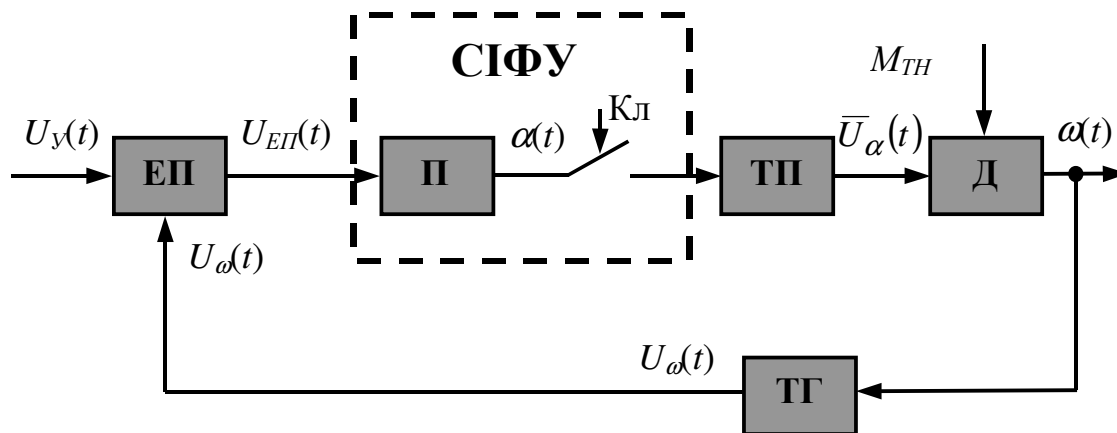


Б.І. Мокін, В.Б. Мокін, О.Б. Мокін

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Б.І. Мокін, В.Б. Мокін, О.Б. Мокін

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ
ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Затверджено Вченою Радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів спеціальності 7.092203 – “Електромеханічні системи автоматизації та електропривод”, протокол № 10 від 26 травня 2005 року.

Вінниця «УНІВЕРСУМ–Вінниця» 2005

УДК 519.7:63-83
ББК 32.816
М 74

Рецензенти:

Ю. А. Карпов, доктор технічних наук, професор (ВНТУ)
Р. Н. Квстний, доктор технічних наук, професор (ВНТУ)
Д. Й. Родькін, доктор технічних наук, професор (КДПУ)

Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б.
М 74 **Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів.**
Навчальний посібник. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2005. –
300 с.

ISBN

Навчальний посібник присвячено викладенню методів ідентифікації електромеханічних процесів у лінійних та нелінійних системах, неперервних та дискретних, як в часовому просторі, так і на комплексній площині, як в детермінованому, так і в стохастичному варіантах, як з врахуванням зосереджених, так і розподілених та нечітко визначених параметрів.

Практичне застосування розглянутих методів ідентифікації ілюструється прикладами з автоматизованого електропривода та електромеханічних систем автоматизації.

Посібник рекомендується для студентів, які навчаються за напрямком “Електромеханіка” спеціальності “Електромеханічні системи автоматизації та електропривод”.

УДК 519.7:63-83

ISBN

© Б.І. Мокін,
В.Б. Мокін,
О.Б. Мокін, 2005

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
ЧАСТИНА I. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЕМП У ДЕТЕРМІНОВАНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ.....	10
1. СИСТЕМА АВТОМАТИЗОВАНОГО ЕЛЕКТРОПРИВОДА ЯК ТИПОВИЙ І НАЙБІЛЬШ РОЗПОВСЮДЖЕНИЙ ПРИКЛАД ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ.....	10
1.1. Приклади систем автоматизованого електропривода.....	10
1.2. Математичні моделі електродвигунів.....	21
1.3. Математична модель електричного генератора.....	27
1.4. Математичні моделі підсилювачів.....	30
1.5. Математична модель силового перетворювача.....	37
1.6. Математичні моделі давачів інформації.....	42
1.7. Математична модель мікро-ЕОМ як елемента САЕП.....	44
1.8. Класифікація ЕМС.....	47
1.9. Завдання для самоперевірки.....	49
2. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ЕМС З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	51
2.1. Ідентифікація у часовому просторі.....	51
2.2. Ідентифікація на комплексній площині.....	54
2.3. Ідентифікація на частотній осі.....	76
2.4. Ідентифікація у просторі змінних стану.....	82
2.5. Перехідна та імпульсна перехідна характеристики лінійної динамічної системи з зосередженими параметрами.....	84
2.6. Завдання для самоперевірки.....	87
3. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	89
3.1. Решітчасті функції та скінченні різниці.....	89
3.2. Рівняння в скінченних різницях та різницеві рівняння.....	96
3.3. Дискретне перетворення Лапласа та Z-перетворення.....	99
3.4. Побудова різницевої моделі детермінованої САЕП із зосередженими параметрами.....	107
3.5. Завдання для самоперевірки.....	117
4. ФУР'Є-ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	119
4.1. Вихідні передумови ФІМІ.....	119
4.2. Синтез алгоритмів параметричної ідентифікації сигналів на вході лінійної вимірювальної системи.....	120

4.3. Побудова алгоритму параметричної ідентифікації лінійної динамічної системи за допомогою ФІМІ.....	127
4.4. Екскурс у метод найменших квадратів	132
4.5. Завдання для самоперевірки	140
ЧАСТИНА ІІ. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЕМП У СТОХАСТИЧНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ.....	142
5. СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ НЕПЕРЕРВНИХ ЕМП З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВІ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	142
5.1. Основні характеристики стаціонарних випадкових процесів.....	142
5.2. Кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів	155
5.3. Ідентифікація лінійних неперервних стохастичних ЕМП з зосередженими параметрами за допомогою рівняння Вінера – Хопфа.....	165
5.4. Завдання для самоперевірки	170
6. ФУР'Є-ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ СТОХАСТИЧНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ЕМП З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	173
6.1. Вихідні передумови.....	173
6.2. Основні розрахункові співвідношення ФІМІ та побудова алгоритму ідентифікації	173
6.3. Обґрунтування регуляризувальних властивостей ФІМІ.....	175
6.4. Завдання для самоперевірки	176
7. МОДЕЛІ ТЕХНІЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ НА ОСНОВІ СТАТИСТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ	178
7.1. Характеристика задач технічної діагностики	178
7.2. Загальна характеристика методів статистичної теорії прийняття рішень	179
7.3. Три “кити”, на яких тримається статистична теорія прийняття рішень	181
7.4. Математична модель середнього ризику	183
7.5. Метод мінімального ризику (ММР).....	185
7.6. Функція правдоподібності як базова математична модель для методу максимальної правдоподібності (ММП) та методу мінімальної кількості помилкових рішень (ММКПР)	186
7.7. Математичні моделі методу мінімаксу (МММ)	188
7.8. Приклад розв’язання однієї і тієї ж задачі технічної діагностики різними статистичними методами.....	191
7.8.1. Розв’язання задачі за допомогою ММР.....	192
7.8.2. Розв’язання задачі за допомогою ММП.....	193
7.8.3. Розв’язання задачі за допомогою ММКПР	194
7.8.4. Розв’язання задачі за допомогою МММ	194
7.8.5. Узагальнення результатів розв’язання задачі	195

7.9. Завдання для самоперевірки	196
8. СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВІ ЧАСОВИХ РЯДІВ	198
8.1. Часові ряди та їх основні характеристики	198
8.2. Синтез моделі стаціонарного часового ряду на основі лінійного фільтра	201
8.3. Модель стаціонарного часового ряду на основі авторегресії	203
8.4. Модель стаціонарного часового ряду на основі ковзного середнього	205
8.5. Комбінована модель стаціонарного часового ряду на основі авторегресії – ковзного середнього	206
8.6. Модель нестаціонарного часового ряду на основі авторегресії – проінтегрованого ковзного середнього	207
8.7. Автоковаріація та автокореляція часового ряду	210
8.8. Рівняння Юла – Уокера	211
8.9. Ідентифікація лінійних дискретних ЕМП із зосередженими параметрами на основі моделей часових рядів	214
8.10. Завдання для самоперевірки	218
ЧАСТИНА ІІІ. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЕМП В НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ ТА СИСТЕМАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	220
9. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ	220
9.1. Математичні моделі нелінійних систем, характеристики яких допускають лінеаризацію	220
9.2. Математичні моделі релейних елементів з симетричними характеристиками	224
9.3. Математичні моделі динаміки суттєво нелінійних систем з релейними елементами	228
9.4. Аналіз динаміки суттєво нелінійних систем з релейними елементами	241
9.5. Завдання для самоперевірки	256
10. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	259
10.1. Загальна характеристика систем з розподіленими параметрами ..	259
10.2. Рівняння математичної фізики як моделі елементів систем з розподіленими параметрами	262
10.3. Аналіз математичних моделей систем з розподіленими параметрами	271
10.4. Математичні моделі систем з чистим запізненням	280
10.5. Завдання для самоперевірки	292
ПІДСУМКИ	295
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	297

ВСТУП

При перетворенні електричної енергії у механічну внаслідок взаємної невідповідності окремих або всіх характеристик основних елементів технологічної схеми перетворення виникають втрати, які можуть досягати значень вихідного потоку.

Експериментальний пошук найкращих умов припасування елементів приводить до значних затрат коштів та часу, а у випадках великих потужностей і значних габаритів може не бути здійсненим взагалі.

Дуже часто технологічний об'єкт, який є кінцевим елементом електромеханічного перетворення енергії, має області, заборонені для функціонування, оскільки в них виникають умови для його руйнації внаслідок полумок або вибухів.

Визначення границь таких областей є окремою важливою проблемою, для розв'язання якої експериментальний спосіб є неприйнятним взагалі.

Ще більше 200 років тому назад вчені різних країн звернули увагу на те, що різноманітні фізичні процеси можуть бути адекватно описані алгебраїчними, диференціальними або інтегральними рівняннями, які з часом почали називати математичними моделями цих процесів.

Оскільки для визначення найкращих умов припасування розв'язків рівнянь, котрі адекватно описують процеси у фізичних об'єктах, часу, людських та матеріальних ресурсів треба набагато менше у порівнянні з експериментальним їх визначенням на самих об'єктах, то це об'єктивно спричинило стрімкий злет зацікавленості у математиків та фізиків до проблем побудови математичних моделей фізичних процесів, широким і надзвичайно важливим класом яких є процеси перетворення електричної енергії у механічну.

З електромеханічним перетворенням енергії ми маємо справу і тоді,

коли внаслідок пропускання електричного струму по обмотці реле отримуємо лінійне чи кутове переміщення його контактів, і тоді, коли внаслідок пропускання електричного струму по обмотці соленоїда отримуємо переміщення зв'язаної з його якорем заслінки газової, нафтової чи водяної труби, і в багатьох інших випадках. Але найбільш поширеним у процентному відношенні на діаграмі потужностей є процес перетворення електричної енергії у механічну за допомогою електродвигунів із подальшим узгодженням її за параметрами з технологічними об'єктами за допомогою різноманітних редукторів, муфт та передач.

Саме тому, що методи побудови математичних моделей електромеханічних процесів у даному посібнику проілюстровані, в основному, на прикладах різноманітних електроприводів та електромеханічних систем автоматизації, цей посібник, на думку авторів, може стати настільною книгою фахівця за спеціальністю 092203 “Електромеханічні системи автоматизації та електропривод”.

У першій частині посібника “Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів” показано, як будувати математичні моделі електромеханічних систем за умов, коли рівень завад та внутрішніх шумів у системах є суттєво нижчим від рівня основних процесів на всіх стадіях їх перетворення, що дає право відносити такі системи до класу детермінованих.

Але можна навести досить багато випадків, коли ця умова не виконується. Наприклад, режим роботи електропривода екскаватора ніяк не можна віднести до детермінованих, оскільки навіть досвідчений машиніст екскаватора не здатний однозначно спрогнозувати скільки ґрунту приходить за цикл ківш його машини, особливо коли є небезпека нашттовхнутись на міцне коріння від недокорчованого пенька або зачепитись за підземний виступ непідйомного скельного каменя.

Що ж стосується електроприводів міських водогінних станцій, то

значення моментів навантаження на їх валах у довільний момент часу є випадковим принципово, оскільки ніхто не може наперед точно визначити скільки водовідбірних кранів, підключених до водоводу, буде у даний момент часу відкрито і на яку пропускну здатність.

Випадковими, очевидно, є і режими роботи електроприводів дробаркових механізмів усіх класів.

Приклади можна наводити і далі, але мабуть і цього досить, аби дійти висновку, що для практичного аналізу є актуальними задачі побудови математичних моделей електромеханічних процесів, які відносяться до класу стохастичних, головною особливістю яких є, як відомо, випадковість значень параметрів їх режимів у кожний момент часу.

Розгляду математичних методів ідентифікації стохастичних електромеханічних систем із зосередженими параметрами присвячена друга частина посібника.

Часто ефективне функціонування електромеханічних систем досягається лише на нелінійних ділянках характеристик перетворення енергії, а тому виникає необхідність у синтезі математичних моделей цих систем з врахуванням нелінійності характеристик елементів, одним із найпоширеніших класів яких є релейні.

Дуже важливо також при математичному моделюванні електромеханічних систем вміти враховувати запізнення проходження сигналів через елементи з розподіленими у просторі параметрами.

Розгляду математичних методів ідентифікації нелінійних електромеханічних систем та систем з розподіленими параметрами присвячена третя частина цього навчального посібника.

На завершення вступу відзначимо, що ідентифікацією при побудові математичних моделей фізичних процесів одні фахівці називають визначення числових значень коефіцієнтів синтезованих моделей, а інші — весь процес побудови математичної моделі від вибору типу рівняння до визна-

чення числових значень його коефіцієнтів.

Ми будемо використовувати термін “ідентифікація” в найбільш широкому його значенні, вважаючи тотожними словосполучення “синтез математичної моделі, ідентичної характеристикам процесу, що моделюється” та “ідентифікація процесу”.

Оскільки при написанні посібника використані лише відомі та опубліковані результати, то, подавши список літератури, з якої взяті ці результати, ми при викладенні конкретного матеріалу не будемо робити посилань на те, звідки що взято, — це буде стимулювати студентів до ознайомлення з усіма першоджерелами.

Даний навчальний посібник створено на основі виданих раніше окремо першої та другої його частин з уточненнями, доповненнями та врахуванням побажань студентів і доповнено третьою частиною, яка окремо ще не видавалась.

ЧАСТИНА І.
ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЕМП У ДЕТЕРМІНОВАНИХ НЕПЕРЕРВНИХ
ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

1. СИСТЕМА АВТОМАТИЗОВАНОГО ЕЛЕКТРОПРИВОДА ЯК
ТИПОВИЙ І НАЙБІЛЬШ РОЗПОВСЮДЖЕНИЙ ПРИКЛАД
ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ

1.1. Приклади систем автоматизованого електропривода

Оскільки ця книга не є посібником із систем автоматизованого електропривода (САЕП), то в ній не ставиться мета розглянути всі можливі варіанти побудови САЕП.

Ми розглянемо лише декілька прикладів реалізації САЕП з метою визначення основних елементів цього класу систем електромеханічного перетворення енергії і на цих прикладах продемонструємо, як та за допомогою яких математичних методів здійснюється синтез математичних моделей електромеханічних процесів.

Основним елементом будь-якої системи електропривода є *електричний двигун*, який перетворює електричну енергію постійного або змінного струму, що підводиться з електричної мережі до обмотки його статора, у механічну енергію обертання вала ротора.

Якщо параметри електричної енергії (значення робочої напруги, вид струму чи його частота), що надходить з мережі, не збігаються з аналогічними параметрами електричного двигуна, то він підключається до мережі через перетворювач параметрів електроенергії, який є другим за значенням елементом САЕП.

Кутова швидкість обертання ротора електродвигуна, як правило, не збігається з аналогічним параметром технологічного об'єкта, для якого цей

двигун служить приводом, і тому між ними встановлюється третій за значенням елемент САЕП — перетворювач параметрів механічної енергії — редуктор, передача чи електромагнітна муфта проковзування.

