

УДК 681.518.3: 535.243.2

В. Г. Петрук, д.т.н., проф.; І. В. Васильківський; С. М. Кватернюк; П. М. Турчик**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛЯРИЗАЦІЇ ВИПРОМІНЮВАННЯ У
СВІТЛОРозсіювальних Середовищах**

В даній роботі розглянута математична модель поляризації випромінювання у світлорозсіювальних середовищах із використанням принципу двопотокового наближення та приведений приклад застосування кореляційного аналізу до статистичних і динамічних характеристик дисперсних світлорозсіювальних середовищ.

Вступ

Внаслідок надзвичайної складності і неоднозначності взаємодії випромінювання із світлорозсіювальними середовищами накопичилось чимало підходів і відповідних їм математичних моделей. Але всі вони мають досить вузькі рамки використання, а інколи ідеалізовані умови розв'язку, особливо за умов багатократного розсіювання випромінювання, що накладає суттєві обмеження їх застосування на практиці.

Із зануренням у світлорозсіювальне середовище згасання прямого світла і перетворення його в дифузійне відбувається з різною швидкістю для різних довжин хвиль λ . Змінюється також спектральний склад випромінювання, причому для кожної λ буде реалізуватися свій кутовий розподіл яскравості в кожній фіксованій точці [1].

Просторова і кутова структура світлового поля всередині світлорозсіювального середовища, окрім умов освітлення визначається трьома оптичними параметрами середовища, що впливають із загального аналізу лінійного рівняння переносу випромінювання, яке описує закономірності поширення радіації в світлорозсіювальних об'єктах. Такими параметрами є показник послаблення, імовірність виживання фотона та індикатриса розсіювання або тіло яскравості. Поляризаційні ефекти, що виникають при взаємодії оптичного випромінювання із середовищем, можуть бути використані для дослідження самих середовищ (наприклад, аерозольних утворень, річкової або морської води). Строге вирішення задачі в даному випадку шляхом розв'язання нестационарного рівняння переносу випромінювання для вектора-параметра Стокса дотепер ще не отримано. Тому тут доцільне використання чисельних методів і різних наближень. До числа останніх можна віднести підхід, заснований на врахуванні перших двох кратностей розсіювання, що дозволяє одержати інформацію про поляризаційні властивості інформативного сигналу випромінювання. Для цього необхідно записати рівняння переносу випромінювання у вигляді вектора-параметра Стокса.

**Математична модель поляризації випромінювання світлорозсіювальним середовищем на
основі принципу двопотокового наближення**

Важливою характеристикою шуканої математичної моделі є її універсальність при застосуванні, на відміну від існуючих, які можуть забезпечити потрібну адекватність і однозначність співвідношень із оригіналом лише в своїх крайових умовах застосування.

З цієї точки зору не важливо, які компоненти містяться в елементарному об'єкті світлорозсіювального середовища, яка природа середовища, що розсіює, та які фізичні процеси, що визначають те чи інше співвідношення між поглинанням і розсіюванням. Якщо два зовсім різних по своїй будові об'єкта володіють однаковими зазначеними параметрами, то структура поля в них також буде однаковою. Більше того, у теорії переносу випромінювання розміри середовища і положення точки спостереження визначаються не розмірними, а безрозмірними характеристиками. Наприклад, інтенсивність світла в точці, положення якої в просторі визначається вектором \vec{r} , залежить не від цього вектора, а від безрозмірного вектора $e\vec{h}$. Потрібно сказати, що показник послаблення ε фігурує у всіх аналітичних співвідношеннях не самостійно, а тільки в добутку з лінійними координатами, що мають розмірність довжини. Тому в сильно мутних об'єктах (велике ε) на малих глибинах реалізує таке ж саме світлове поле, як і в слабо мутних об'єктах на великих глибинах [1-3].

Враховуючи ці особливості, можна визначити принцип роботи на моделях світлорозсіювальних

середовищ. Створюється середовище, що має Λ і x (γ) як у реальному природному об'єкті, а показник послаблення ε значно більший, ніж реальний. В результаті, використовуючи модельну систему дуже малих геометричних розмірів, можна реалізувати в ній ті ж оптичні величини εh (у тому числі й оптичні розміри джерела світла), що й у натурних умовах. При виконанні зазначених вимог забезпечується повна еквівалентність оптичних властивостей природного об'єкту. А раз так, то, провівши дослідження трансформації світла на моделі, отримані дані з необхідною точністю можна перенести на реальні (природні) умови. При цьому, якщо на моделі фотометричні характеристики отримані в точці, обумовленій вектором \vec{r}_1 , то в реальному просторі ті ж характеристики реалізуються в точці \vec{r}_2 , такій що, $\vec{r}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \vec{r}_1$, де ε_1 і ε_2 – показники послаблення

випромінювання в моделі і природному об'єкті.

