УДК 519.85

А. В. Ошовська

Задачі, які приводять до варіаційних проблем

Вінницький національний технічний університет

Анотація: *У статті розглянуто поняття функціонала. Визначено, що варіаційне числення вивчає методи, що дозволяють знаходити максимальні й мінімальні значення функціоналів. Приведено приклади конкретних задач варіаційного числення з їх математичною формалізацією.*
Ключові слова: *функціонал, варіаційне числення, брахістохрона, максимум, мінімум.*

Abstract: *In the article the concept of functional is considered. Determined that the calculus of variations is studying methods to find the maximum and minimum values of the functional. Examples of specific calculus of variations problems with mathematical formalization are given.*
Keywords: *functional, calculus of variations, brachistochrone curve, maximum, minimum.*

Функціоналами називаються змінні величини, значення яких визначаються вибором однієї або декількох функцій [1].

Наприклад, функціоналом являється довжина l дуги плоскої (рис. 1) (або просторової) кривої, що з'єднує дві задані точки $A(x_0;y_0)$ і $B(x_1;y_1)$. Величина l може бути обчислена, якщо задане рівняння кривої $y = y(x)$, тоді

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2}\,dx \,. \tag{1}$$

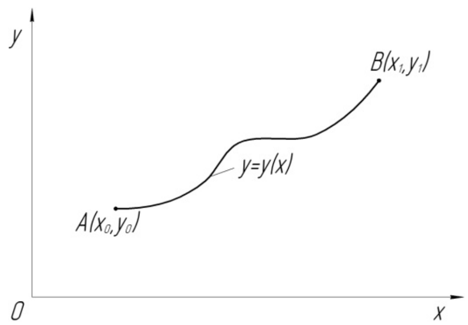

Рис. 1

Площа S деякої поверхні також є функціоналом, тому що вона визначається вибором поверхні, тобто вибором функції $z(x,y)$, що входить у рівняння поверхні, $z = z(x,y)$. Як відомо,

$$S[z(x,y)] = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \,, \tag{2}$$

де D – проекція поверхні на площину Oxy.

Моменти інерції, статичні моменти, координати центру ваги деякої однорідної кривої або поверхні також є функціоналами, тому що їхні значення визначаються вибором кривої або поверхні, тобто вибором функцій, що входять у рівняння цієї кривої або поверхні.

У всіх цих прикладах ми маємо характерну для функціоналів залежність: функції відповідає число, у той час як при визначенні функції $z = f(x)$ числу відповідало число.

Варіаційне числення вивчає методи, що дозволяють знаходити максимальні й мінімальні значення функціоналів. Задачі, у яких потрібно досліджувати функціонал на максимум або мінімум, називаються варіаційними задачами.

Багато законів механіки й фізики зводяться до твердження, що деякий функціонал у розглянутому процесі повинен досягати мінімуму або максимуму [2, 3]. У такому формулюванні ці закони називаються варіаційними принципами механіки або фізики. До числа таких варіаційних принципів або найпростіших наслідків з них належать: принцип найменшої дії, закон збереження енергії, закон збереження імпульсу, закон збереження кількості руху, закон збереження моменту кількості руху, різні варіаційні принципи класичної й релятивістської теорії поля, принцип Ферма в оптиці, принцип Кастіліано в теорії пружності і т.д.

Різноманітність задач, що приводять до пошуку максимуму або мінімуму деякої інтегральної величини відображається у мудрому висловленні великого Ейлера: „ У світі немає нічого, у чому не було б видно зміст якого-небудь максимуму або мінімуму".

Приклади успішного вирішення екстремальних проблем можна знайти вже в прадавній історії.

Приклад 1 (задача Дідони). В IX в. до н.е. фінікійська царівна Дідона й декілька її супутників, рятуючись від переслідування тирської знаті, бігли з м.Тиру й висадилися на африканському березі Середземного моря. Вирішивши поселитися саме тут, Дідона впросила місцевих жителів віддати в її розпорядження ділянку землі, яку можна охопити шкірою бика. Простодушний правитель тих місць не зрозумів усієї глибини задуму й погодився віддати втікачам ділянку землі, яка, по його розумінню, повинна бути рівною площі розправленої шкіри бика. Дідона ж після укладання угоди розрізала шкіру бика на тонкі смужки, зв'язала їх у довгий ремінь і обмежила їм досить значну територію на березі моря. Так було закладено місто Карфаген.