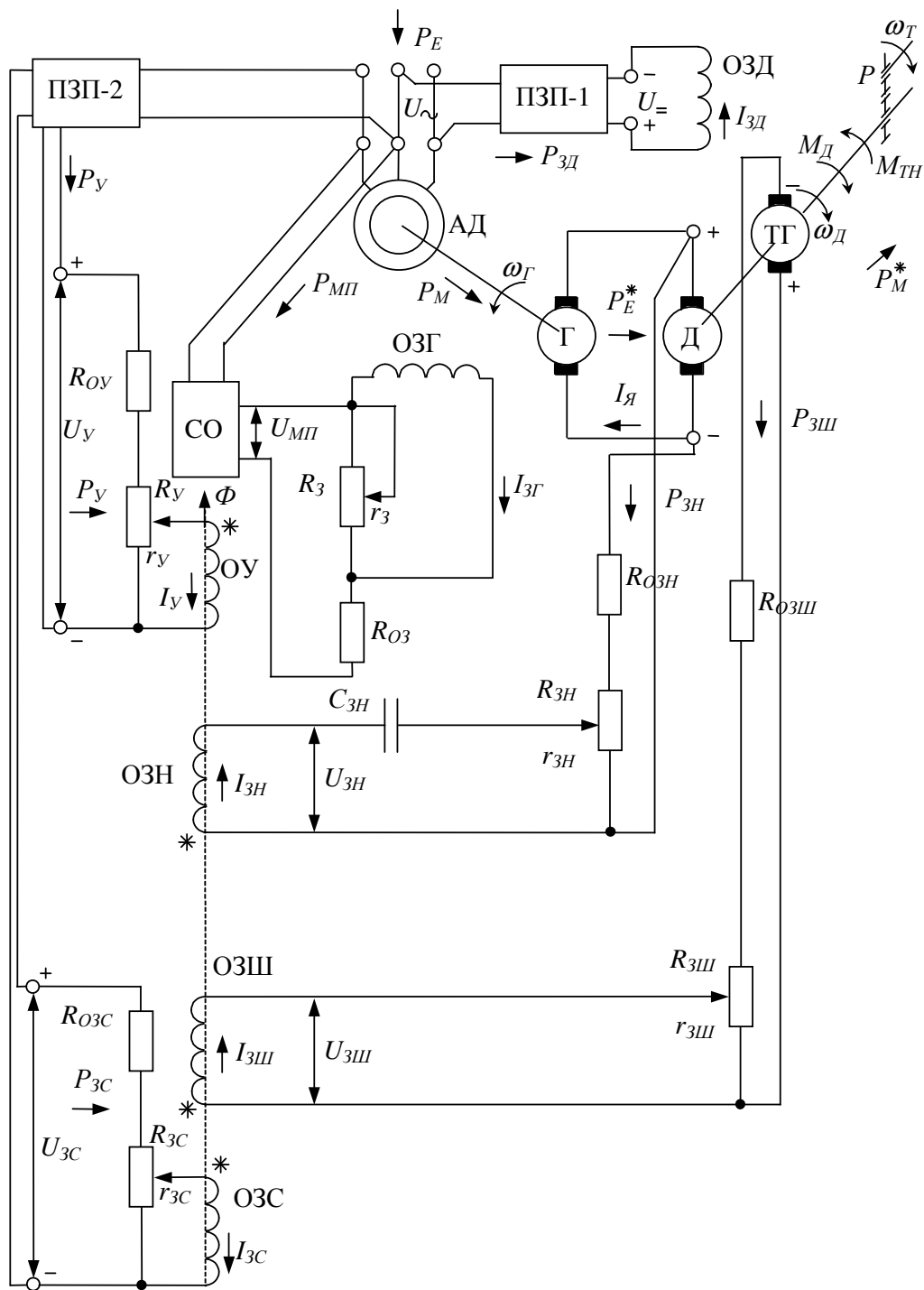


Рис. 1.1. Схема САЕП на базі системи Г-Д

Оскільки САЕП проектується для реалізації заданого закону управління кутовою швидкістю вала ротора електродвигуна, то четвертим обов'язковим елементом САЕП є система управління електроприводом, яка і переводить його у розряд автоматизованих і до складу якої крім задавача закону управління входять також зворотні зв'язки, по яких надходить інформація про значення вихідної та одної або декількох проміжних величин САЕП.

На рис. 1.1 зображена схема САЕП на базі системи Г-Д.

САЕП на базі системи “генератор – двигун” має широке розповсюдження як привод технологічних об'єктів великої потужності, таких, наприклад, як прокатні стани металургійних заводів або вентиляційні установки шахт.

Починати вивчення курсу “Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів” саме з побудови математичної моделі САЕП на основі схеми Г-Д доцільно, на наш погляд, і з методичної точки зору, оскільки ця схема проста для сприйняття і може бути легко осмисленою навіть студентами 2-го курсу, які ще не вивчали ні основ електропривода, ні електричних машин, а мають лише загальні уявлення про роботу пристроїв та агрегатів цього класу зі шкільного курсу фізики та після вивчення першої частини вузівського курсу теоретичних основ електротехніки.

На схемі рис. 1.1 використані такі позначення:

Д – електродвигун;

Г – електричний генератор;

АД – асинхронний двигун;

СО – силова обмотка магнітного підсилювача МП;

ТГ – тахогенератор;

Р – редуктор;

ОУ – обмотка управління магнітного підсилювача;

ОЗС – його обмотка зсуву, а ОЗН та ОЗШ – обмотки, які задають

зворотні зв'язки – гнучкий за напругою на затискачах якоря та жорсткий за швидкістю обертання вала електродвигуна;

ОЗД – обмотка збудження електродвигуна;

ОЗГ – обмотка збудження генератора;

ПЗП-1 – перетворювач змінного струму у постійний для живлення обмотки збудження двигуна;

ПЗП-2 – перетворювач аналогічний для подачі напруги на обмотки ОУ і ОЗС магнітного підсилювача;

$R_Y, R_{3C}, R_{3H}, R_{3Ш}, R_3$ – базові опори потенціометрів, а $R_{OY}, R_{O3C}, R_{O3H}, R_{O3Ш}, R_{O3}$ – опори обмежувальних резисторів у відповідних обмотках;

$r_Y, r_{3C}, r_{3H}, r_{3Ш}, r_3$ – опори тих плеч потенціометрів, з яких подається напруга на ОЗГ та ОУ, ОЗС, ОЗН та ОЗШ;

U_Y, U_{3C} – напруги, які подаються на обмотку управління та обмотку зсуву магнітного підсилювача;

U_{\sim} – напруга змінного струму, який подається на статор АД, котрий є приводним для Г;

$U_{=}$ – напруга постійного струму, яка подається на обмотку збудження Д, котра створює в ній струм $I_{3Д}$;

$\omega_G, \omega_D, \omega_{ГО}$ – кутові швидкості обертання валів генератора, електродвигуна та технологічного об'єкта;

P_E – потужність електричного струму, який споживається САЕП з електричної мережі;

P_M – потужність потоку механічної енергії на валу Г;

P_M^* – потужність потоку механічної енергії на валу Д;

P_Y, P_{3C}, P_{CO} – потужності електричного струму, які витрачаються у процесі роботи магнітного підсилювача МП;

$P_{3Ш}, P_{3Н}$ – потужності електричного струму, які витрачаються у зворотних зв'язках;

$P_{3Д}$ – потужність електричного струму, яка витрачається на збудження Д;

Φ – сумарний магнітний потік у сердечнику МП від взаємодії всіх його обмоток;

M_D – обертальний момент електродвигуна;

$M_{ТН}$ – момент технологічного навантаження на електродвигун;

$I_Y, I_{3С}, I_{3Н}, I_{3Ш}, I_3$ – електричні струми у відповідних обмотках;

I_Y – струм у колі якорів генератора та електродвигуна;

$C_{3Н}$ – ємність конденсатора, за допомогою якого створюється сигнал, пропорційний похідній від напруги на затискачах якоря генератора.

Працює ця САЕП у такий спосіб.

При подачі напруги U_Y на потенціометр R_Y за рахунок частки цієї напруги, яка знімається з опору r_Y , в обмотці управління ОУ магнітного підсилювача виникає струм I_Y . За рахунок взаємодії магнітного потоку, створеного струмом I_Y із силовими обмотками СО магнітного підсилювача МП, на виході останніх виникає напруга $U_{МП}$, яка прикладається до потенціометра R_3 у колі обмотки збудження ОЗГ генератора Г. За рахунок частки цієї напруги, яка знімається з опору r_3 , в обмотці ОЗГ виникає струм $I_{3Г}$. За рахунок взаємодії магнітного потоку, створеного струмом $I_{3Г}$, з обмоткою якоря генератора на затискачах останньої виникає електрорушійна сила (ЕРС) E_G , яка у вигляді напруги U_Y , меншої від E_G на падіння напруги $I_Y \cdot R_Y$ на активному опорі R_{YG} обмотки якоря генератора Г, прикладається до обмотки якоря електродвигуна Д. За рахунок цієї напруги в обмотці якоря двигуна Д виникає струм I_Y , який одночасно протікатиме і по обмотці якоря генератора Г. За рахунок взаємодії магніт-

ного потоку, створеного струмом $I_{3Д}$ в обмотці збудження ОЗД двигуна Д, та струму його якоря $I_{Я}$, виникає обертальний момент $M_{Д}$ на валу якоря електродвигуна Д, під дією якого якорь двигуна починає обертатись з кутовою швидкістю $\omega_{Д}$, долаючи протидію приведенного до вала двигуна моменту технологічного навантаження $M_{ТН}$. Поки $M_{Д} > M_{ТН}$ кутова швидкість $\omega_{Д}$ зростає, при $M_{Д} = M_{ТН}$ вона — стала, а при $M_{Д} < M_{ТН}$ — починає зменшуватись.

З валом електродвигуна Д жорстко зв'язаний вал якоря тахогенератора ТГ, ЕРС $E_{ТГ}$ якого пропорційна кутовій швидкості $\omega_{Д}$ і з точністю до постійного коефіцієнта пропорційності цю швидкість віддзеркалює. $E_{ТГ}$ прикладається до потенціометра $R_{3Ш}$. Її частка, що знімається з опору $r_{3Ш}$, яка теж пропорційна кутовій швидкості $\omega_{Д}$, створює в обмотці зворотного зв'язку за швидкістю ОЗШ магнітного підсилювача струм $I_{3Ш}$, магнітний потік від якого направлений назустріч магнітному потоку від струму $I_{У}$ в обмотці управління ОУ цього ж магнітного підсилювача.

Різниця цих магнітних потоків стабілізується тоді, коли $I_{3Г}$, $E_{Г}$, $I_{Я}$ та $\omega_{Д}$ набувають таких значень, за яких $M_{Д} = M_{ТН}$. Таким чином, цей негативний зворотний зв'язок завжди діє у напрямку повернення кутової швидкості $\omega_{Д}$ до сталого значення, якщо за рахунок якогось збурення вона від цього значення відхилилась. Дещо по-іншому діє гнучкий негативний зворотний зв'язок за напругою на затискачах якоря електродвигуна — він діє у перехідних режимах, коли швидко знижується напруга на затискачах якоря, але за його наявності проти магнітного потоку від обмотки управління ОУ у магнітному підсилювачі вже буде діяти не один магнітний потік від обмотки жорсткого зворотного зв'язку за швидкістю ОЗШ, а два потоки — другий від обмотки гнучкого зворотного зв'язку ОЗН за напругою на затискачах якоря електродвигуна Д.

Слід зазначити, що в тому ж напрямку, що й магнітний потік від обмотки управління, у магнітному підсилювачі діє ще один потік — від обмотки зсуву ОЗС, завдяки якому досягається використання основної характеристики магнітного підсилювача $U_{МП} = f(I_Y)$ у лінійному діапазоні робочих значень (роль цієї обмотки більш детально буде розкрита у підрозд. 1.4).

Якщо САЕП, схему якої приведено на рис. 1.1, розглядати як систему управління, то її вхідною величиною є сигнал U_Y , котрий задає закон керування, а вихідною — швидкість ω_D , яка змінюється у відповідності з цим законом.

Якщо ж її розглядати як систему, в якій здійснюється процес перетворення електричної енергії у механічну, то вхідною величиною є потужність електричного струму P_E , який надходить в систему з електромережі, а вихідною — потужність P_M^* потоку механічної енергії на валу електродвигуна (рис. 1.2).

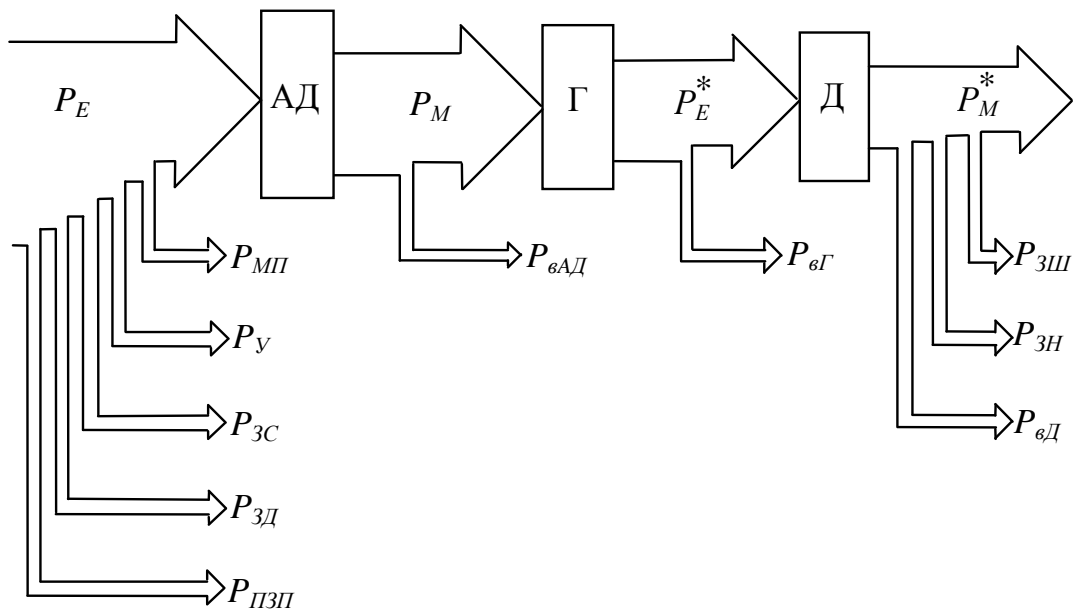


Рис. 1.2. Схема процесу перетворення електричної енергії у механічну в автоматизованому електроприводі на базі системи Г-Д

На рис. 1.2 крім вже визначених раніше потужностей показано ще декілька, а саме:

$P_{\epsilon AD}$ — потужність втрат енергії в асинхронному двигуні АД, який є приводом електричного генератора Г;

$P_{\epsilon \Gamma}$ — потужність втрат енергії в електричному генераторі Г;

$P_{\epsilon D}$ — потужність втрат енергії в електродвигуні Д;

$P_{ПЗП}$ — потужність втрат енергії у перетворювачах ПЗП-1 та ПЗП-2.

Із схеми, наведеної на рис. 1.2, легко бачити, що САЕП на базі системи Г-Д перетворює електричну енергію, яка надходить з електромережі, у механічну на валу електродвигуна Д не безпосередньо, а шляхом проміжного потрійного перетворення — спочатку у механічну енергію на валу асинхронного двигуна АД, потім в електричну енергію генератора Г і вже остаточно в електричному двигуні Д у механічну енергію на його валу.

Звичайно, чим більше проміжних перетворень, тим більше непродуктивних втрат енергії, які виникають під час цих перетворень.

А тому для підвищення коефіцієнта корисної дії (ККД) САЕП необхідно зменшувати кількість проміжних перетворень енергії в ланках.

На рис. 1.3 наведено САЕП, в якій має місце не потрійне, як у попередній схемі, а лише подвійне перетворення енергії, що суттєво підвищує її ККД.

У системі на рис. 1.3 як джерело енергії для електродвигуна Д, з вала якого знімається механічна енергія, використовується тиристорний перетворювач ТП, який перетворює електричну енергію змінного струму, котра надходить з електромережі, в електричну енергію постійного струму з регульованими параметрами, яка безпосередньо подається на вихідний електродвигун Д.

На вході електронного підсилювача (ЕП) цієї САЕП на базі ТП-Д використано лише один негативний зворотний зв'язок — за швидкістю обертання вала ротора Д.

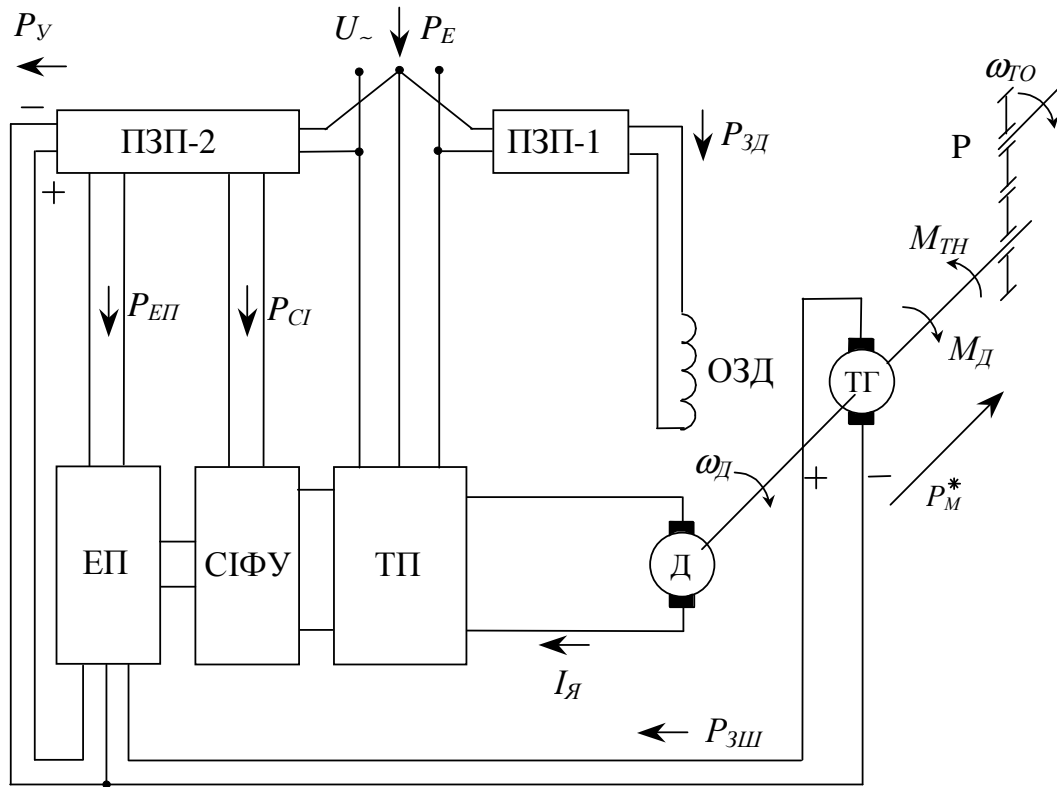


Рис. 1.3. Схема САЕП на базі системи ТП-Д

Але в системі є ще один новий блок — система імпульсно-фазового управління (СІФУ).