Для з'ясування оптичних характеристик світлорозсіювального середовища з урахуванням направленої і розсіяної компоненти світлового потоку перейдемо до рівняння двопотокового наближення, що впливає із рівняння переносу випромінювання.

Нехай на досліджуване середовище падає випромінювання, безрозмірний вектор Стокса якого \vec{S}_0 , та площина розсіювання збігається з площиною референції Q. Позначимо вектор Стокса елементарного потоку, однократно розсіяного в одиницю тілесного кута випромінювання в напрямку $\vec{l}(\varphi, \psi)$ елементом об'єму $dV_x = \pi \theta x^2 dx$, що знаходиться на відстані x від приймача випромінювання для довільної площини, поверненої на кут ψ , відносно площини Q через $d\vec{S}^{(1)}(\varphi, \psi, x)$. Тоді для однократного розсіювання можна записати

$$d\vec{S}^{(1)}(\varphi, \psi, x) = F_0 k_p(x) \hat{f}(x, \varphi) e^{-\int_0^x k(\xi) d\xi} \hat{k}(\psi) S_0 dx, \tag{1}$$

де $\hat{f}(x, \varphi)$ – нормована матриця розсіювання, $\hat{k}(\psi)$ – матричний оператор повороту площини референції:

$$\hat{k}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin 2\psi & 0 \\ 0 & -\sin 2\psi & \cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Вектор Стокса елементарного потоку дворазово розсіяного в одиницю тілесного кута елементом об'єму dV , що знаходиться від dV_x на відстані ρ запишеться як

$$d\vec{S}_1^{(2)} = \frac{k_p(x') \hat{f}(x', \varphi') d\vec{S}^{(1)}}{\rho^2} e^{-\int_0^\rho k(\xi) d\xi}, \tag{3}$$

де $x' = x + \rho \cos\varphi$ координата розсіюючого об'єму dV , а $\varphi' = \pi - \varphi + \frac{\psi}{2}$.

Вектор Стокса елементарного потоку, що потрапляє на приймач буде

$$d\vec{S}^{(2)} = \frac{S_i \delta \cdot e^{-\int_0^l k(\xi) d\xi}}{\rho^2} \int_0^{2\pi} \hat{k}(\psi) d\vec{S}_1^{(2)} d\psi, \tag{4}$$

Повторне застосування оператора $\hat{k}(\psi)$ проводиться з метою приведення елементарних векторів $d\vec{S}_1^{(2)}$ до єдиної системи координат. Для того, щоб знайти вектор Стокса всього потоку дворазово розсіяного випромінювання $\vec{S}^{(2)}(l)$, що попадає в прийомну систему в момент часу $t = \frac{2l}{c}$, потрібно підставити (3) у (4) і провести підсумовування по всьому об'єму [3]. Тоді остаточно одержимо

$$\begin{aligned}
 d\bar{S}^{(2)}(l) = & \frac{S_{i\delta} F_0 k_p(x) e^{-2\tau(x)} \Delta x}{\rho^2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{x'(\varphi)}^l \frac{k_p(x') \text{Sin}\varphi}{R(x, x', \varphi)} \int_0^{2\pi} \hat{f}(x, \varphi) \hat{k}(\psi) \cdot \hat{f}(x', \varphi), \right. \\
 & \hat{k}(\psi) S^0 d\psi dx' d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{x_2(\varphi)}^l \frac{k_p(x') \text{Sin}U}{(x')^2} \int_0^{2\pi} \hat{f}(x', \varphi) \hat{k}(\psi) \hat{k}(\psi) \bar{S}^{(0)} d\psi dx' d\varphi + \\
 & \left. + \int_0^{\varphi_2} \int_{x_1(\varphi)}^x \frac{k_p(x') \text{Sin}\varphi}{(x')^2} \int_0^{2\pi} \hat{f}(x, \varphi) \hat{k}(\psi) \cdot \hat{f}(x', \varphi) \hat{k}(\psi) \bar{S}^{(0)} d\psi dx' d\varphi \right]. \quad (5)
 \end{aligned}$$

У (5) межі інтегрування $x'(\varphi), \varphi_2$ визначаються виразами $x_2(\varphi) = x \left(1 - \frac{\text{Sin}^2 \frac{\Psi}{2}}{\text{Sin}(\varphi + \frac{\Psi}{2})}\right)$ а

$x_1(\varphi) = x - \frac{\Delta l}{\text{Cos}^2 \frac{\varphi}{2}}$. В силу адитивності сумарний вектор-параметр Стокса розсіяного назад

випромінювання запишеться у вигляді

$$\bar{S}(l) = \bar{S}^{(1)}(l) + \bar{S}^{(2)}(l), \quad (6)$$

де $\bar{S}^{(1)}(l)$ – вектор Стокса однократно розсіяного випромінювання.

