загальноприйнятими підходами та ігнорують ненульові початкові умови в фундаментальній задачі Коші навіть тоді, коли характер отримуваних результатів, як наслідок, починає набувати вже антагоністичного забарвлення у відносинах з логікою здорового глузду.

Задачу розв'яжемо в узагальненому вигляді, інваріантно відносно топологічної структури електричного кола.

Для цього розглянемо довільне лінійне електричне коло з одним джерелом електричної енергії (е.р.с. або струму), де джерело і слугуватиме генератором збурення динамічної системи дією $x(t)$. Реакцією на таку дію слугуватиме функція $y(t)$ або струму в будь-якій вітці, або напруги на будь-якій ділянці зазначеного кола.

Кількісний зв'язок поміж дією та реакцією на неї встановлюється математичним оператором, що належить до класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{s=0}^m b_s \frac{d^s x}{dt^s}, \quad (1)$$

отриманих на підставі фізичних законів, які підпорядковують собі силові та енергетичні процеси, що спостерігаються в технічній системі, а також математичних співвідношень, які виявляють основні властивості окремо узятих основних елементів, з яких складається система. У разі електричного кола із зосередженими параметрами такими фізичними законами слугують закони Кірхгофа, а математичними виразами – співвідношення, які в теоретичній електротехніці отримали назву “компонентних співвідношень”.

Оскільки розв’язок заявленої задачі має бути представлений в операторній формі, скористаємося інтегральним перетворенням Лапласа і перейдемо до зображень: спочатку вхідної дії та реакції на неї електричного кола

$$\begin{aligned} X(p) &= \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt = L\{x(t)\}, \\ Y(p) &= \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = L\{y(t)\}, \end{aligned} \quad (2)$$

а потому – функцій лінійних комбінацій лівої і правої частин диференціального рівняння (1):

$$L\left\{\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k}\right\} = L\left\{\sum_{s=0}^m b_s \frac{d^s x}{dt^s}\right\}. \quad (3)$$

Відносно отриманого алгебраїчного рівняння (3) скористаємося лінійною властивістю інтегрального перетворення Лапласа

$$\sum_{k=0}^n a_k L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} = \sum_{s=0}^m b_s L\left\{\frac{d^s x}{dt^s}\right\}. \quad (4)$$

Теорема про диференціювання оригіналу, відповідно до якої:

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^s x}{dt^s}\right\} &= p^s X(p) - \left[p^{s-1}x(0_+) + p^{s-2}x'(0_+) + \dots + p x^{(s-2)}(0_+) + x^{(s-1)}(0_+)\right] = \\ &= p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^{\tau} x^{(k-\tau-1)}(0_+), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} &= p^k Y(p) - \left[p^{k-1}y(0_+) + p^{k-2}y'(0_+) + \dots + p y^{(k-2)}(0_+) + y^{(k-1)}(0_+)\right] = \\ &= p^k Y(p) - \sum_{v=0}^{k-1} p^v y^{(k-v-1)}(0_+), \end{aligned} \quad (6)$$

завершить процедуру математичних перетворень.

Таким чином, математичний зв'язок поміж функціями зображень вхідної дії $X(p)$ та реакції на неї $Y(p)$ набуває вигляду:

$$\sum_{k=0}^n a_k \left[p^k Y(p) - \sum_{v=0}^{k-1} p^v y^{(k-v-1)}(0_+) \right] = \sum_{s=0}^m b_s \left[p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^{\tau} x^{(k-\tau-1)}(0_+) \right], \quad (7)$$

або

$$Y(p) \sum_{k=0}^n a_k p^k = X(p) \sum_{s=0}^m b_s p^s + \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v - \sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^{\tau}. \quad (8)$$

Відповідно до загальноприйнятих в теоретичній електротехніці правил визначення передаточної функції динамічної системи здійснюють за нульових початкових умов.

Математично це означає штучний та примусовий перехід від рівняння (8) до наближеного рівняння:

$$Y^*(p) \sum_{k=0}^n a_k p^k = X(p) \sum_{s=0}^m b_s p^s, \quad (9)$$

яке водночас передбачає і наближений характер його розв’язку.

Відтак у разі визначення за співвідношенням (9) передатної функції динамічної системи

$$K_y(p) = \frac{Y^*(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{s=0}^m b_s p^s}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} \quad (10)$$

її спотворений характер поширюватиметься і на результати подальшого аналізу динаміки системи.
Водночас рівняння (8) і (9)

$$\left. \begin{aligned} Y(p) &= X(p) \frac{\sum_{s=0}^m b_s p^s}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} + \\ &+ \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v - \sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^\tau}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}; \\ Y^*(p) &= X(p) \frac{\sum_{s=0}^m b_s p^s}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

дозволяють математично виявити і оцінити заявлену методичну похибку.

Зробимо це в наявній роботі в операторній формі.

Тоді для операторного зображення (за Лапласом) методичної похибки маємо дробово-раціональну функцію

$$\begin{aligned} \Delta Y(p) &= Y(p) - Y^*(p) = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} - \frac{\sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^\tau}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}, \end{aligned} \quad (12)$$

як це безпосередньо і впливає з рівнянь (11), яка за структурою виявляє себе як функція, що складається з двох змістових складових, кожна з яких визначається початковими умовами, накладеними включно з похідними водночас і на вхідну дію, і на реакцію стаціонарного електричного кола.

Висновки

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола за нульових та ненульових початкових умов в фундаментальній задачі Коші. На підставі здійсненого порівняльного аналізу (за інтегральним перетворенням Лапласа) отримано дробово-раціональну функцію зображення методичної похибки, що з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі штучного знулення ненульових за умовою задачі початкових умов. Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ “Політехніка”, 2004. – 272 с.
2. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 263 с.
3. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.

4. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К. : Либідь, 2007. – 657 с.
5. ТОЕ. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.
6. ТОЕ. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.
7. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, ВНТУ, м. Вінниця, wjg@ukr.net

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg@ukr.net