СІФУ виробляє команди, згідно з якими здійснюється затримка відкриття тиристорів у ТП, за рахунок чого регулюється рівень напруги на його вихідних затискачах, що, у свою чергу, впливає на значення кутової швидкості обертання вала ротора Д.

Більш детально про роботу СІФУ буде викладено у підрозд. 1.5.

На рис. 1.4 наведена схема процесу перетворення електричної енергії у механічну в автоматизованому електроприводі на базі системи ТП-Д.

Крім вже визначених раніше потужностей на рис. 1.4 вказано ще декілька, а саме:

$P_{\text{вТП}}$ — потужність втрат енергії в тиристорному перетворювачі;

$P_{\text{ЕП}}$ — потужність, яка використовується для силових каскадів електронного підсилювача ЕП, а $P_{\text{У}}$ — для кола управління ЕП;

P_{CI} – потужність, яка потрібна для функціонування СІФУ.

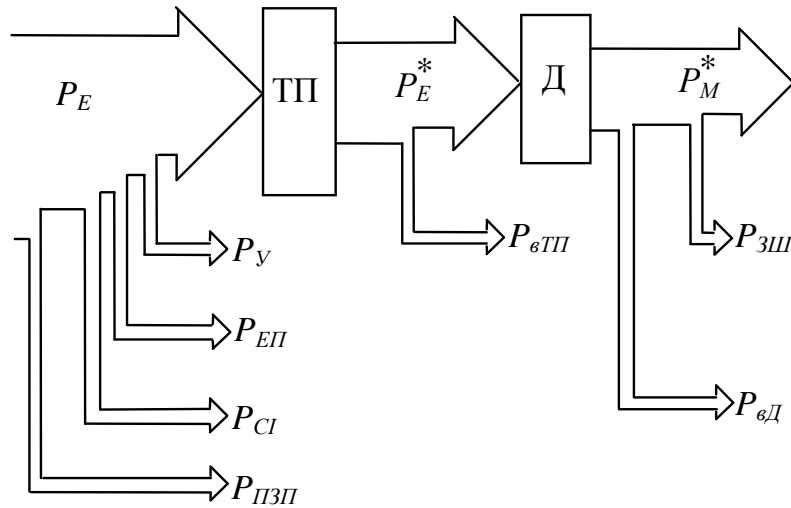


Рис. 1.4. Схема процесу перетворення електричної енергії у механічну в автоматизованому електроприводі на базі системи ТП-Д

Функціонально блоки ЕП та СІФУ виконують ту ж роль у САЕП на базі системи ТП-Д, що й магнітний підсилювач та обмотка збудження генератора в САЕП на базі системи Г-Д.

Необхідність використання електронного підсилювача замість магнітного на вході СІФУ викликана тим, що МП, внаслідок інерційності процесів у ньому, не забезпечує необхідної швидкодії під час реалізації закону управління тиристорним перетворювачем.

При складних законах управління U_{ν} їх формування у перетворювачі ПЗП-2 перед подачею на вхід електронного підсилювача стає теж складним завданням, яке легко розв'язується включенням до складу системи мікропроцесора П, котрий приймає аналогові сигнали через аналого-цифрові перетворювачі АЦП-1 та АЦП-2, а видає на електронний підсилювач ЕП аналоговий сигнал через цифроаналоговий перетворювач ЦАП.

Схема САЕП із мікропроцесорним управлінням подана на рис. 1.5.

Ми не будемо наводити схему процесу перетворення електричної

енергії в САЕП, показаний на рис. 1.5, оскільки вона принципово не буде відрзнятись від схеми на рис. 1.4. Відзначимо лише те, що на рис. 1.5 винесення U_y за межі мікропроцесора П є умовним — цим ми лише підкреслюємо, що можемо ввести його у мікропроцесор не лише безпосередньо, а й від будь-якого іншого пристрою.

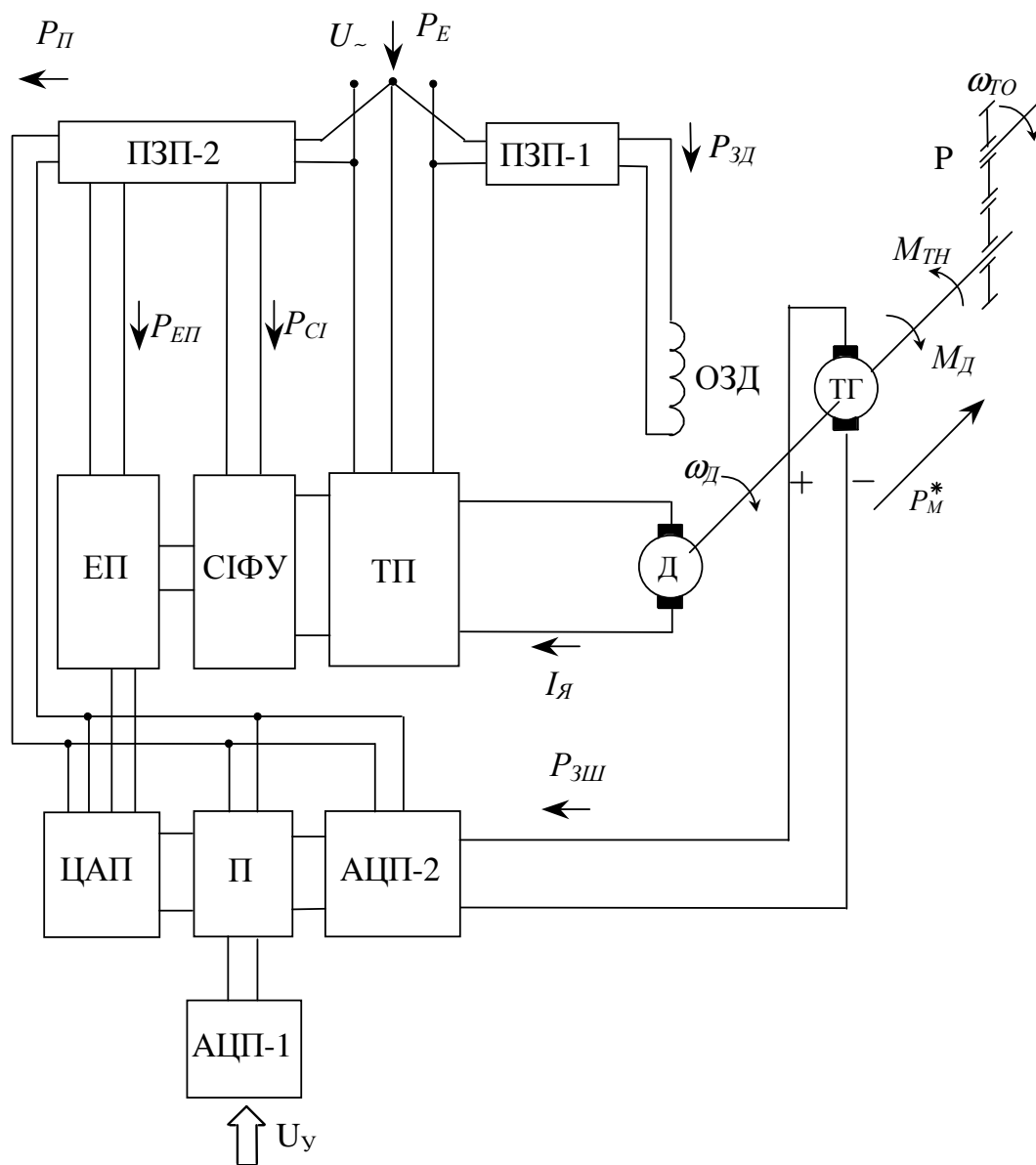


Рис. 1.5. Схема САЕП на базі системи ТП-Д із мікропроцесорним управлінням

1.2. Математичні моделі електродвигунів

Оскільки наше завдання полягає в тому, щоб навчитись будувати математичні моделі електродвигунів, а не в тому, щоб побудувати математичні моделі всіх відомих їх типів, то у цьому розділі ми розглянемо лише один, але дуже важливий клас електродвигунів постійного струму (ЕДПС).

У залежності від типу збудження їх поділяють на ЕДПС з незалежним збудженням (рис. 1.6, а), ЕДПС з паралельним збудженням (рис. 1.6, б), ЕДПС з послідовним збудженням (рис. 1.6, в) та ЕДПС з змішаним збудженням (рис. 1.6, г).

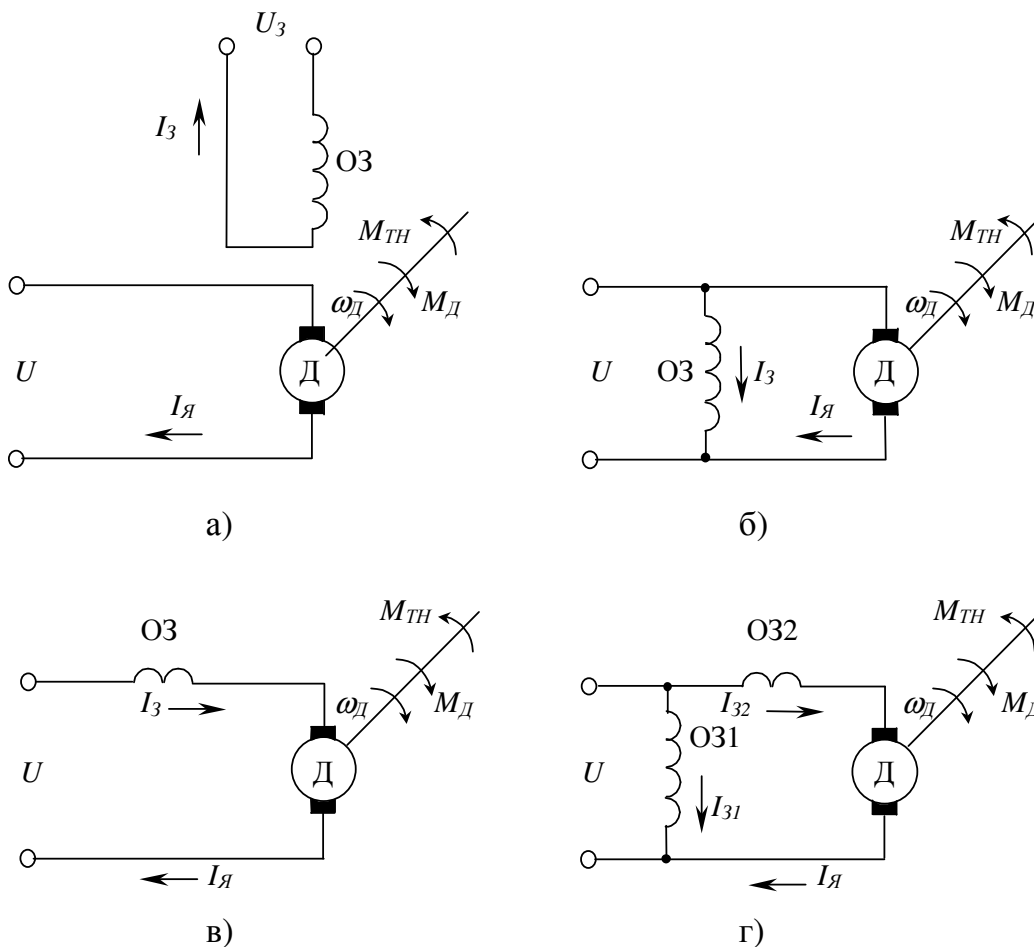


Рис. 1.6. Схеми ЕДПС

З курсу теоретичних основ електротехніки відомо, що напруга U , яка прикладається до затискачів якоря електродвигуна постійного струму з

незалежним збудженням, в сталому режимі врівноважується сумою електрорушійної сили обертання якоря E_D та падіння напруги $I_Y \cdot R_Y$ на опорі R_Y обмотки якоря, яке виникає під час протікання по цій обмотці струму I_Y , тобто

$$U = E_D + I_Y \cdot R_Y. \quad (1.1)$$

У свою чергу, ЕРС обертання E_D однозначно визначається через добуток швидкості обертання якоря ω_D та магнітного потоку Φ в обмотці збудження ОЗ

$$E_D = k_E \omega_D \Phi, \quad (1.2)$$

де k_E — коефіцієнт пропорційності, який визначається через конструктивні параметри електродвигуна, що наводяться в його паспортних даних.

Через інший коефіцієнт пропорційності k_I , який також легко підраховується за паспортними даними електродвигуна, пов'язані момент обертання двигуна M_D та струм в якорі I_Y

$$M_D = k_I I_Y. \quad (1.3)$$

Основною вихідною характеристикою електродвигуна є кутова швидкість обертання його вала ω_D , значення якої в кожний момент часу, як це видно з рівнянь (1.1), (1.2), залежить від рівня напруги U на затискачах якоря та ступеня гальмівного впливу моменту технологічного навантаження M_{TH} на вал, що впливає з відомого з курсу теорії електропривода рівняння

$$J \frac{d\omega_D}{dt} = M_D - M_{TH}, \quad (1.4)$$

де J — момент інерції всіх махових мас, жорстко зв'язаних з валом електродвигуна і який для переважної більшості електроприводів є величиною сталою.

У разі, якщо J не є величиною сталою, рівняння (1.4) ускладнюєть-

ся, але ми цей випадок на стадії вивчення способів побудови математичних моделей розглядати не будемо.

Фактично, рівняння (1.1)÷(1.4) і задають математичну модель електродвигуна в системі електропривода, який забезпечує процес електромеханічного перетворення енергії.

Але якщо підставити рівняння (1.2) та (1.3) в (1.1), то математичну модель електродвигуна можна визначити лише двома рівняннями — рівнянням (1.4) та рівнянням

$$\omega_D = \frac{U}{k_E \Phi} - \frac{r_{\text{Я}} M_D}{k_I k_E \Phi}, \quad (1.5)$$

яке замінює (1.1)÷(1.3).

Перше з них описує динаміку електродвигуна, тобто зміни в часі вихідної величини ω_D при змінах у часі вхідної M_{TH} , а друге — статику, тобто визначає яким буде значення ω_D при заданих U та M_{TH} і закінченні перехідних процесів, які характеризують динаміку.

Для того, щоб продемонструвати на графіках, як параметрично відрізняються процеси електромеханічного перетворення енергії в ЕДПС у залежності від типу збудження, замінимо в рівнянні (1.5) магнітний потік Φ від обмотки збудження еквівалентним йому струмом збудження I_3 , виходячи з відомого з теоретичних основ електротехніки виразу

$$\Phi = k_{\Phi} I_3, \quad (1.6)$$

де k_{Φ} — коефіцієнт пропорційності, значення якого однозначно визначається через відомі з відповідних довідників конструктивні параметри та обмоткові дані конкретного електродвигуна.

Тоді для ЕДПС із незалежним збудженням (рис. 1.6, а), для якого $I_3 = const$, отримаємо:

$$\omega_D = k_U U - k_M M_D, \quad (1.7)$$

де

$$k_U = \frac{1}{k_E k_\Phi I_3}, \quad k_M = \frac{R_Y}{k_I k_E k_\Phi I_3}. \quad (1.8)$$

Графік залежності (1.7) наведено на рис. 1.7 (неперервна лінія).

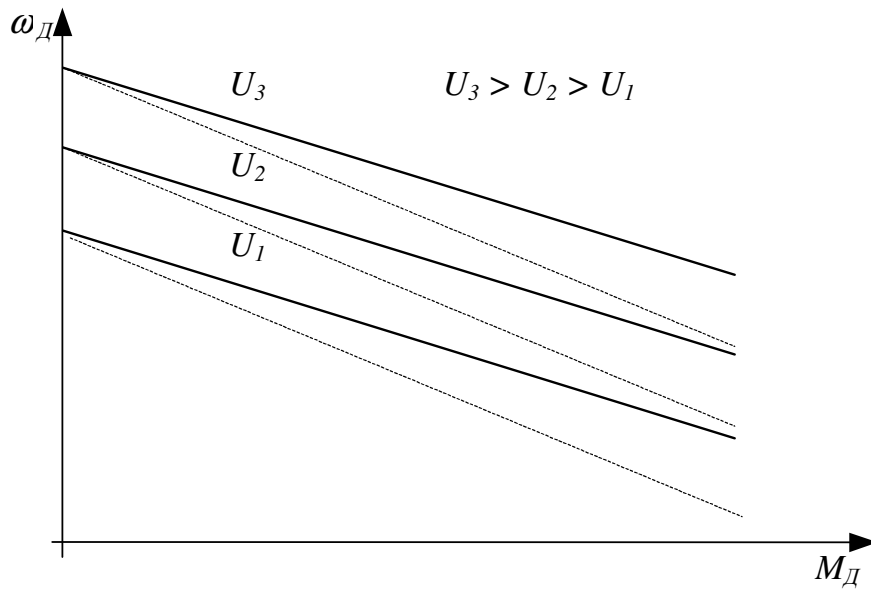


Рис. 1.7. Графіки залежності $\omega_D = f(U, M_D)$ для ЕДПС з незалежним (—) та паралельним (- - -) збудженням

Маючи математичну модель (1.4), (1.7), ЕДПС з незалежним збудженням у подальшому можна зображати у вигляді структурної схеми, зображеної на рис. 1.8.

Для ЕДПС з паралельним збудженням (рис. 1.6, б), для якого з ростом M_{TH} зростає I_Y та падіння напруги на обмотці якоря $I_Y \cdot R_Y$, внаслідок чого зменшується напруга на його затискачах та струм збудження I_3 , залежність $\omega_D = f(U, M_D)$ також буде прямолінійною, але з більш крутим нахилом графіка (див. штрихові лінії на рис. 1.7) за рахунок зростання коефіцієнта $k_M = f(U)$ у рівнянні (1.7), обумовленого зменшенням значень I_3 у знаменнику формули (1.8) у разі зменшення напруги на затискачах якоря, викликаного зростанням I_Y та $I_Y \cdot R_Y$.