Формально отримана математична модель поляризації випромінювання (6) представляє собою рівняння лазерної локації в наближенні дворазового розсіювання з врахуванням поляризаційних ефектів, яке дозволяє досліджувати всі поляризаційні характеристики інформативного сигналу: крос-поляризовані і паралельно-поляризовані компоненти, ступінь поляризації (деполяризації), поворот площини поляризації, еліптичність поляризованого випромінювання тощо.

Кореляційний аналіз статистичних і динамічних характеристик світлорозсіювальних середовищ

Додаткову інформацію про дисперсні світлорозсіювальні середовища можна одержати за допомогою кореляційної обробки результатів експериментальних досліджень. Справа в тім, що параметри інформативних сигналів змінюються випадково за рахунок зміни неоднорідностей середовища, що знаходяться в постійному русі. Ці неоднорідності можуть розширюватися, стискуватися, розпадатися і виникати у відповідності з деякими випадковими законами. Звідси і виникає необхідність кореляційного аналізу статистичних і динамічних характеристик середовища. Будемо вважати, що інтенсивність оптичного сигналу пропорційна функції $f(x, y, z, t)$, що описує структуру неоднорідностей. Тоді запишемо узагальнену кореляційну функцію флуктуації інтенсивності зондувального оптичного сигналу як

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) f(x, y, z, t) = R(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t), \quad (7)$$

де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – зсуви уздовж відповідних осей системи координат; $t, \Delta t$ – моменти часу спостережень [3,4].

Розкладемо функцію R у ряд Тейлора в околиці точки $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta t = 0$. Крім того, функція R симетрична, тобто $R(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t) = R(-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z, -\Delta t)$ диференційована, оскільки ми припускаємо, що процес f стаціонарний і ергодичний. У розкладанні непарні члени будуть дорівнювати нулю. Зневажаючи членами ряду вище другого порядку, одержимо позитивно визначену квадратичну форму:

$$\sigma^2 - R = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta t \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де коефіцієнти $a_{i,j}$ – другі часткові похідні від кореляційної функції в точці розкладання. Коефіцієнти $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ – зв’язані з просторовими a_{41}, a_{42}, a_{43} – просторово-тимчасовими, a_{44} – з тимчасовими швидкостями зміни функції f .

Визначивши переріз функції $R = const$, можна знайти $a_{i,j}$, а потім розрахувати середні розміри, форму й орієнтацію неоднорідностей (статистичні характеристики), їхню швидкість і напрямок руху, час життя (динамічні характеристики).

Якщо швидкість руху неоднорідностей у горизонтальному напрямку перевищує швидкості вгору і вниз, то кореляційна функція стає функцією просторових зрушень $\Delta x^3 \Delta y$ і тимчасового зсуву Δt . Тоді нормована на σ^2 кореляційна функція (8) у системі координат, що рухається разом з полем неоднорідностей запишеться у вигляді

$$R(\Delta x^*, \Delta y^*, \Delta t) = g \left\{ (A \Delta x^{*2} + B \Delta y^{*2} + 2H \Delta x^* \cdot \Delta y^* + K \Delta t^2) \right\}, \quad (9)$$

де g – однозначна й обмежена функція; A, B, H, K – коефіцієнти квадратичної форми, що задають розміри, форму і час життя (K) неоднорідностей. Переріз $R(\Delta x^*, \Delta y^*, \Delta t) = const$ являють собою еліпсоїди. Отже, неоднорідності у світлорозсіювальному середовищі можна апроксимувати еліпсами в горизонтальній площині.