Якщо вважати берег моря прямолінійним (рис. 2), то задача, яку поставила Дідона, може бути сформульована в такий спосіб: знайти таку криву $y(x)$ заданої довжини l, яка обмежує на площині фігуру найбільшої площі:

$$S\left[y(x)\right]=\int_a^b y(x)\,dx \to \max , \tag{3}$$

$$\begin{cases} l=\int_a^b \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx; \\ y(a)=y(b)=0. \end{cases} \tag{4}$$

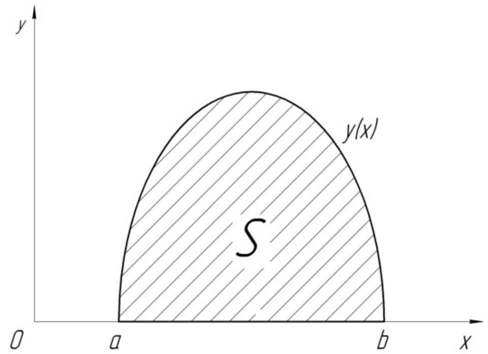

Рис. 2

Задачі подібного роду ставили й вирішували (своїми, оригінальними, способами) ще Аристотель і Архімед. Так, Архімед установив чудову властивість кола: із усіх замкнених кривих, довжини яких рівні деякому заданому значенню, коло охоплює найбільшу площу; із усіх замкнених кривих, які охоплюють задану площу, коло має найменшу довжину.

Незважаючи на наявність прадавніх прецедентів, моментом народження варіаційного обчислення як математичної дисципліни прийнято вважати 1696 рік, коли з'явився лист І. Бернуллі, у якім він писав: „Найкмітливіших математиків усього світу вітаю я, Іоган Бернуллі! Людей високого розуму не можна нічим більш залучити до роботи, як указати їм важку й разом з тим корисну задачу, розв'язком якої можливо й славу придбати, і залишити по собі вічний пам'ятник. Я сподіваюся, що заслужу дяку вченого миру, якщо я, за прикладом Паскаля, Ферма й інших великих, запропоную кращим математикам нашого часу задачу, яка дасть їм можливість визначити, чи гарні ті методи, якими вони володіють, і яка велика сила їх розуму. Якщо хто-небудь знайде розв'язок запропонованої задачі й сповістить про це мені, то я оголошу йому привселюдно заслужену хвалу".

Задача, запропонована І. Бернуллі така.

Приклад 2 (задача про брахістохрону). У вертикальній площині через дві дані точки O та B, що не лежать на одній вертикалі, провести криву (тобто знайти її рівняння), рухаючись по якій, матеріальна точка під дією сили тяжіння переміститься з верхньої точки в нижню за найкоротший час (рис. 3). Цю ж задачу можна сформулювати й так: як спроектувати дах будинку, щоб краплі дощу скочувалися з даху за найменший проміжок часу.

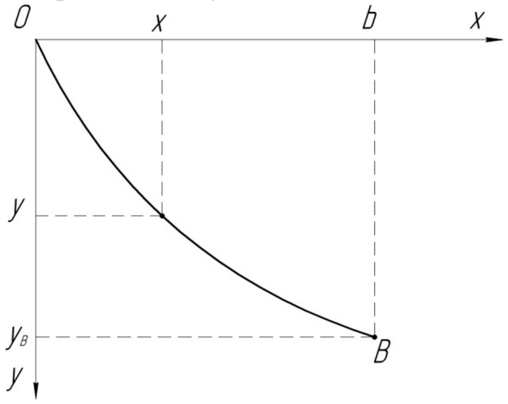

Рис. 3

Помістимо початок координат у точку O, вісь Ox направимо горизонтально, вісь Oy – вертикально вниз. Швидкість руху матеріальної точки $v=\sqrt{2gy}$, звідки знаходимо час, затрачуване на переміщення точки з положення O у положення B. За умови, що початкова швидкість падаючої точки дорівнює нулю, а сили тертя відсутні, отримаємо таку задачу

$$t\left[y(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \frac{\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}}{\sqrt{y}}dx \to \min, \tag{5}$$

$$y(0)=0,\ y(b)=y_B. \tag{6}$$

Приклад 3 (задача про мінімальну поверхню обертання). В площині xOy з'єднати точки $A(a,y_A)$ і $B(b,y_B)$ кривою так, щоб бічна поверхня тіла, отриманого від обертання цієї кривої навколо осі Ox, мала найменшу площу (рис. 4).