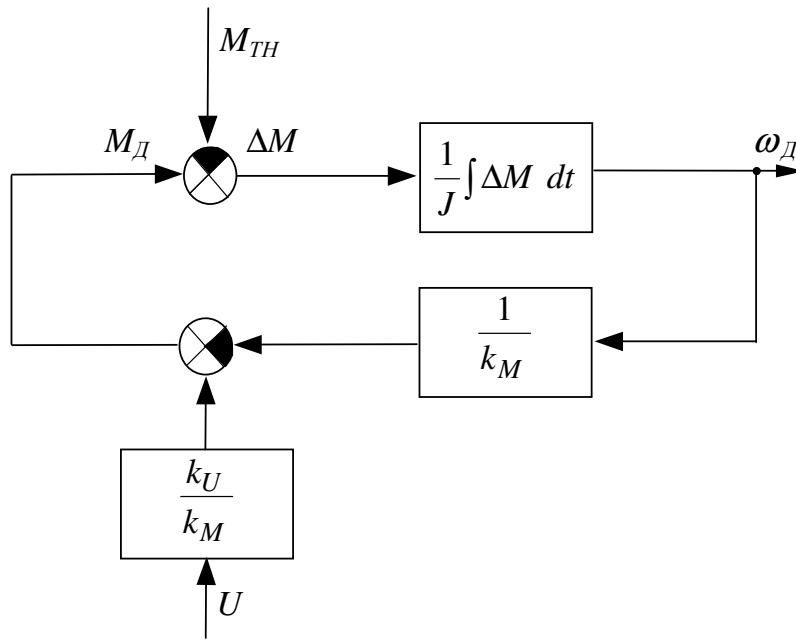


Рис. 1.8. Структурна схема ЕДПС із незалежним збудженням

Інший характер має залежність (1.5) для ЕДПС із послідовним збудженням. Оскільки у цьому випадку $I_3 = I_Я$, то, використовуючи (1.3) та (1.6), із (1.5) отримуємо:

$$\omega_Д = k_U^* \frac{U}{M_Д} - k_M^*, \quad (1.9)$$

де

$$k_U^* = \frac{k_I}{k_E k_\Phi}, \quad k_M^* = \frac{R_Я}{k_E}. \quad (1.10)$$

Зрозуміло, що (1.9) — це гіпербола, графік якої наведено на рис. 1.9.

Як видно з графіка, при зменшенні моменту технологічного навантаження на вал ЕДПС з послідовним збудженням і, як наслідок, еквівалентного зменшення врівноважувального обертального моменту $M_Д$ електродвигуна, кутова швидкість $\omega_Д$ обертання його вала стрімко зростає, досягаючи при холостому ході значень, за яких ротор починає руйнуватись, виводячи з ладу двигун у цілому. Отже, такі електродвигуни можна використовувати лише в електроприводах, яким навіть на холостому ході дово-

диться обертати досить значні маси, як це має місце, наприклад, у трамва-
ях.

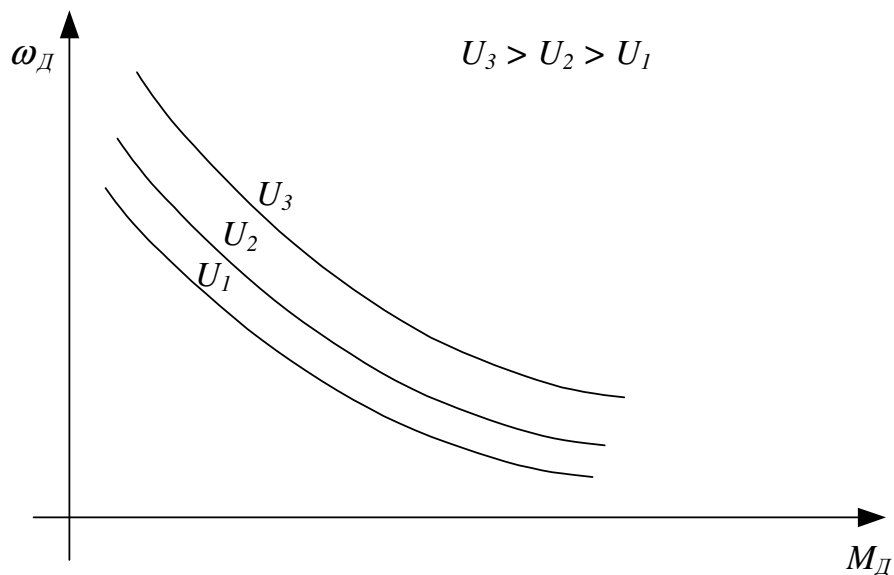


Рис. 1.9. Графік залежності $\omega_D = f(U, M_D)$ для ЕДПС
з послідовним збудженням

Із схеми, зображеної на рис. 1.6, г, легко бачити, що ЕДПС зі змішаним збудженням є симбіозом двох попередніх типів електродвигунів, а тому ми пропонуємо отримати його характеристику $\omega_D = f(U, M_D)$ самостійно. При цьому слід пам'ятати, що магнітний потік Φ у формулах (1.5) та (1.6) є сумою потоку Φ_{31} , який створюється струмом I_{31} у паралельній обмотці збудження ОЗ1, та потоку Φ_{32} за рахунок струму I_{32} у послідовній обмотці збудження ОЗ2.

Як критерій правильності побудови математичної моделі статички ЕДПС зі змішаним збудженням на рис. 1.10 наведено графік залежності $\omega_D = f(U, M_D)$ для трьох значень напруги U , яка подається на його якір.

Як видно з наведеного графіка, для ЕДПС зі змішаним збудженням не існує небезпеки зруйнування ротора, оскільки і на холостому ході ($M_D \cong 0$) його швидкість обертання є обмеженою і розрахованою на те,

що бандажі та клини, які утримують обмотку у пазах, витримують. Але “платою” за це є збільшення маси та габаритів у порівнянні з електродвигуном паралельного або послідовного збудження тієї ж потужності.

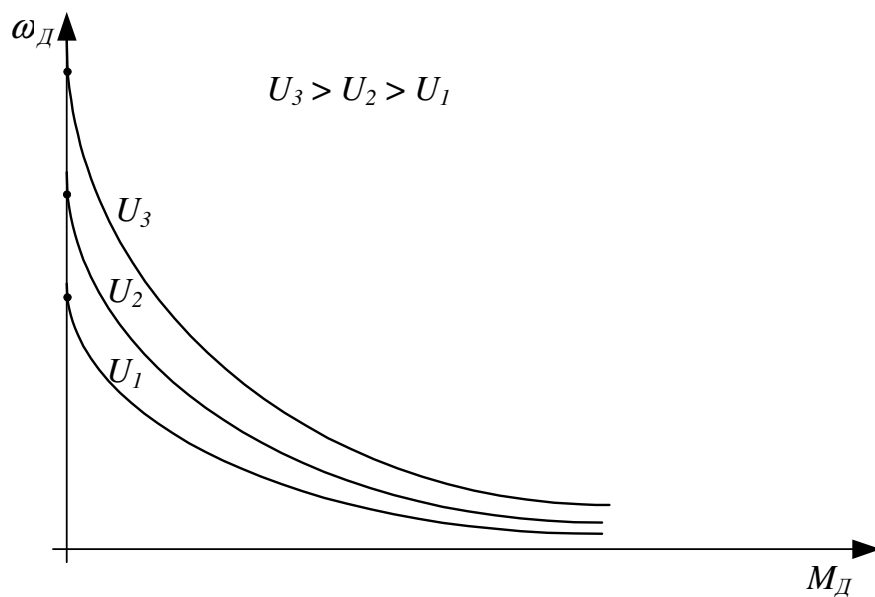


Рис. 1.10. Графік залежності $\omega_D = f(U, M_D)$ для ЕДПС зі змішаним збудженням

1.3. Математична модель електричного генератора

Як відомо з курсу теоретичних основ електротехніки, для кожної електричної машини є справедливим принцип оберненості.

Згідно з цим принципом, кожний електричний двигун може працювати і у режимі генератора.

Електрична машина постійного чи змінного струму працює у режимі двигуна тоді, коли напруга подається не лише на обмотку збудження, але й на обмотку якоря. В цьому випадку від взаємодії магнітного потоку обмотки збудження зі струмом в обмотці якоря виникає обертальний момент на валу ротора, здатний приводити в рух механізм, з'єднаний з цим валом за допомогою якогось пристрою, наприклад, редуктора.

Якщо ж якір електричної машини обертати з кутовою швидкістю ω_{Γ} у магнітному полі обмотки збудження ОЗГ за допомогою обертового моменту, створеного якимсь іншим джерелом енергії, наприклад, паровою турбіною, то в обмотці якоря виникає електрорушійна сила $E_{\text{Я}}$, від якої у разі підключення до неї якогось електроспоживача виникає електричний струм, тобто у цьому випадку електрична машина стає генератором енергії для споживача.

На рис. 1.11 наведена схема електричного генератора постійного струму, джерелом енергії якого є асинхронний електродвигун.

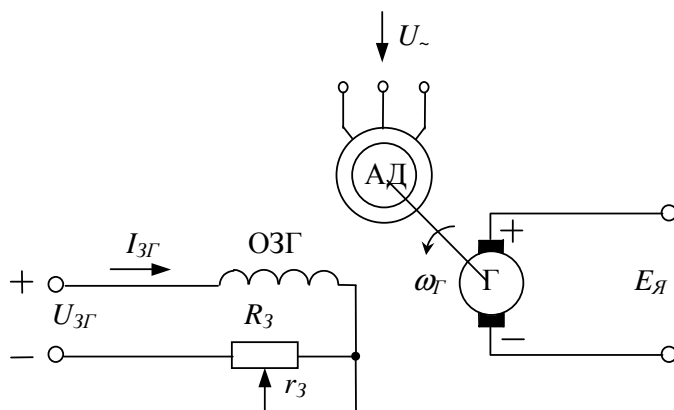


Рис. 1.11. Схема електричного генератора постійного струму

У зв'язку з іншими функціями процеси в електричному генераторі не можуть бути описані математичними моделями (1.1) – (1.4), побудованими у попередньому підрозділі для електричного двигуна.

Для електричного генератора з тим же типом збудження (в схемі рис. 1.11 воно незалежне) математична модель буде мати інший вигляд. Отримаємо її.

При подачі напруги $U_{3\Gamma}$ на обмотку збудження генератора ОЗГ вона врівноважується сумою електрорушійної сили самоіндукції $L \frac{dI_{3\Gamma}}{dt}$ та падінням напруги на опорі r_3 регулювального потенціометра R_3 і внутріш-

ньому опорі ОЗГ $r_{ОЗГ}$, тобто

$$U_{3Г} = L \frac{dI_{3Г}}{dt} + I_{3Г}(r_3 + r_{ОЗГ}), \quad (1.11)$$

де L — індуктивність ОЗГ.

Струм $I_{3Г}$ в обмотці збудження генератора створює магнітний потік, який, перетинаючи обмотку якоря, наводить у ній ЕРС $E_Я$, значення якої для кожного конкретного $I_{3Г}$ однозначно визначається за допомогою паспортної характеристики холостого ходу $E_Я = f(I_{3Г})$, вигляд якої приведений на рис. 1.12.

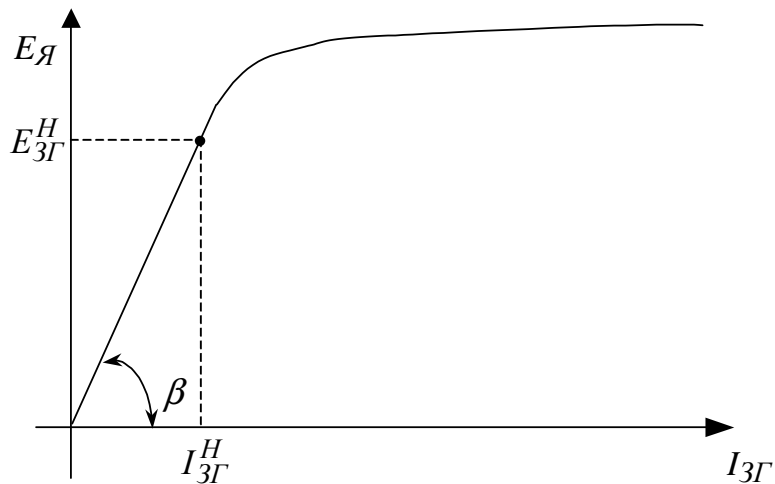


Рис. 1.12. Характеристика холостого ходу електричного генератора

Характерною особливістю електричних генераторів є те, що в нормальних режимах вони працюють на лінійній частині характеристики холостого ходу, тобто не виходячи більш, ніж на 15–20% за номінальні значення струму збудження $I_{3Г}^H$ та ЕРС генератора $E_{3Г}^H$.

А це дає можливість зв'язати $I_{3Г}$ та $E_Я$ за допомогою рівняння

$$E_Я = k_Я I_{3Г}, \quad (1.12)$$

де

$$k_{Я} = \frac{E_{3Г}^H}{I_{3Г}^H} = \operatorname{tg} \beta. \quad (1.13)$$

Рівняння (1.11) – (1.13) і задають математичну модель електричного генератора постійного струму з незалежним збудженням.

Маючи математичну модель, у подальшому електричний генератор можна зображати у вигляді послідовного з'єднання двох структурних блоків (рис. 1.13), на вхід першого з яких надходить напруга $U_{3Г}$, а на вхід другого — струм $I_{3Г}$, котрий є виходом першого блока; виходом другого блока є ЕРС $E_{Я}$:

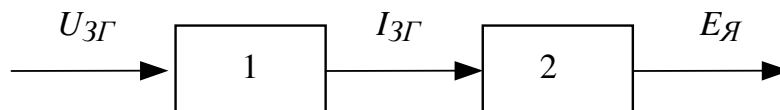


Рис. 1.13. Структурна схема електричного генератора

Звертаємо увагу на те, що структурна схема електричного генератора, яка наведена на рис. 1.13, є універсальною і не залежить від того постійний чи змінний струм виробляє генератор.

1.4. Математичні моделі підсилювачів

У САЕП найбільше розповсюдження знайшли два типи підсилювачів — магнітний та електронний.

В електронному підсилювачі, незалежно від його схеми, процеси протікають на 2–3 порядки швидше, ніж в електродвигунах, тому під час аналізу САЕП у цілому електронний підсилювач можна без внесення помітної похибки вважати безінерційним елементом, який характеризується лише значенням коефіцієнта підсилення $k_{ЕП}$, що дозволяє його математичну модель записувати у вигляді:

$$U_{ЕП} = k_{ЕП} U_{ВХ}, \quad (1.14)$$

де U_{BX} — параметр вхідного сигналу, який підсилюється, а U_{EP} — цей же параметр, але вже підсилений.

Зрозуміло, що структурна схема електронного підсилювача матиме вигляд, наведений на рис. 1.14.

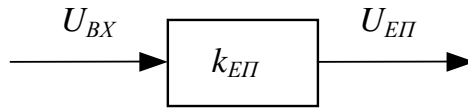


Рис. 1.14. Структурна схема електронного підсилювача.

Інша ситуація має місце під час аналізу процесів у магнітному підсилювачі, оскільки його інерційність зіставима або лише на порядок менша інерційності електродвигуна.

На рис. 1.15 зображена електрична схема магнітного підсилювача, на якій, крім тих позначень, що вже введені раніше на рис. 1.1, додатково введено ще декілька, а саме:

СО-1, СО-2 – силові обмотки магнітного підсилювача, з'єднані зустрічно-паралельно;

I_{CO} – струм у кожній із силових обмоток;

$I_{MP}^{\cup} = I_{MP}^{\cap} + I_{MP}^{\cup}$ – сумарний струм обох силових обмоток;

I_{MP}^{\cap} – струм, який виникає в навантаженні магнітного підсилювача;

Φ_{CO} – магнітний потік, який створюється струмом I_{CO} ;

$\Phi_U, \Phi_{3C}, \Phi_{3H}, \Phi_{3Ш}$ – магнітні потоки, які створюються струмами $I_U, I_{3C}, I_{3H}, I_{3Ш}$;

Д-1, Д-2 – діоди, які створюють умови протікання струму I_{CO} в кожній із силових обмоток СО-1, СО-2 протягом половини періоду струму I_{MP}^{\sim} .