Зробимо перехід до нерухокої системи координат за допомогою наступних перетворень

$$\left. \begin{matrix} x^* = x - V_x t \\ y^* = y - V_y t \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \Delta x^* = \Delta x - V_x \Delta t \\ \Delta y^* = \Delta y - V_y \Delta t \end{matrix} \right\}. \quad (10)$$

Тоді (9) запишеться як

$$R(\Delta x, \Delta y, \Delta t) = g \left\{ A(\Delta x - V_x \Delta t)^2 + B(\Delta y - V_y \Delta t)^2 + 2H(\Delta x - V_x \Delta t) \cdot (\Delta y - V_y \Delta t) + K \Delta t^2 \right\}. \quad (11)$$

З метою виміру швидкості переміщення неоднорідностей $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ у горизонтальній площині можна провести спостереження середовища в два різних моменти часу чи в декількох фіксованих точках середовища на відстані Δx_0 один від одного. У першому випадку проводяться просторові виміри кореляції, в іншому – тимчасові.

Якщо в просторі на осі x вибрати дві точки на відстані ξ_0 , то тимчасові зміни характеризуються нормованою взаємною кореляційною функцією $R^*(\xi_0, 0, \tau)$. Максимум її знаходиться з умови $\partial R^* / \partial \tau = 0$ або

$$-A(\xi_0 - V_x \tau) V_x + B V_y^2 \tau + H V_y (\xi_0 - 2 V_x \tau) + K \tau = 0. \quad (12)$$

Тоді тимчасова затримка максимуму $R^*(\xi_0, 0, \tau)$ визначиться з

$$\Delta t' = \frac{\xi_0 (A V_x + H V_y)}{(A V_x^2 + B V_y^2 + 2 H V_x V_y + K)}. \quad (13)$$

Отже положення максимуму R^* визначається як швидкістю переміщення неоднорідностей, так і коефіцієнтами квадратичної форми, тобто їхньою структурою.

Якщо вважати неоднорідності ізотропними в горизонтальній площині з великим часом життя, то $A=B, H=0$ і $K=0$ і вираз (13) спроститься

$$\Delta t' = \frac{\xi_0 V_x}{V_y^2 + V_x^2}. \quad (14)$$

Відношення $\xi_0/\Delta t'$ дає швидкість V'_x , що пов'язана з модулем швидкості як

$$V'_x = V / \cos \gamma, \quad (15)$$

де φ – кут між віссю x і напрямком переміщення неоднорідностей.

Сполучаючи вісь x з напрямком переміщення неоднорідностей (13), прийmemo до виду

$$V' = V + \frac{K}{A_v}. \quad (16)$$

В (16) K/A_v є квадратом швидкості випадкового процесу V_c^2 , а швидкість V' можна вважати удаваною. Як видно з (16), ця швидкість завжди більше істинної через внесок мінливості неоднорідностей. Щоб знайти V_c , необхідно визначити тимчасову кореляційну функцію $R^*(0,0,\tau)$ точки спостереження, від якої визначається швидкістю $V'_c = \sqrt{V^2 + V_c^2}$ зміни розсіяного сигналу для нерухомого спостерігача, яка є характеристичною і визначається як

$$V'_c = \xi_0 / \tau_s, \quad (17)$$

де τ_s задовольняє рівнянню $R^*(\xi_0, 0, 0) = R(0, 0, \tau_s)$. На рис.1 для аналізу часових змін розсіяного сигналу в двох точках приведена графічна ілюстрація виразів (13) і (17).

На практиці, щоб зрушення $\Delta t' = \tau' i \tau_s$ були в області квадратичної апроксимації кореляційної функції, їх знаходять по довільному рівню $R^* = \gamma$ із співвідношень (див. рис.).

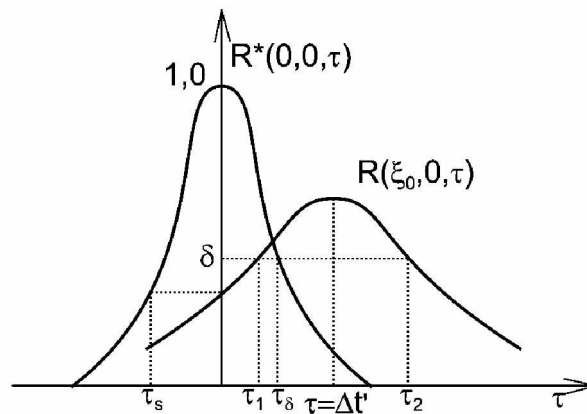


Рис. До аналізу часових змін розсіяного сигналу в двох точках

$$\tau_s^2 = \tau^2 + \tau_1 \cdot \tau_2, \quad \tau' = 0.5(\tau_1 + \tau_2). \quad (18)$$

