

ТЕЗИ №3. МЕТОДИЧНА ПОХИБКА В РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА ЗА НАЯВНОСТІ КРАТНИХ ПОЛЮСІВ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ ВНАСЛІДОК ЗНУЛЕННЯ НЕНУЛЬОВИХ ЗА УМОВОЮ ЗАДАЧІ КОШІ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола за нульових та ненульових початкових умов в фундаментальній задачі Коші.

На підставі отриманої за інтегральним перетворенням Лапласа дробово-раціональної функції зображення методичної похибки, що з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі штучного знулення ненульових за умовою задачі початкових умов, за наявності не тільки простих, але і кратних полюсів довільної кратності, визначено в часовій математичній формі і саму функцію-оригінал.

Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.

Ключові слова: теоретична електротехніка, стаціонарне електричне коло, динамічна система, перехідний процес, диференціальне рівняння, задача Коші, нульові та ненульові початкові умови, інтегральне перетворення Лапласа, методична похибка, напруги, струми

Abstract

The article presents a mathematical identification of physical processes observed during the evolution of a stationary electric circuit under zero and non-zero initial conditions in the fundamental Cauchy problem.

Based on the image of the methodological error that appears in the solution of the differential equation in the case of artificially zeroing the initial conditions that are non-zero according to the condition of the problem, obtained by the Laplace integral transform of the fractional-rational function, in the presence of not only simple but also multiple poles of arbitrary multiplicity, the original function itself is defined in a time mathematical form.

The obtained results provide a mathematical basis for adjusting known methods of analyzing transient processes both in stationary electrical circuits and in dynamic systems of a different physical nature.

Keywords: theoretical electrical engineering, stationary electrical circuit, dynamic system, transient process, differential equation, Cauchy problem, zero and nonzero initial conditions, Laplace integral transform, methodological error, voltages, currents

Теоретичні основи електротехніки є точною наукою, оскільки оперують не тільки поняттями, що наділені якісним змістом, але і його кількісними характеристиками [1-7].

Розв'яжемо задачу визначення в часовій формі функції-спотворення, яка з'являється повсякчас там і тоді, де і коли, застосовуючи операторний метод розрахунку перехідних процесів в стаціонарних електричних колах, керуються загальноприйнятими підходами та ігнорують ненульові початкові умови в фундаментальній задачі Коші навіть тоді, коли характер отримуваних результатів, як наслідок, починає набувати вже антагоністичного забарвлення у відносинах з логікою здорового глузду.

Задачу розв'яжемо в узагальненому вигляді, інваріантно відносно топологічної структури електричного кола, а також за умови наявності в дробово-раціональній функції зображення методичної похибки не тільки простих полюсів, але, що важливо, і кратних з різним ступенем кратності.

Отже, розглянемо довільне лінійне електричне коло з одним джерелом електричної енергії (е.р.с. або струму), яке і слугуватиме генератором збурення динамічної системи дією $x(t)$. Реакцією на таку дію слугуватиме функція $y(t)$ або струму в будь-якій вітці, або напруги на будь-якій ділянці зазначеного кола.

Кількісний зв'язок поміж дією та реакцією на неї встановлюється математичним оператором, що належить до класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{s=0}^m b_s \frac{d^s x}{dt^s}, \quad (1)$$

отриманих на підставі фізичних законів, які підпорядковують собі силові та енергетичні процеси, що спостерігаються в технічній системі, а також математичних співвідношень, які виявляють основні властивості окремо узятих основних елементів, з яких складається система. У разі електричного кола із зосередженими параметрами такими фізичними законами слугують закони Кірхгофа, а математичними виразами – співвідношення, які в теоретичній електротехніці отримали назву “компонентних співвідношень”.

Скориставшись інтегральним перетворенням Лапласа і врахувавши окремі властивості останнього, отримуємо операторне рівняння, що зв'язує поміж собою функції зображень вхідної дії $X(p)$ та реакції на неї $Y(p)$ з урахуванням нульових та ненульових початкових умов:

$$\sum_{k=0}^n a_k \left[p^k Y(p) - \sum_{v=0}^{k-1} p^v y^{(k-v-1)}(0_+) \right] = \sum_{s=0}^m b_s \left[p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^\tau x^{(s-\tau-1)}(0_+) \right]. \quad (2)$$

Звідки і отримуємо дробово-раціональну функцію операторного зображення методичної похибки у разі ігнорування ненульових за умовою задачі Коші початкових умов

$$\Delta Y(p) = \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} - \frac{\sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(s-\tau-1)}(0_+) p^\tau}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}. \quad (3)$$

Позначивши поліноміальні функції

$$\left. \begin{aligned} M(p) &= \sum_{k=0}^n a_k p^k; \\ N_y(p) &= \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v; \\ N_x(p) &= \sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(s-\tau-1)}(0_+) p^\tau, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