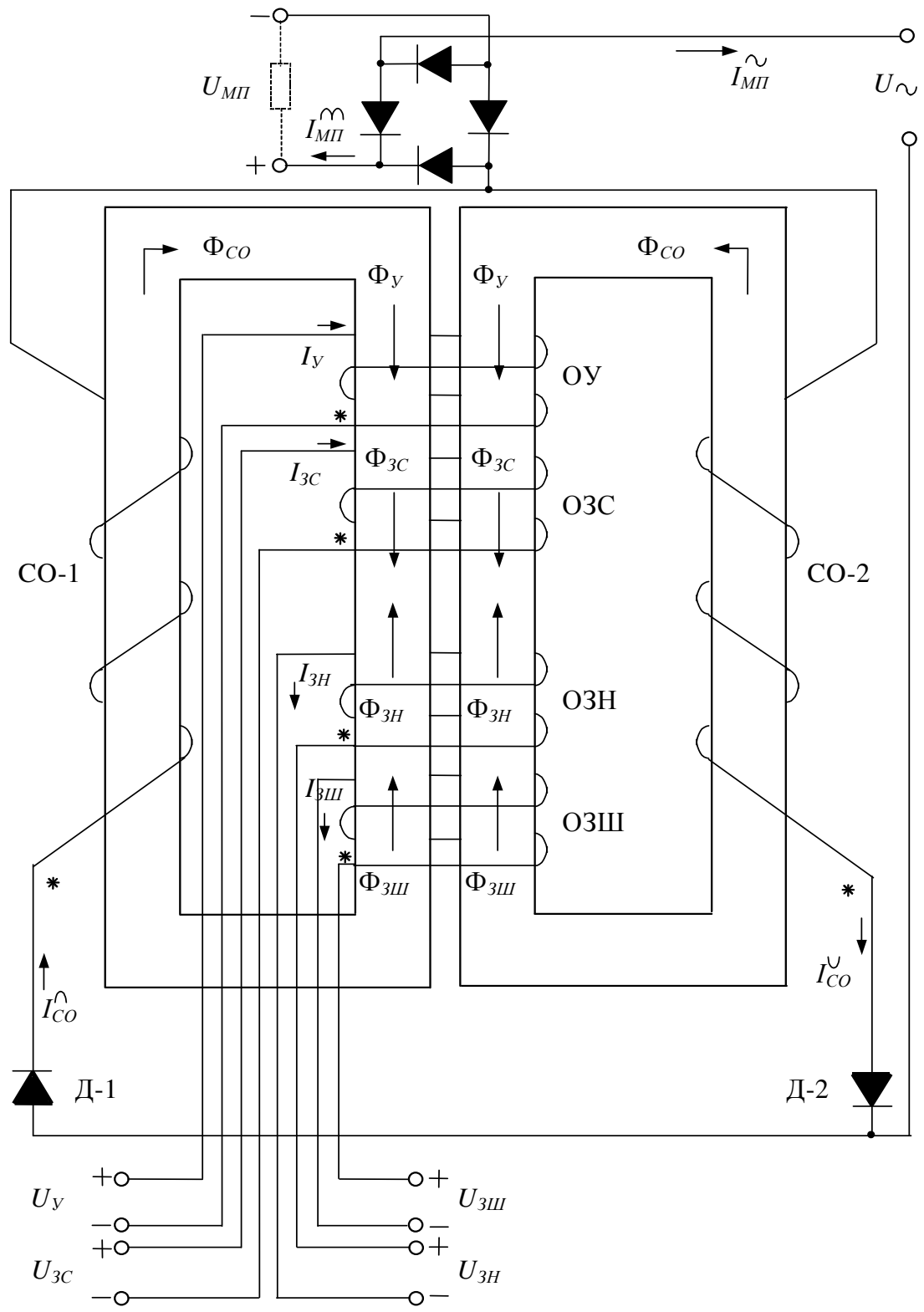


Рис. 1.15. Схема МД з постійним струмом на виході

Як відомо з курсу теоретичних основ електротехніки, потокозчеплення Ψ силових обмоток МП чисельно дорівнює добутку числа витків W у силових обмотках на магнітний потік Φ , який має місце в сердечнику, на який намотані обмотки СО-1, СО-2, тобто

$$\begin{aligned}\Psi &= W\Phi, \\ \Phi &= \Phi_{CO} + \Phi_Y + \Phi_{3C} - \Phi_{3H} - \Phi_{3Ш}.\end{aligned}\tag{1.15}$$

А тому, ЕРС самоіндукції e , яка виникає в силових обмотках під час проходження через них струму $I_{МП}$ і ϵ , за визначенням, похідною від потокозчеплення, тобто

$$e = \frac{d\Psi}{dt},\tag{1.16}$$

можна визначити і так:

$$e = W \frac{d\Phi}{dt}.\tag{1.17}$$

Якщо опір діодів вважати рівним нулю, що не вносить помітної похибки, то для напруг U_{\sim} , $U_{МП}$ і ЕРС e в кожний півперіод справедлива рівність

$$U_{\sim} = U_{МП} + e.\tag{1.18}$$

Доки в обмотках ОУ, ОЗС, ОЗН, ОЗШ відсутній або незначний струм, доти у сердечнику МП відсутні або незначні потоки Φ_Y , Φ_{3C} , Φ_{3H} , $\Phi_{3Ш}$, а тому сердечник ненасичений і в ньому має місце широкий діапазон змін сумарного магнітного потоку Φ , обумовлений лише змінами Φ_{CO} .

У зв'язку з цим, значною буде похідна $\frac{d\Phi}{dt}$ та пропорційна їй, згідно з виразом (1.17), ЕРС e . За умови значних e згідно з виразом (1.18) незначним буде $U_{МП}$.

Під час підмагнічення сердечника МП за рахунок потоків Φ_Y та Φ_{3C} від струмів I_Y та I_{3C} сумарний потік Φ , згідно із кривою намагні-

чування (рис. 1.16), зростає спочатку лінійно, а потім — нелінійно, аж до насичення.

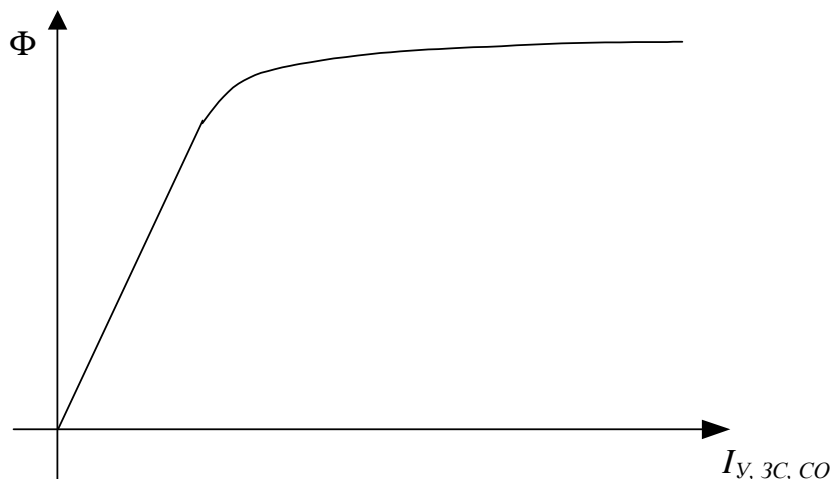


Рис. 1.16. Крива намагнічування $\Phi = f(I_Y, I_{ZC}, I_{CO})$ сердечника МП

При входженні у зону насичення значення $\frac{d\Phi}{dt}$ зменшується, що приводить до зменшення e і збільшення $U_{МП}$, у відповідності з виразами (1.17) та (1.18).

У цьому і полягає основний принцип магнітного підсилення.

Якщо коефіцієнт магнітного підсилення визначити як

$$k_{МП} = \frac{U_{МП} I_{МП}^{\circ\circ}}{U_Y I_Y}, \quad (1.19)$$

то у МП, що серійно випускаються промисловістю, він досягає значень від 100 до 1500.

Паспортною характеристикою МП є залежність $I_{МП}^{\circ\circ} = f(I_Y)$, яка має вигляд, наведений на рис. 1.17, а.

За рахунок додаткового попереднього підмагнічування обмоткою зсуву ОЗС характеристика МПА “зсувається” вліво (рис. 1.17, б), що дає можливість вже при струмах управління I_Y , близьких до нуля, працювати в лінійному діапазоні характеристики “вхід – вихід”.

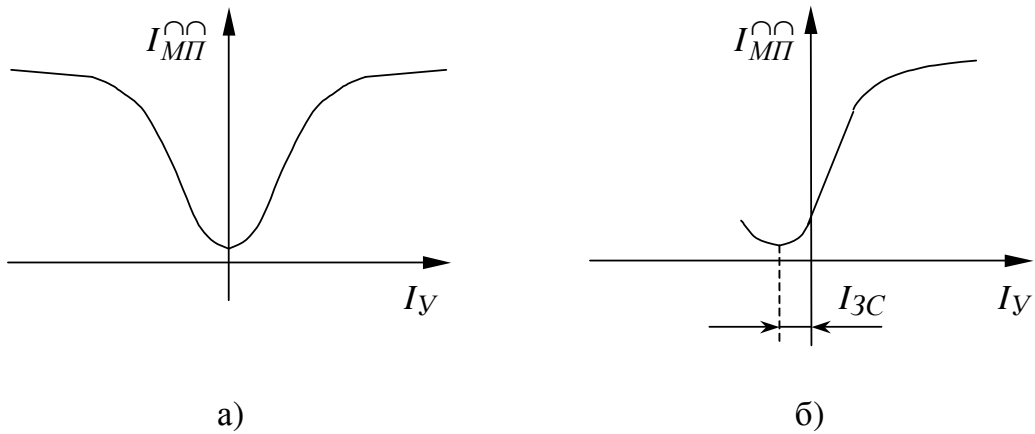


Рис. 1.17. Характеристика “вхід – вихід” МП

Якщо необхідно, щоб при $I_Y = 0$ відповідно і $I_{MΠ} = 0$, то треба навантаження підключити за схемою, наведеною на рис. 1.18, яка носить назву двотактної.

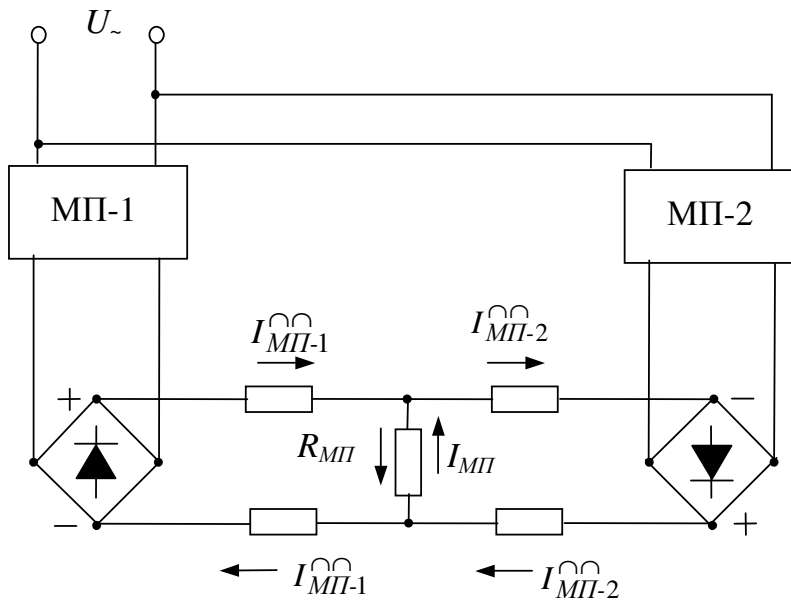


Рис. 1.18. Схема двотактного магнітного підсилювача

Характеристика “вхід – вихід” двотактного МП зображена на 1.19, де β — кут нахилу лінійної ділянки характеристики.

Слід зазначити, що обмотки ОЗН, ОЗШ, за рахунок яких у САЕП

здійснюються негативні зворотні зв'язки за напругою та за швидкістю, створюють магнітні потоки Φ_{3H} , $\Phi_{3Ш}$, які протидіють магнітним потокам Φ_Y , Φ_{3C} керувальних обмоток ОУ та ОЗС, зменшуючи сумарний магнітний потік Φ у сердечниках МП. За рахунок цього досягається стабілізація параметрів режиму САЕП за наявності збурень.

Побудуємо математичну модель МП, виходячи з того, що вхідним сигналом є напруга U_Y , яка подається на вхід обмотки управління ОУ магнітного підсилювача, а вихідною координатою — напруга $U_{МП}$, яка знімається з його виходу на постійному струмі (див. рис. 1.15).

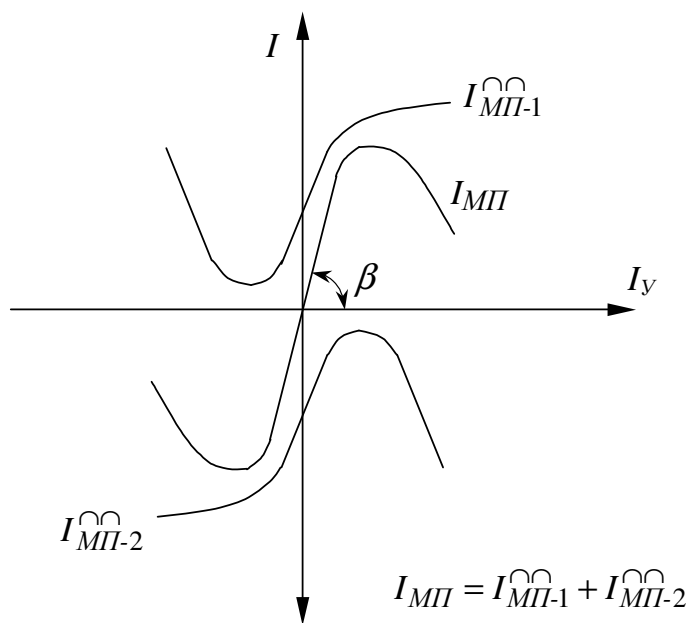


Рис. 1.19. Характеристика “вхід – вихід” двотактного МП

Оскільки ОУ — це котушка індуктивності, то, як відомо з курсу теоретичних основ електротехніки, напруга U_Y , яка прикладається до її зати́скачів, урівноважується сумою ЕРС самоіндукції $L_{OY} \frac{dI_Y}{dt}$, обумовленою індуктивністю L_{OY} обмотки управління та падінням напруги $I_Y \cdot R_{OY}$ на її активному опорі R_{OY} :

$$U_Y = L_{OY} \frac{dI_Y}{dt} + R_{OY} I_Y. \quad (1.20)$$

Кожному значенню струму управління I_Y згідно з вихідною характеристикою МП (рис. 1.19) при незмінному опорі $R_{МП}$ його вихідного навантаження відповідає одне-єдине значення струму $I_{МП}$, яке можна отримати за допомогою виразу:

$$I_{МП} = \operatorname{tg} \beta \cdot I_Y. \quad (1.21)$$

Оскільки

$$U_{МП}^{\circ\circ} = I_{МП} R_{МП}, \quad (1.22)$$

то із (1.21) та (1.22) випливає, що

$$\begin{aligned} U_{МП}^{\circ\circ} &= k_I \cdot I_Y, \\ k_I &= R_{МП} \cdot \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Співвідношення (1.20) та (1.23) і задають математичну модель МП по каналу “ $U_Y \rightarrow U_{МП}^{\circ\circ}$ ”.

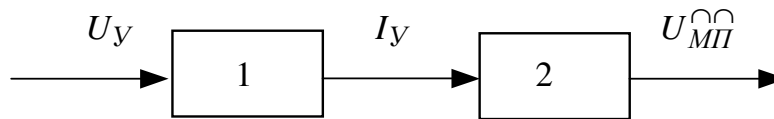


Рис. 1.20. Структурна схема магнітного підсилювача

На рис. 1.20 наведена структура магнітного підсилювача, що подана у вигляді послідовного з’єднання двох структурних блоків, перший з яких має модель (1.20), а другий — (1.23).

1.5. Математична модель силового перетворювача

З різноманітних схем перетворювачів одного виду струму в інший, наприклад, трифазного змінного у постійний, розглянемо лише одну —

тиристорну схему Ларіонова (рис. 1.21), графіки фазних напруг U_A , U_B , U_C та випрямленої напруги U_0 якої наведені на рис. 1.22.