У точках τ_1 , τ_2 і τ_s виконується умова

$$R^*(0,0,\tau_s) = R^*(\xi_0,0,\tau_1) = R^*(\xi_0,0,\tau_2) = \gamma. \quad (19)$$

Для визначення розміру неоднорідностей l з часом їхнього життя τ необхідно провести аналіз тимчасових змін у трьох точках простору, що не лежать на одній прямій. По вже описаній методиці попередньо визначаються три удавані і три характеристичні швидкості. Значення характеристичних швидкостей у цій системі, відкладені симетрично відносно початку, зададуть еліпс, що описує форму й орієнтацію неоднорідностей. Далі відповідним вибором масштабу характеристичних швидкостей можна домогтися дотикання еліпса і фронту удаваних швидкостей. Точка дотику дасть напрямок шуканої швидкості, а значення швидкостей V_l і V'_c у цій точці дозволить визначити модуль швидкості переміщення неоднорідностей зі співвідношення

$$V = V_c^3 / V'. \quad (20)$$

Для визначення абсолютних розмірів неоднорідностей необхідно ще задати рівень затухання автокореляційних функцій. Його зручно вибрати при $R^* = 0,5$. Оцінивши по середній автокореляційній функції $\tau_{0,5}$, при якому $R^* = 0,5$, середній розмір неоднорідностей виразиться в

такий спосіб

$$l = 2V'_c \cdot \tau_{0,5} = 2\tau_{0,5} (VV')^{1/2}. \quad (21)$$

Зі швидкістю V_c пов'язаний час життя неоднорідностей

$$\tau_c = 2\tau_{0,5} \cdot V'_c / V_c = 2\tau_{0,5} (V \cdot V')^{1/2} / V_c. \quad (22)$$

Важливою характеристикою неоднорідностей є коефіцієнт мінливості інформативного сигналу Δ , що визначається як відношення середньоквадратичного відхилення до середнього значення і часто називається коефіцієнтом варіації [3-5].

Висновки

Враховуючи все вище вказане можна прийти до висновку про те, що дослідження поляризації випромінювання у світлорозсіювальних середовищах на модельних системах мають такі переваги:

- стаціонарні лабораторні умови сприяють одержанню більш коректних даних, ніж в умовах експедиції за рахунок можливості більш точно контролювати і підтримувати постійними первинні характеристики і з'ясувати деталі структури розсіяного світлового поля;
- широке варіювання ε , Λ і x (γ) дозволяє одержати повні дані про закономірності розсіювання світла в залежності від зазначених характеристик та оцінити вплив кожної з них на структуру світлового поля, що особливо істотно в натурних умовах, коли дані про оптичні властивості середовища, як правило, далеко не точні;
- вартість та час для проведення робіт на моделях у багато разів менший тих витрат та часу, яких вимагає проведення експедицій або натурний експеримент.

Отже, за допомогою поляризаційних характеристик можна здійснювати селекцію окремих фазових утворень, підстилаючої поверхні, виділяти багаторазове розсіювання, а також стежити за динамікою утворення і розпаду світлорозсіюючого дисперсного середовища і вивчати його оптико-фізичні та електричні параметри.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Иванов А. П. Оптика светорассеивающих сред. – Мн.: Наука і техніка, 1969. – 618 с.
2. Hulst H. C. van de. Multiple Light Scattering. Vol.1 and 2. – New York: Academic Press, 1980. – 739 p.
3. Донченко В. А., Кабанов М. В. Рассеяние оптических волн дисперсными средами. Часть II. Система частиц. Издание Томского филиала СО АН СССР, Томск, 1983, – 185 с.
4. Петрук В. Г. Спектрофотометрія світлорозсіювальних середовищ (теорія і практика оптичного вимірювального контролю) Монографія (ч. II). – Вінниця: Універсум-Вінниця, 2000. – 207 с.
5. Петрук В. Г., Васильківський І. В., Гаркушевський В. С. Математична модель трансформації випромінювання дисперсним середовищем в умовах глибинного режиму / Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – Вінниця: ВДТУ, 2002, № 2. – С.98-103.

Петрук Василь Григорович – завідувач кафедри, **Васильківський Ігор Володимирович** – старший викладач кафедри, **Кватернюк Сергій Михайлович** – молодший науковий співробітник кафедри, **Турчик Павло Миколайович** – асистент кафедр.

Кафедра хімії та екологічної безпеки, Вінницький національний технічний університет

Матеріали доповіді розглянуті і рекомендовані до публікації членами наукового комітету конференції д.т.н., професором Є.Т. Володарським і д.т.н., професором В.О. Поджаренко.