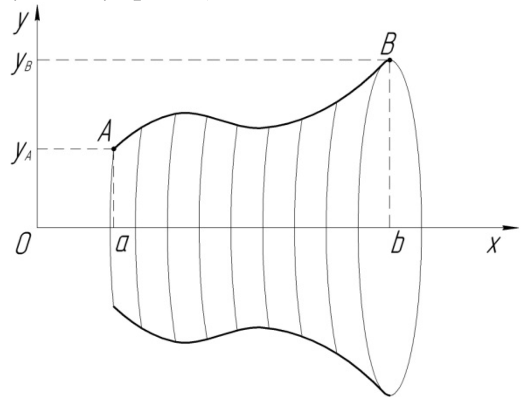

Рис. 4

$$S\left[y(x)\right]=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx \to \min, \tag{7}$$

$$y(a)=y_A,\ y(b)=y_B. \tag{8}$$

Приклад 4 (задача про геодезичні лінії). На поверхні, заданої в прямокутній системі координат $Oxyz$ рівнянням $\varphi(x,y,z)=0$, проведемо криву, що з'єднує дві точки A та B цієї поверхні і що має найменшу довжину (рис. 5).

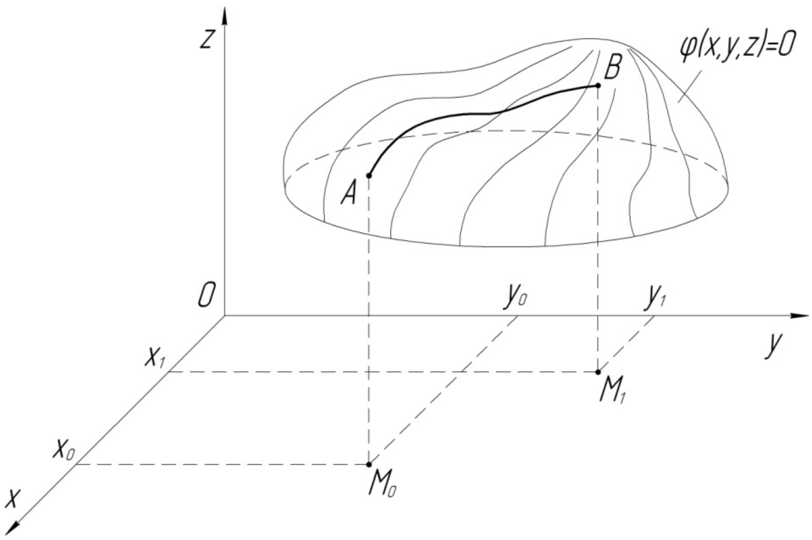

Рис. 5

Найменші по довжині лінії між двома точками деякої поверхні є геодезичними лініями цієї поверхні. Якщо припустити, що шукана крива може бути задана рівняннями $y=y(x)$, $z=z(x)$, $x\in[a,b]$:

$$l\left[y(x),z(x)\right]=\int_a^b \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2+\left(z'(x)\right)^2}\,dx\to\min, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\varphi\left(x,y(x),z(x)\right)=0;\\&y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,\\&z(x_0)=z_0,\ z(x_1)=z_1.\end{aligned} \tag{10}$$

Оригінальність сформульованих задач – у тому, що невідомими в них є функції, які повинні зробити значення інтеграла найменшим або найбільшим.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гельфанд И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 228 с.

2. Михалевич В. М. Формулювання варіаційної задачі для моделі накопичення пошкоджень при гарячому деформуванні / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський // В зб.: «Обробка матеріалів тиском» . Збірник наукових праць. – Краматорськ, 2009. – №2(21). – С. 12-16.

3. Mikhalevich V. M., Kraevskii V. A. Variational problems for damage accumulation models heritable type / V. M. Mikhalevich, V. A. Kraevskii // The nonlinear analysis and application 2009: Materials of the international scientific conference (April 02-04th 2009, Kyiv). – Kyiv: NTUU "KPI", 2009. – p. 109-110.

Ошовська Анастасія Валентинівна *– студент Вінницького національного технічного університету, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, група Бт-12, anastasiaoshovska@mail.ru*

Науковий керівник: Краєвський Володимир Олександрович *– к.т.н., доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету*

Oshovska Anastasia *- student of Vinnytsia National Technical University, Faculty of Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply*

Supervisor: Kraevskii Vladimir *- Ph.D., Associate Professor, Department of Mathematics Vinnytsia National Technical University*