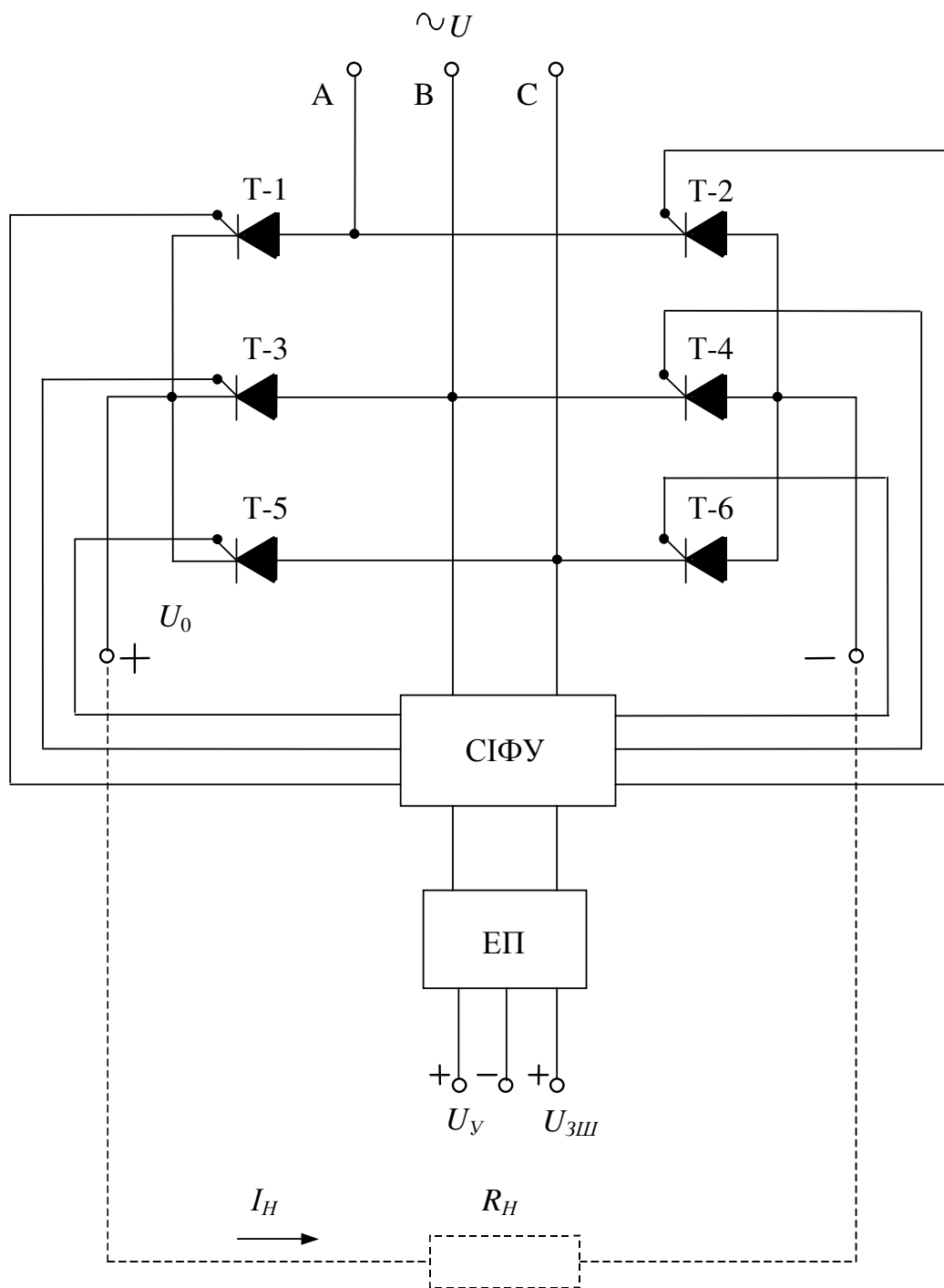


Рис. 1.21. Силовий перетворювач на основі схеми Ларіонова

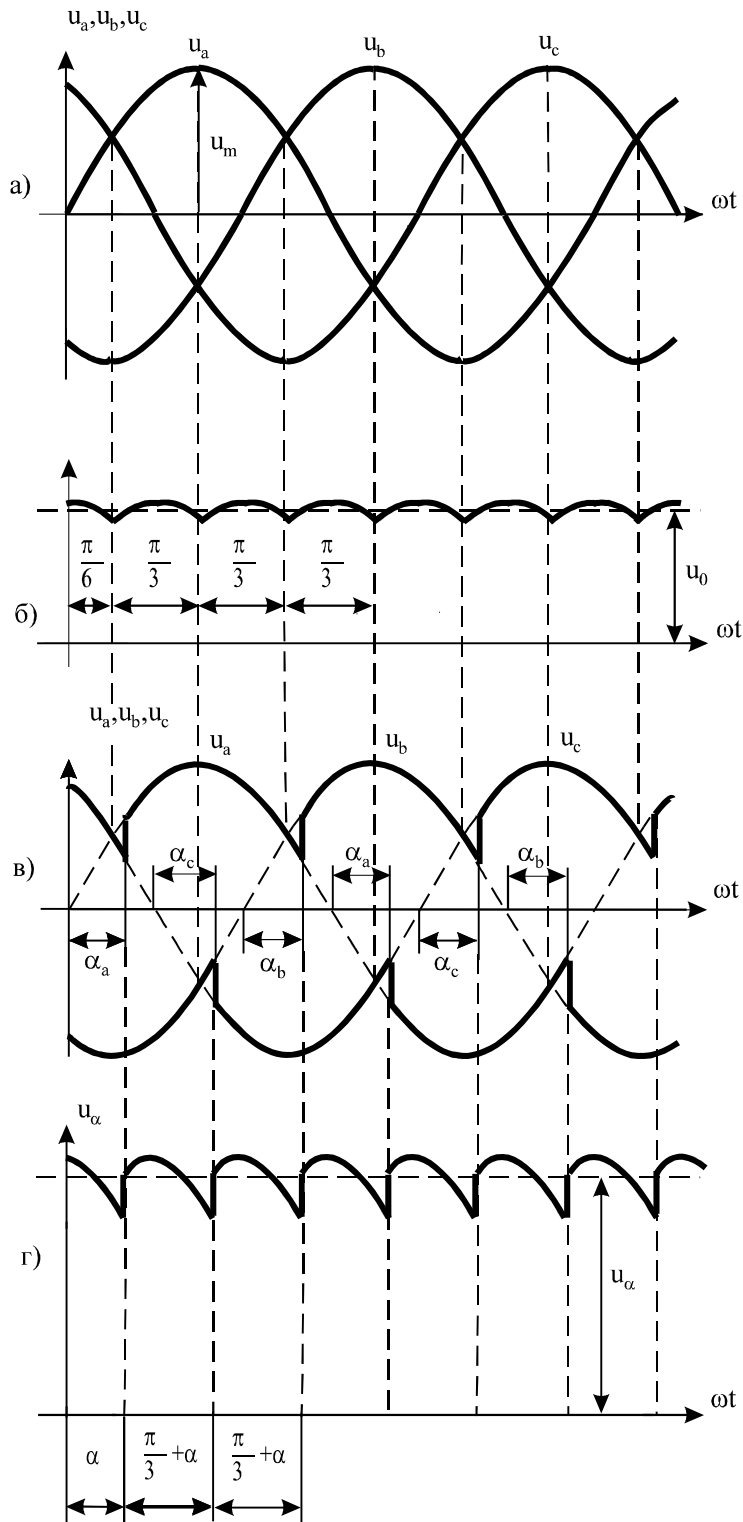


Рис. 1.22. Графіки ЕРС, які характеризують принцип дії схеми Ларіонова

Схема Ларіонова (рис. 1.21) працює так: якби замість тиристорів Т-1 – Т-6 у схемі були включені звичайні діоди, то в кожний момент часу

струм проходив би через один діод із непарним номером, через навантаження R_H та через один діод із парним номером від фази, потенціал якої в даний момент часу найвищий, до фази, потенціал якої в той же момент часу найнижчий. А тому графік напруги U_0 на навантаженні R_H буде мати форму, показану на рис. 1.22, а. Середнє значення цієї напруги може бути знайдено за формулою:

$$\begin{aligned} \bar{U}_0 &= \frac{3}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} U_a(\omega t) d(\omega t) - \frac{3}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} U_b(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{3U_m}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\omega t) d(\omega t) - \frac{3U_m}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) d(\omega t) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} U_m. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Аналогічний процес та результат буде мати місце у разі заміни діодів тиристорами, на керувальні електроди яких подається потенціал, достатній для управління ними у режимі діода, котрий завжди починає проводити струм як тільки потенціал його анода стає вищим за потенціал катода.

Якщо ж затримати подачу відкривного потенціалу на керувальні електроди тиристорів на відрізок часу $t = \frac{\alpha}{\omega}$, де ω — це кругова частота трифазного струму (рис. 1.22, в), то графік напруги U_α на навантаженні R_H буде мати форму, показану на рис. 1.22, г. Середнє значення цієї напруги \bar{U}_α може бути знайдено за формулами:

а) для $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\bar{U}_\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} U_m \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right), \quad (1.25)$$

б) для $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$:

$$\bar{U}_\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} U_m \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + 1 \right). \quad (1.26)$$

Як бачимо, воно є функцією кута α , на який запізнюється включення кожної з фаз трифазної системи у зв'язку із затримкою на відрізок часу $t = \frac{\alpha}{\omega}$ відкривного потенціалу на керувальні електроди тиристорів.

Графік залежності, що задається формулами (1.25) та (1.26), має вигляд, зображений на рис. 1.23.

У свою чергу, кут затримки α , команда на формування якого реалізується системою імпульсно-фазового управління (СІФУ) (див. рис. 1.21), є функцією від U_Y та $U_{ЗШ}$, які подаються на диференціальний вхід електронного підсилювача. Фактично:

$$\alpha = \varphi(\Delta U), \quad (1.27)$$

де $\Delta U = U_Y - U_{ЗШ}$.

Співвідношення (1.25) – (1.27) і задають математичну модель силового перетворювача на основі схеми Ларіонова, але без врахування вихідного фільтра, який віднесено до навантаження.

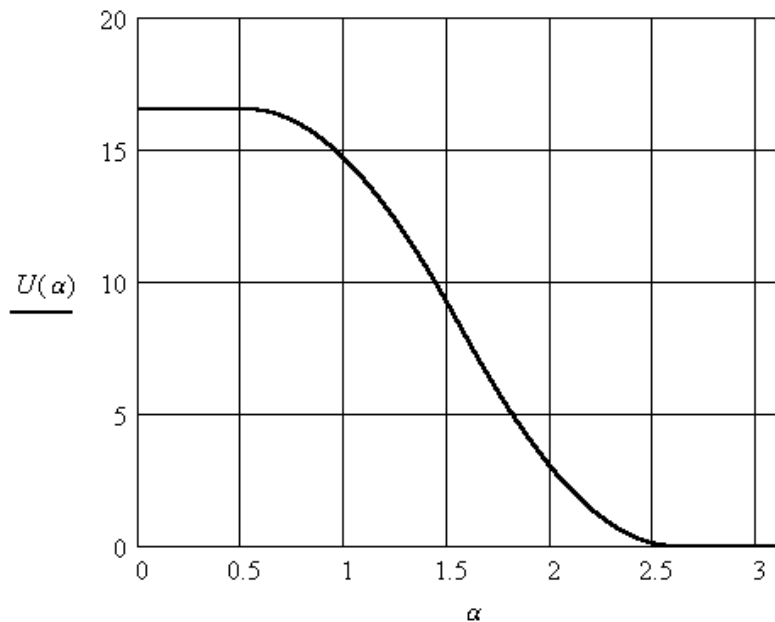


Рис. 1.23. Графік залежності $\bar{U}_\alpha = f(\alpha)$

1.6. Математичні моделі давачів інформації

Описуючи роботу САЕП, схема якої зображена на рис. 1.1, ми використали терміни “жорсткий” та “гнучкий” зворотні зв’язки.

Їх відмінність полягає в тому, що в контурі жорсткого зворотного зв’язку сигнал циркулює постійно, а в контурі гнучкого — лише у перехідних режимах. Іншими словами — на виході жорсткого зворотного зв’язку має місце сигнал, пропорційний сигналу на його вході, а на виході гнучкого зворотного зв’язку — сигнал, пропорційний похідній від сигналу на його вході.

У схемі на рис. 1.1 давачем сигналу в контурі жорсткого зворотного зв’язку є тахогенератор ТГ, а в контурі гнучкого — CR-ланка, яка виконує функції диференціатора. Оскільки тахогенератор — це генератор постійного струму, в якому обмотки збудження заміняють магніти, магнітний потік котрих є константою, то електрорушійна сила $E_{ТГ}$, яка наводиться в якорі тахогенератора, залежить лише від швидкості обертання якоря.

Тож у разі жорсткого зв’язку якорів ТГ та ДЕРС $E_{ТГ}$ визначається за таким виразом:

$$E_{ТГ} = k_{ТГ} \cdot \omega_{Д}, \quad (1.28)$$

в якому числове значення коефіцієнта $k_{ТГ}$ залежить від величини магнітного потоку магнітів збудження та параметрів обмотки якоря тахогенератора і є його паспортною характеристикою.

Якщо вихідним сигналом давача швидкості обертання вала електродвигуна вважати сигнал $U_{ЗШ}$, який надходить на вхід обмотки ОЗШ магнітного підсилювача (див. рис. 1.1), то математична модель цього давача набуває вигляду:

$$U_{ЗШ} = k_{ЗШ} \cdot \omega_{Д}, \quad (1.29)$$

де

$$k_{3Ш} = \frac{k_{ТГ} \cdot r_{3Ш}}{R_{О3Ш} + R_{3Ш}}. \quad (1.30)$$

Для отримання математичної моделі давача похідної $\frac{dU_D}{dt}$ напруги U_D на затискачах якоря електродвигуна E_D (див. рис. 1.1) зобразимо ланку передачі цього сигналу так, як показано на рис. 1.24.

Для цієї схеми, як відомо з курсу теоретичних основ електротехніки, справедливі такі співвідношення:

$$i_{О3Н} = \frac{U_D}{R_{О3Н} + R_{3Н}}, \quad (1.31)$$

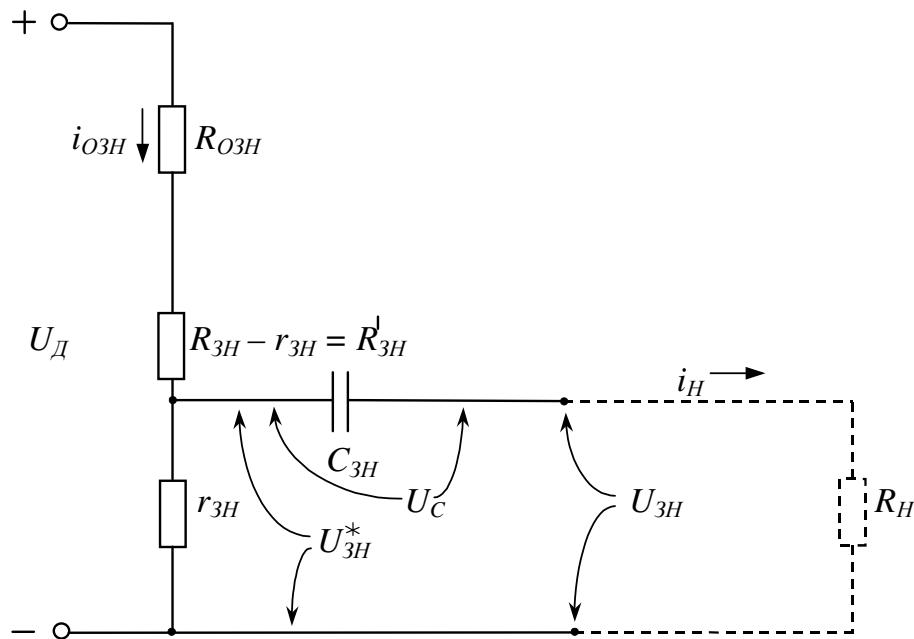


Рис. 1.24. Схема давача похідної напруги на затискачах якоря електродвигуна

$$U_{3Н}^* = i_{О3Н} \cdot r_{3Н}, \quad (1.32)$$

$$U_{3Н}^* = U_C + U_{3Н}, \quad (1.33)$$

$$U_C = \frac{1}{C_{3Н}} \int i_H dt, \quad (1.34)$$

$$i_H = \frac{U_{3H}}{R_H}. \quad (1.35)$$

З виразів (1.31) – (1.35) випливає, що

$$\frac{r_{3H}}{R_{O3H} + R_{3H}} U_{Д} = \frac{1}{C_{3H} \cdot R_H} \int U_{3H} dt + U_{3H} \quad (1.36)$$

або

$$T_{RC} \frac{dU_{3H}}{dt} + U_{3H} = k^* \cdot T_{RC} \frac{dU_{Д}}{dt}, \quad (1.37)$$

де

$$T_{RC} = R_H C_{3H},$$

$$k^* = \frac{r_{3H}}{R_{O3H} + R_{3H}}.$$

Рівняння (1.37) і є математичною моделлю давача похідної $\frac{dU_{Д}}{dt}$ напруги $U_{Д}$ на затискачах якоря електродвигуна Д.

Очевидно, що чим меншим є значення T_{RC} , тим менше значення має складова $T_{RC} \frac{dU_{3H}}{dt}$ і тим точніше напруга U_{3H} віддзеркалює сигнал, пропорційний похідній $\frac{dU_{Д}}{dt}$.

Зрозуміло, що в цьому посібнику ми не маємо змоги отримати математичні моделі всіх можливих давачів інформації, які зустрічаються у схемах електроприводів, але, на наш погляд, у цьому і немає потреби, адже мета наша зовсім інша — продемонструвати, як такі моделі будуються.

1.7. Математична модель мікро-ЕОМ як елемента САЕП

Як уже було відзначено у підрозділі 1.1, при складних законах керування електроприводами стає доцільним використання в САЕП мікро-ЕОМ. Схема мікропроцесорної САЕП зображена на рис. 1.5.

Як відомо, цифри у мікропроцесорі формуються комбінаціями імпульсів, а сигнали до і після мікропроцесора є неперервними, а вірніше — кусково-неперервними часовими функціями. Для узгодження характеристик неперервних та імпульсних процесів на вході мікропроцесора ставлять пристрій, котрий неперервні сигнали перетворює в комбінації імпульсів і називається *аналого-цифровим перетворювачем* (АЦП), а на виході мікропроцесора обов'язковим під час його використання в САЕП є підключення пристрою, який комбінації імпульсів перетворює в кусково-неперервний сигнал і називається *цифроаналоговим перетворювачем* (ЦАП). Спрощені функціональні схеми АЦП та ЦАП зображені на рис. 1.25 та 1.26.

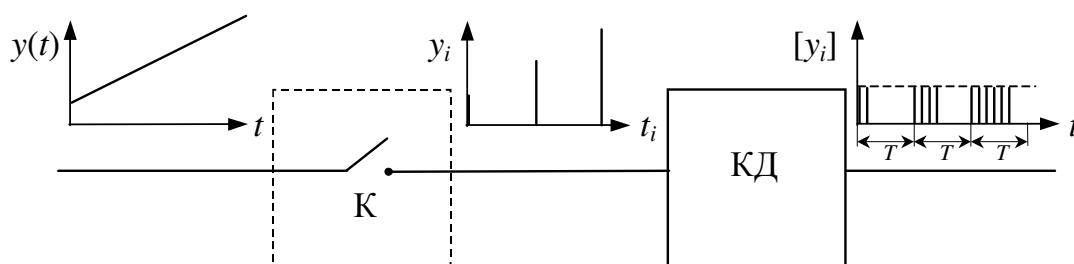


Рис. 1.25. Спрощена функціональна схема АЦП

Принципово АЦП (рис. 1.25) складається тільки з двох функціональних блоків. Перший блок — це ключ К, який, лише на мить один раз за період часу T вмикаючись, перетворює неперервний сигнал $y(t)$ у послідовність імпульсів y_i , для яких справедливо:

$$y_i = y(t_i). \quad (1.38)$$

Другий блок — це кодер КД, який кожному імпульсу y_i ставить у відповідність пачку імпульсів $[y_i]$ однакової амплітуди, кількість яких у пачці “ n ” однозначно залежить від значення амплітуди імпульсу y_i , тобто

$$n = n(y_i). \quad (1.39)$$

З такими параметрами $[y_i]$ імпульсів однакової амплітуди вже може працювати мікропроцесор П.