остаточно маємо

$$\Delta Y(p) = \frac{N_y(p)}{M(p)} - \frac{N_x(p)}{M(p)}, \quad (5)$$

Припустимо, що функція $\Delta Y(p)$ з-поміж n полюсів, які є коренями рівняння

$$M(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^k = 0, \quad (6)$$

має q дійсних та комплексно-спряжених простих полюсів $\{p_1; p_2; \dots; p_q\}$, а також і декілька кратних полюсів різного ступеня кратності, а саме:

- p_r полюсів кратності r ;
- p_z полюсів кратності z ;
- p_w полюсів кратності w ,

де $q + r + z + w = n$.

Часова математична форма методичної похибки

$$\Delta y(t) = y(t) - y^*(t) \quad (7)$$

є функцією-оригіналом дробово-раціональної функції (3). Відповідно до зворотного інтегрального перетворення Лапласа маємо

$$\Delta y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\zeta-j\infty}^{\zeta+j\infty} \Delta Y(p) e^{pt} dp. \quad (8)$$

Інтеграл (8), де інтегрування по комплексній частоті p здійснюється вздовж розташованої в комплексній площині нескінченної прямої, еквівалентно замінимо інтегруванням по замкнутому конту-

ру, який охоплює всі $n = q + r + z + w$ полюсів функції $\Delta Y(p)$, і відповідно перейдемо до контурного інтегралу

$$\Delta y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\zeta-j\infty}^{\zeta+j\infty} \Delta Y(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \Delta Y(p) e^{pt} dp. \quad (9)$$

Оскільки лишок функції в деякому її полюсі – це величина, на яку змінюється поділений на $2\pi j$ контурний інтеграл (9), коли контур інтегрування L під час його стягування перетинає зазначений полюс, то замінимо операцію інтегрування операцією додавання по скінченній множині лишків функції $\Delta Y(p)$ в її полюсах:

$$\Delta y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\zeta-j\infty}^{\zeta+j\infty} \Delta Y(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \Delta Y(p) e^{pt} dp = \sum \text{Res } \Delta Y(p) e^{pt}, \quad (10)$$

що і є змістом теореми про розкладання в теоретичній електротехніці.

В простих полюсах лишки визначаються як

$$\text{Res } \Delta Y(p) e^{pt} = \frac{N(p_q)}{M'(p_q)} e^{p_q t}, \quad (11)$$

а у кратних кратності w –

$$\text{Res } \Delta Y(p) e^{pt} = \frac{1}{(w-1)!} \frac{d^{w-1}}{dp^{w-1}} \left[\frac{N(p) (p-p_w)^w e^{pt}}{M(p)} \right]_{p=p_w}. \quad (12)$$

Отже, функцію-оригінал $\Delta y(t)$ методичної похибки отримуємо, урахувавши співвідношення (3-6) та (10-12)

$$\begin{aligned} \Delta y(t) = & \sum_{i=1}^q \frac{N_y(p_i)}{M'(p_i)} e^{p_i t} - \sum_{i=1}^q \frac{N_x(p_i)}{M'(p_i)} e^{p_i t} + \\ & + \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} \left[\frac{N_y(p) (p-p_r)^r e^{pt}}{M(p)} \right]_{p=p_r} - \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} \left[\frac{N_x(p) (p-p_r)^r e^{pt}}{M(p)} \right]_{p=p_r} + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

або

$$\begin{aligned} \Delta y(t) = & \sum_{i=1}^q \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p_i^v}{\sum_{k=1}^n k a_k p_i^{k-1}} e^{p_i t} - \sum_{i=1}^q \frac{\sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p_i^\tau}{\sum_{k=1}^n k a_k p_i^{k-1}} e^{p_i t} + \\ & + \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} \left[\frac{(p-p_r)^r e^{pt} \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} \right]_{p=p_r} - \\ & - \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} \left[\frac{(p-p_r)^r e^{pt} \sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^\tau}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} \right]_{p=p_r} + \dots. \end{aligned} \quad (14)$$

Висновки

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола за нульових та ненульових початкових умов в фундаментальній задачі Коші.

На підставі отриманої за інтегральним перетворенням Лапласа дробово-раціональної функції зображення методичної похибки, що з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі штучно-

го знулення ненульових за умовою задачі початкових умов, за наявності не тільки простих, але і кратних полюсів довільної кратності, визначено в часовій математичній формі і саму функцію-оригінал.

Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ “Політехніка”, 2004. – 272 с.
2. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 263 с.
3. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
4. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К. : Либідь, 2007. – 657 с.
5. ТОЕ. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.
6. ТОЕ. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.
7. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп’ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, ВНТУ, м. Вінниця, wjg@ukr.net

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg@ukr.net