В результаті виконання мікропроцесором заданих операцій на його

виході з'являються комбінації інших пачок імпульсів, котрі надходять на вхід цифроаналогового перетворювача ЦАП (рис. 1.26), який принципово складається лише з трьох функціональних блоків. Перший блок — це декодер ДК, котрий кожній пачці $[x_i]$ з “ n ” імпульсів однакової амплітуди ставить у відповідність один імпульс x_i , амплітуда якого однозначно відображає кількість “ n ” імпульсів у пачці $[x_i]$.

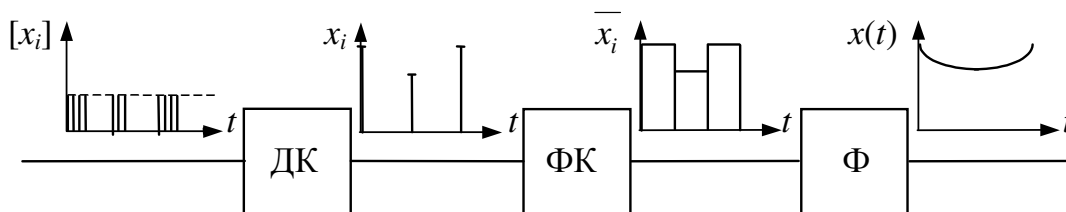


Рис. 1.26. Спрощена функціональна схема ЦАП

Другий блок — фіксатор ФК, який запам'ятовує амплітуду x_i імпульсу, що надходить з декодера ДК, на весь період T аж до появи наступного імпульсу x_{i+1} , перетворюючи послідовність імпульсів x_i у кусково-сталу східчасту функцію \bar{x}_i .

Третій блок — фільтр Ф згладжує кусково-сталу східчасту функцію \bar{x}_i і перетворює її в неперервну функцію $x(t)$.

Що стосується безпосередньо мікропроцесора П, то він протягом відрізка часу τ реалізує задану програму, завдяки якій довільна функція $y(t)$ перетворюється у функцію $x(t)$ з заданими характеристиками.

Для прикладу розглянемо випадок, коли мікро-ЕОМ включена у зворотний зв'язок САЕП і формує сигнал $x(t)$, який містить три складові: перша пропорційна вихідній координаті $y(t)$ САЕП, друга пропорційна її першій похідній $\dot{y}(t)$, а третя — її другій похідній $\ddot{y}(t)$, тобто

$$x(t) = a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t). \quad (1.40)$$

Якщо у рівнянні (1.40) ми введемо запізнення τ , протягом якого мік-

ропроцесор отримує результат і не видає нічого на ЦАП, то рівнянням

$$\begin{aligned}x(t) &= a_2 \frac{d^2 y(t-\tau)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t-\tau)}{dt} + a_0 y(t-\tau), \\ y(t-\tau) &= 0, \quad \forall (t-\tau) < 0,\end{aligned}\tag{1.41}$$

ми можемо задати модель мікро-ЕОМ у загальній математичній моделі САЕП. Однак тут слід зробити два важливі зауваження. Перше з них полягає в тому, що не треба думати начебто якимсь одним рівнянням, наприклад (1.41), можна раз і назавжди задати математичну модель мікро-ЕОМ. Вона змінюватиметься кожний раз, коли зазнаватиме змін та функція, реалізація якої покладатиметься на мікро-ЕОМ.

Друге зауваження полягає в тому, що рівняння (1.41) стає непридатним для моделювання процесів у САЕП, якщо нас цікавить не лише характер процесів у її неперервній частині, а і характер процесів в імпульсних елементах системи, наприклад у ЦАП чи АЦП.

У цьому випадку від диференціального рівняння як математичної моделі мікро-ЕОМ слід переходити до рівняння в скінченних різницях, мова про які піде в одному з наступних розділів.

1.8. Класифікація ЕМС

Наведені у попередніх підрозділах цього розділу приклади САЕП та приклади характеристик їх окремих елементів дозволяють здійснити таку класифікацію електромеханічних систем (ЕМС).

1. За характером причинно-наслідкових зв'язків ЕМС можна умовно розділити на детерміновані і стохастичні. Для детермінованих ЕМС характерним є те, що кожному конкретному значенню сигналу $x(t)$, який надходить на вхід системи, відповідає цілком конкретне значення вихідної координати $y(t)$. Якщо ж конкретному значенню вхідного сигналу $x(t)$ відповідає певна множина значень вихідної координати $y(t)$ системи, для якої

можна визначити лише середні характеристики або закони розподілу, то маємо справу з імовірнісними або, що є одне й теж, стохастичними системами.

Фактично, кожна ЕМС, на яку діють випадкові збурення, є стохастичною системою. Але, якщо амплітуда збурень незначна у порівнянні з амплітудою основних процесів у ЕМС, то таку систему можна віднести до детермінованих.

2. За характеристикою “вхід – вихід” ЕМС поділяються на лінійні (рис. 1.27, б) та нелінійні (рис. 1.27, в).

Слід зазначити, що для лінійності системи необхідно, щоб всі її елементи мали лінійні характеристики “вхід – вихід”, а для того, щоб система стала нелінійною, достатньо, щоб хоча б один з її елементів мав нелінійну характеристику.

3. За тривалістю сигналів, які циркулюють у системах, ЕМС поділяють на неперервні і дискретні.

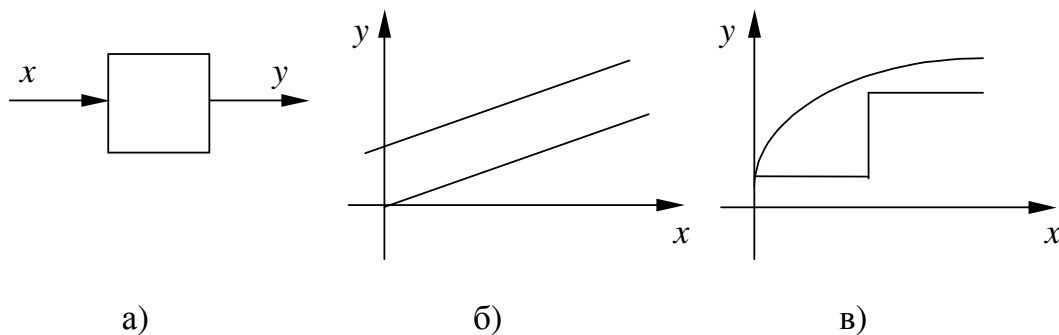


Рис. 1.27. Приклади характеристик “вхід – вихід” лінійних (б) та нелінійних (в) систем

В неперервних системах сигнал передається від одного елемента до іншого в кожний момент часу, у дискретних — лише в окремі моменти.

4. За розміщенням у просторі елементів ЕМС поділяють на системи із зосередженими та розподіленими параметрами.

Розподіленість параметрів має місце в ЕМС, які містять у собі трубо-

проводи, довгі лінії електрозв'язку, троси, конвеєри та інші елементи, процеси в яких характеризуються суттєвим запізненням у порівнянні з іншими складовими цієї ж системи.

В наступних розділах посібника буде продемонстровано як будувати математичні моделі електромеханічних систем, виходячи саме з цієї їх класифікації.

1.9. Завдання для самоперевірки

1. Які системи відносяться до електромеханічних?
2. Який клас електромеханічних систем є найбільш поширеним у народному господарстві?
3. Який зміст вкладається у поняття “математична модель”?
4. Що таке “ідентифікація” системи або процесу?
5. Поясніть як функціонують САЕП, схеми яких зображені на рис. 1.1, 1.3, 1.5.
6. Яку роль відіграють резистори R_{OY} , R_{OZC} , R_{OZH} , $R_{OZШ}$, R_{OZ} на схемі, зображеній на рис. 1.1?
7. Розкрийте процес перетворення електричної енергії у механічну в САЕП, зображених на рис. 1.1, 1.3, за допомогою схем, наведених на рис. 1.2, 1.4. Побудуйте аналогічну схему для САЕП, зображеної на рис. 1.5.
8. Побудуйте повну математичну модель як елемента САЕП електродвигуна:
 - а) з незалежним збудженням;
 - б) з паралельним збудженням;
 - в) з послідовним збудженням;
 - г) зі змішаним збудженням.
9. Як отримати математичну модель електричного генератора?

10. Як виглядає математична модель електронного підсилювача?
11. Поясніть принцип дії магнітного підсилювача, схема якого зображена на рис. 1.15.
12. Побудуйте математичну модель магнітного підсилювача.
13. Для чого потрібно використовувати магнітний підсилювач за двотактною схемою?
14. Поясніть принцип дії силового перетворювача на основі схеми Ларіонова. Яка роль СІФУ?
15. Отримайте математичну модель силового перетворювача.
16. Чим відрізняється тахогенератор від звичайного силового електричного генератора? Як виглядає його математична модель?
17. Як виглядає схема, за допомогою якої можна отримати інформацію про похідну напруги на затискачах якоря електродвигуна? Побудуйте її математичну модель.
18. Для чого потрібен АЦП? Які функціональні блоки входять до його схеми?
19. Яку функцію виконує ЦАП? Поясніть принцип його дії.
20. Як отримати математичну модель мікро-ЕОМ? Що слід врахувати під час дослідження САЕП з АЦП та ЦАП?
21. Дайте класифікацію електромеханічних систем.

2. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ЕМС З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.1. Ідентифікація у часовому просторі

Як було зазначено у попередньому розділі посібника, для того, щоб ЕМС мала зосереджені параметри, в її структурі не повинні мати місце елементи, проходження сигналів у яких характеризується помітним запізненням.

Щоб ЕМС відносилась до неперервних, сигнали в її елементах повинні бути визначеними в кожний момент часу.

Щоб ЕМС була лінійною, вона повинна забезпечувати пропорційність між значеннями вхідних керувальних сигналів та реакціями системи на них.

Щоб ЕМС можна було вважати детермінованою, достатньо забезпечити в ній суттєво менший рівень збурень у порівнянні із рівнем основних функціональних сигналів.

Такими властивостями характеризується ЕМС класу САЕП на основі системи Г-Д, схема якої зображена на рис. 1.1, за умови, що електричний генератор та магнітний підсилювач працюють в лінійному діапазоні значень їх характеристик “вхід – вихід” (див. рис. 1.12 та рис. 1.17, 1.19), а електричний двигун працює на лінійному відрізку механічної характеристики $\omega_D = f(U, M_D)$ (див. рис. 1.7, 1.9) і має безпосереднє жорстке чи через редуктор з’єднання з технологічним механізмом, для якого слугує приводом. Допускаючи дотримання цих умов, перепишемо, коригуючи у зрозумілій без додаткових пояснень мірі, з першого розділу ті рівняння, які описують процеси в кожному з елементів САЕП, схема якої зображена на рис. 1.1.

а). Для електричного двигуна з незалежним збудженням:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_D - M_{TH}, \quad (2.1)$$

$$E_D = k_\omega \cdot \omega_D, \quad (2.2)$$

$$M_D = k_I \cdot I_Y, \quad (2.3)$$

$$E_D + I_Y \cdot R_Y^* = U_D, \quad (2.4)$$

де R_Y^* – сумарний опір якірних обмоток двигуна та генератора;

E_D та I_Y – ЕРС обертання та струм якоря двигуна;

U_D – напруга, що прикладається до якоря двигуна;

б). Для електричного генератора:

$$T_{3Г} \frac{dI_{3Г}}{dt} + I_{3Г} = k_{3Г} \cdot U_{МП}^{\wedge\wedge}, \quad (2.5)$$

$$E_Y = k_Y \cdot I_{3Г}, \quad (2.6)$$

де $T_{3Г}$ – стала часу обмотки збудження генератора:

$$T_{3Г} = \frac{L_{3Г}}{R_{3Г} + r_3 + R_{O3}}, \quad (2.7)$$

$k_{3Г}$ – коефіцієнт пропорційності між напругою $U_{МП}^{\wedge\wedge}$, яка прикладається до обмотки збудження генератора, та струмом збудження $I_{3Г}$, обумовленим нею:

$$k_{3Г} = \frac{1}{R_{3Г} + r_3 + R_{O3}}, \quad (2.8)$$

k_Y – коефіцієнт, який визначається формулою (1.13).

Примітка. Без суттєвої помилки можна вважати, що $U_D = E_Y$.

в). Для магнітного підсилювача:

– по каналу управління:

$$T_{МП} \frac{dI_Y}{dt} + I_Y = k_U \cdot U_Y, \quad (2.9)$$

де $T_{МП}$ – електрична стала часу обмотки управління МП:

$$T_{МП} = \frac{L_{OY}}{r_{OY}}, \quad (2.10)$$

k_U – коефіцієнт пропорційності між напругою U_Y , яка прикладається до обмотки управління МП, та струмом управління I_Y , обумовленим нею:

$$k_U = \frac{r_Y}{(R_Y + R_{OY}) \cdot r_{OY}}; \quad (2.11)$$

– по каналу зворотного зв'язку за швидкістю обертання якоря електродвигуна:

$$T_{МП} \frac{dI_{3Ш}}{dt} + I_{3Ш} = k_{3Ш}^* \cdot U_{3Ш}, \quad (2.12)і$$

$$U_{3Ш} = k_{3Ш} \cdot \omega_D, \quad (2.13)$$

де $k_{3Ш}^*$ – коефіцієнт пропорційності між напругою $U_{3Ш}$, яка прикладається до обмотки управління МП, котра використовується в каналі зворотного зв'язку за швидкістю, та струмом управління $I_{3Ш}$, обумовленим напругою $U_{3Ш}$:

$$k_{3Ш}^* = \frac{1}{r_{OY}}, \quad (2.14)$$

$k_{3Ш}$ визначається формулою (1.30);

– по каналу гнучкого зворотного зв'язку за напругою на затискачах якоря електродвигуна:

$$T_{МП} \frac{dI_{3H}}{dt} + I_{3H} = k_{3H}^* \cdot U_{3H}, \quad (2.15)$$

$$T_{RC} \frac{dU_{3H}}{dt} + U_{3H} = k^* \cdot T_{RC} \frac{dU_D}{dt}, \quad (2.16)$$

де k_{3H}^* – коефіцієнт пропорційності між напругою U_{3H} , яка прикладається до обмотки управління МП, котра використовується в каналі гнучкого зворотного зв'язку за напругою та струмом управління I_{3H} у цій обмотці, обумовленим напругою U_{3H} :

$$k_{3H}^* = \frac{1}{r_{OY}}, \quad (2.17)$$

а стала часу T_{RC} та коефіцієнт пропорційності k^* визначаються формулами, розкриваючими (1.37);

– по виходу магнітного підсилювача:

$$I_Y^* = I_Y + I_{3C} - I_{3Ш} - I_{3H}, \quad (2.18)$$

$$U_{МП}^{\wedge\wedge} = k_I^* \cdot I_Y^*, \quad (2.19)$$

де k_I^* – коефіцієнт пропорційності між результуючим струмом I_Y^* , який виникає в усіх обмотках управління МП (ОУ, ОЗС, ОЗШ, ОЗН), та напругою $U_{МП}^{\wedge\wedge}$, котра створюється завдяки цьому струму на виході МП:

$$k_I^* = \left(\frac{R_{3Г} \cdot r_3}{R_{3Г} + r_3} + R_{O3} \right) \cdot \text{tg} \beta. \quad (2.20)$$

Система рівнянь (2.1) – (2.20) і є математичною моделлю у часовому просторі САЕП, схема якої зображена на рис. 1.1, за виконання умов детермінованості, лінійності, неперервності та зосередженості параметрів.

Для того, щоб отримати можливість використовувати цю модель для аналізу процесів у САЕП, необхідно, скориставшись паспортними даними всіх елементів, що входять до структури системи, визначити чисельні значення всіх коефіцієнтів у рівняннях (2.1) – (2.20) та початкові умови в тих із цих рівнянь, які є диференціальними.

Сам аналіз процесів здійснюється шляхом розв’язання системи рівнянь (2.1) – (2.20) за заданих законах зміни U_Y і M_{TH} та варіаціях коефіцієнтів у рівняннях зворотних зв’язків.

2.2. Ідентифікація на комплексній площині

З курсу операційного числення, що є одним з обов’язкових розділів загального курсу вищої математики, який викладається студентам техніч-

них вузів, відомо, що за допомогою оператора Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (2.21)$$

кожній функції f часу t , яка задовольняє умову $f(t) = 0$ при $t < 0$, умови Діріхле і називається *оригіналом*, можна поставити у відповідність функцію F комплексної змінної p , яка називається *зображенням* оригіналу на комплексній площині. Ця відповідність записується у такий спосіб:

$$f(t) \leftrightarrow F(p). \quad (2.22)$$

Наприклад, часовій функції одиничного стрибка

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

на комплексній площині відповідає зображення

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{-p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad (2.24)$$

або

$$1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}. \quad (2.25)$$

Ще один приклад — експоненти $e^{-\alpha t}$ при $t \geq 0$ на комплексній площині відповідає зображення

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} dt = \frac{1}{-(p+\alpha)} e^{-(p+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p+\alpha} \quad (2.26)$$

або

$$e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p+\alpha}. \quad (2.27)$$

Головною перевагою аналізу в області зображень $F(p)$, тобто на комплексній площині, у порівнянні з аналізом в області оригіналів $f(t)$, тобто у часовому просторі, є те, що за нульових початкових умов операції

диференціювання $\frac{d}{dt}$ оригіналу $f(t)$ у часовому просторі відповідає операція перемноження на комплексну змінну p його зображення $F(p)$ на комплексній площині, тобто

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}(t) \Leftrightarrow p \cdot F(p). \quad (2.28)$$

Як наслідок цієї властивості маємо:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \ddot{f}(t) \Leftrightarrow p^2 \cdot F(p) \quad (2.29)$$

та

$$\frac{d^n f}{dt^n} = f^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n \cdot F(p), \quad (2.30)$$

а також

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p} \quad (2.31)$$

та

$$\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p^n}. \quad (2.32)$$

Нагадаємо, що за ненульових початкових умов формули (2.28) – (2.32) суттєво ускладнюються, але під час аналізу САЕП на комплексній площині у цьому ускладненні немає необхідності, оскільки аналіз САЕП доцільно здійснювати саме за нульових початкових умов, що відповідає перебуванню САЕП у вимкненому стані до початку аналізу.

Завдяки властивості (2.28) та її наслідкам (2.29) – (2.32) диференціальному та інтегральному рівнянням, записаним у часовому просторі, відповідають алгебраїчні рівняння на комплексній площині, розв'язувати які ми вміємо набагато краще, оскільки цьому нас вчать ще у школі.

Наприклад, диференціальному рівнянню в області оригіналів $x(t)$, $y(t)$

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (2.33)$$

на комплексній площині відповідає алгебраїчне рівняння

$$a_2 p^2 Y(p) + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_1 p X(p) + b_0 X(p) \quad (2.34)$$

відносно зображень $X(p)$ та $Y(p)$. Його розв'язком є функція $Y(p)$, яку із рівняння (2.34) можна визначити у такий спосіб:

$$Y(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} X(p) \quad (2.35)$$

або

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p), \quad (2.36)$$

де

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (2.37)$$

Якщо $X(p)$ вважати зображенням сигналу $x(t)$, який надходить на вхід динамічної системи (рис. 2.1), математичну модель якої можна записати у вигляді (2.33), де $y(t)$ є реакцією цієї системи на вхідний сигнал $x(t)$, то функцію $W(p)$ можна інтерпретувати як передаточну (або передавну) функцію системи.

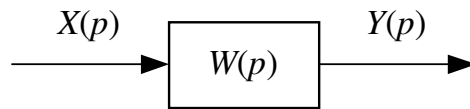


Рис. 2.1. Узагальнена структурна схема динамічної системи в області зображень

Як видно із виразів (2.35) – (2.37), передаточна функція $W(p)$ не залежить від зовнішніх сигналів, які діють на систему, і однозначно характеризує внутрішню структуру і властивості лише самої системи.

А тому ця функція є однією із найважливіших динамічних характеристик лінійних систем, для яких перетворення Лапласа (2.21) задає взаєм-

но однозначну відповідність між оригіналами та їх зображеннями.

Із виразів (2.35) – (2.37) випливає, що, знаючи зображення $X(p)$ вхідного сигналу $x(t)$ та зображення $Y(p)$ реакції системи $y(t)$ на цей сигнал, передаточну функцію можна отримати, взявши їх відношення, тобто

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (2.38)$$

Варто нагадати, що обернене перетворення Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (2.39)$$

згідно з яким за відомим зображенням $F(p)$ можна знайти оригінал $f(t)$, як правило, використовується лише для побудови таблиць відповідності між $f(t)$ та $F(p)$, а у практиці аналізу частіше використовуються формули розкладання, одна з яких — для некратних полюсів p_i зображення

$$Y(p) = \frac{C(p)}{D(p)}, \quad (2.40)$$

де $C(p)$, $D(p)$ – багаточлени за степенями p порядків m та n , відповідно — має вигляд

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{C(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t}. \quad (2.41)$$

Нагадаємо, що p_i — це корені рівняння

$$D(p) = 0, \quad (2.42)$$

а

$$D'(p_i) = \left. \frac{dD}{dp} \right|_{p=p_i}. \quad (2.43)$$

Наведемо приклад використання формули розкладання (2.41).

Нехай ми маємо зображення невідомого нам оригіналу у вигляді

$$F(p) = \frac{2p+1}{p^3 + 5p^2 + 6p}. \quad (2.44)$$

Треба визначити його оригінал $f(t)$.

Знаходимо:

$$\begin{aligned}C(p) &= 2p + 1, \\D(p) &= p^3 + 5p^2 + 6p, \\ \frac{dD}{dp} &= 3p^2 + 10p + 6\end{aligned}\tag{2.45}$$

та полюси зображення (2.44), тобто корені рівняння

$$p^3 + 5p^2 + 6p = 0.\tag{2.46}$$

Привівши рівняння (2.46) до вигляду:

$$p(p^2 + 5p + 6) = 0,\tag{2.47}$$

легко бачити, що полюсами зображення (2.44) є:

$$\begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = -2, \\ p_3 = -3. \end{cases}\tag{2.48}$$

Підставляючи (2.45) та (2.48) у формулу розкладання (2.41), отримаємо:

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{C(p_1)}{D'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{C(p_2)}{D'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{C(p_3)}{D'(p_3)} e^{p_3 t} = \\ &= \frac{2 \cdot (0) + 1}{3 \cdot (0)^2 + 10 \cdot (0) + 6} e^{0t} + \frac{2 \cdot (-2) + 1}{3 \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-2) + 6} e^{-2t} + \\ &\quad + \frac{2 \cdot (-3) + 1}{3 \cdot (-3)^2 + 10 \cdot (-3) + 6} e^{-3t} = \frac{1}{6} + \frac{3}{2} e^{-2t} - \frac{5}{3} e^{-3t}.\end{aligned}$$

Функція

$$f(t) = \frac{1}{6} + \frac{3}{2} e^{-2t} - \frac{5}{3} e^{-3t}\tag{2.49}$$

і є оригіналом зображення, представленого формулою (2.44). Ще раз нагадаємо, що оригінал визначається лише при значеннях $t \geq 0$.

З урахуванням всього вищевисловленого у цьому підрозділі, запишемо математичну модель САЕП, зображеної на рис. 1.1, на комплексній площині. Для цього перетворимо за Лапласом рівняння (2.1) – (2.20), котрі

визначають математичну модель цієї САЕП у часовому просторі.

а). Для електричного двигуна з незалежним збудженням, перетворивши за Лапласом рівняння (2.1), отримаємо:

$$J p \cdot \omega_D(p) = M_D(p) - M_{TH}(p) \quad (2.50)$$

або

$$\omega_D(p) = \frac{1}{J p} (M_D(p) - M_{TH}(p)), \quad (2.51)$$

де з рівняння (2.2):

$$E_D(p) = k_\omega \cdot \omega_D(p), \quad (2.52)$$

з рівняння (2.3):

$$M_D(p) = k_I \cdot I_A(p), \quad (2.53)$$

а з рівняння (2.4):

$$I_A(p) = \frac{1}{R_A^*} (U_D(p) - E_D(p)); \quad (2.54)$$

б). Для електричного генератора, перетворивши за Лапласом рівняння (2.5), отримуємо:

$$T_{3\Gamma} p \cdot I_{3\Gamma}(p) + I_{3\Gamma}(p) = k_{3\Gamma} U_{\overset{\circ}{\underset{\circ}{M\Pi}}}(p) \quad (2.55)$$

або

$$I_{3\Gamma}(p) = \frac{k_{3\Gamma}}{T_{3\Gamma} p + 1} U_{\overset{\circ}{\underset{\circ}{M\Pi}}}(p). \quad (2.56)$$

Аналогічно, перетворивши за Лапласом рівняння (2.8), маємо

$$E_A(p) = k_A \cdot I_{3\Gamma}(p). \quad (2.57)$$

Примітка: нагадаємо — без суттєвої помилки можна вважати, що у рівнянні (2.54)

$$U_D(p) = E_A(p); \quad (2.58)$$

в). Для магнітного підсилювача:

– по каналу управління, перетворивши за Лапласом рівняння (2.9), отримаємо:

$$T_{МП} p \cdot I_Y(p) + I_Y(p) = k_U \cdot U_Y(p) \quad (2.59)$$

або

$$I_Y(p) = \frac{k_U}{T_{МП} p + 1} U_Y(p); \quad (2.60)$$

– за аналогією, по каналу зворотного зв'язку за швидкістю обертання якоря електродвигуна із рівняння (2.12) отримаємо:

$$T_{МП} p \cdot I_{ЗШ}(p) + I_{ЗШ}(p) = k_{ЗШ}^* \cdot U_{ЗШ}(p) \quad (2.61)$$

або

$$I_{ЗШ}(p) = \frac{k_{ЗШ}^*}{T_{МП} p + 1} U_{ЗШ}(p), \quad (2.62)$$

а із рівняння (2.13):

$$U_{ЗШ}(p) = k_{ЗШ} \cdot \omega_D(p); \quad (2.63)$$

– по каналу гнучкого зворотного зв'язку за напругою на затискачах якоря електродвигуна із рівнянь (2.15) та (2.16) маємо:

$$T_{МП} p \cdot I_{ЗН}(p) + I_{ЗН}(p) = k_{ЗН}^* \cdot U_{ЗН}(p) \quad (2.64)$$

або

$$I_{ЗН}(p) = \frac{k_{ЗН}^*}{T_{МП} p + 1} U_{ЗН}(p), \quad (2.65)$$

$$T_{RC} p \cdot U_{ЗН}(p) + U_{ЗН}(p) = k^* \cdot T_{RC} p \cdot U_D(p) \quad (2.66)$$

або

$$U_{ЗН}(p) = \frac{k^* T_{RC} p}{T_{RC} p + 1} U_D(p); \quad (2.67)$$

– по виходу магнітного підсилювача із рівнянь (2.18) та (2.19) маємо:

$$I_Y^*(p) = I_Y(p) + I_{ЗС}(p) - I_{ЗШ}(p) - I_{ЗН}(p), \quad (2.68)$$

$$U_{МП}^{\wedge}(p) = k_I^* \cdot I_Y^*(p). \quad (2.69)$$

Оскільки числові значення коефіцієнтів, які входять у рівняння (2.50) – (2.69), підраховуються за тими ж виразами, що наведені у попередньому підрозділі, то ми їх не дублюємо.

Система алгебраїчних рівнянь (2.50) – (2.69) задає математичну модель САЕП на комплексній площині.

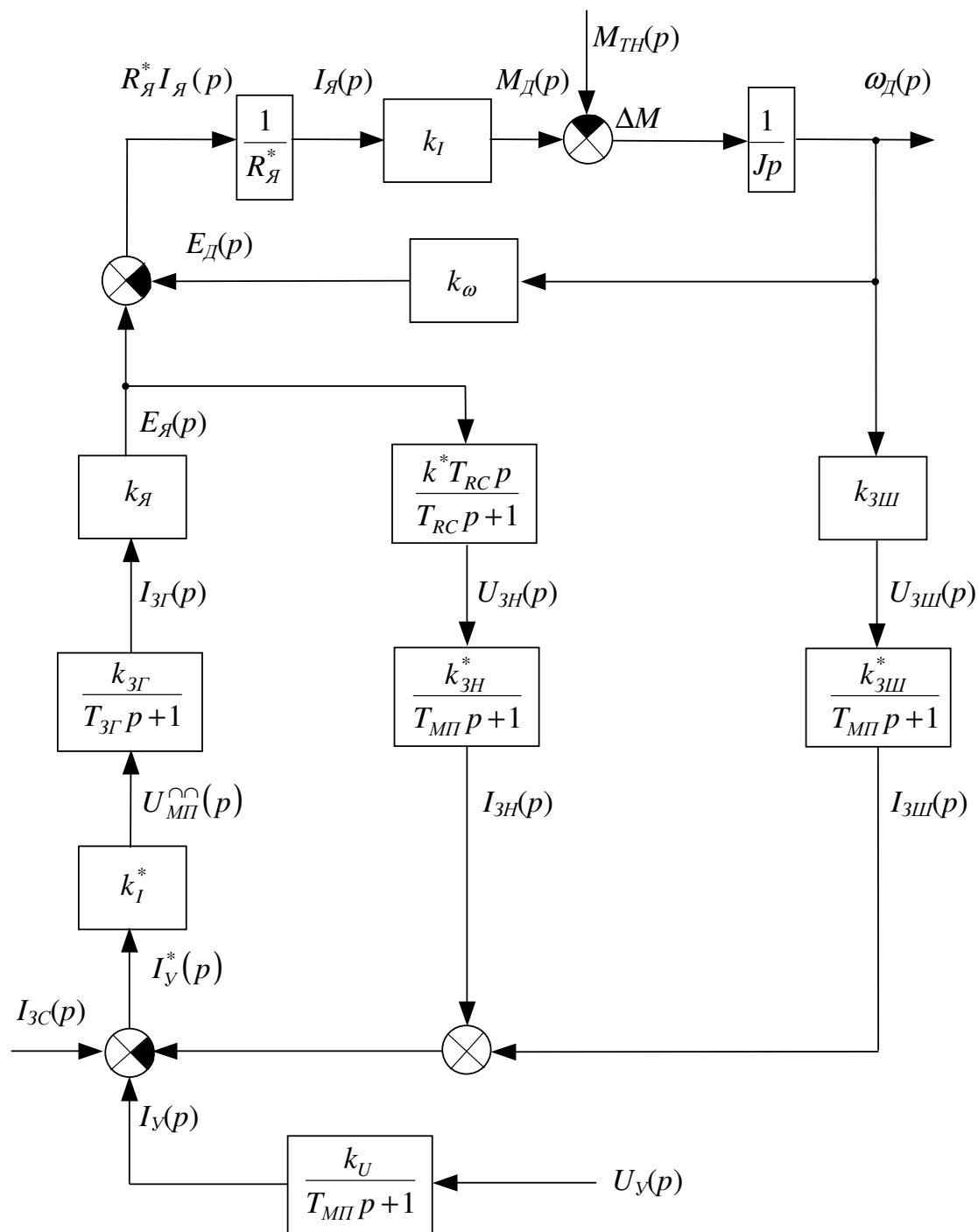


Рис. 2.2. Структурна схема САЕП

На рис. 2.2 зображена структурна схема САЕП на комплексній площині, яка є графічним образом системи рівнянь (2.50) – (2.69).

Неважко здогадатись, що вирази, які записані у зображеннях структурних ланок на схемі рис. 2.2, є ні що інше, як передаточні функції цих структурних ланок.

Для спрощення аналізу математичної моделі САЕП на комплексній площині введемо кілька формальних правил перетворення структурних схем.

Правило 1: *передаточна функція послідовного з'єднання структурних ланок визначається як добуток передаточних функцій цих ланок.*

Доведемо справедливність цього правила на прикладі послідовного з'єднання трьох структурних ланок (рис. 2.3).

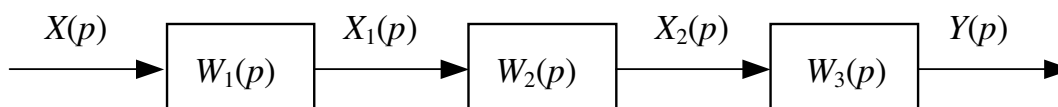


Рис. 2.3. Структурна схема динамічної системи, яка має три послідовно з'єднані ланки

Згідно з формулою (2.36) для схеми рис. 2.3 можна записати, що

$$X_1(p) = W_1(p) \cdot X(p), \quad (2.70)$$

$$X_2(p) = W_2(p) \cdot X_1(p), \quad (2.71)$$

$$Y(p) = W_3(p) \cdot X_2(p). \quad (2.72)$$

Підставляючи значення $X_1(p)$ із (2.70) у (2.71), а цей результат в (2.72), отримаємо, що

$$Y(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p) \cdot X(p) \quad (2.73)$$

або

$$Y(p) = W_{\text{носл}}(p) \cdot X(p), \quad (2.74)$$

звідки

$$W_{\text{носл}}(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p), \quad (2.75)$$

що й підтверджує справедливність правила 1.

Застосовуючи правило 1, ми маємо право замість структурної схеми,

що на рис. 2.3, використовувати структурну схему рис. 2.4, в якій $W_{\text{посл}}(p)$ визначається формулою (2.75), яка легко узагальнюється на будь-яке число послідовно з'єднаних ланок.

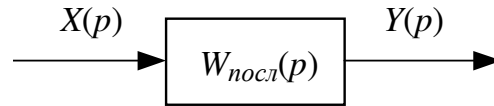


Рис. 2.4. Структурна схема динамічної системи, яка має три послідовно з'єднані ланки, після застосування до неї правила 1

Правило 2: *передаточна функція паралельного з'єднання структурних ланок визначається як сума передаточних функцій цих ланок.*

Доведемо справедливність правила 2 на прикладі паралельного з'єднання трьох структурних ланок (рис. 2.5).

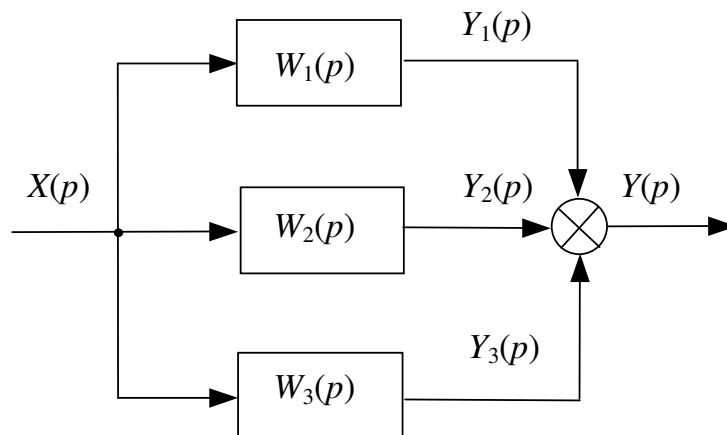


Рис. 2.5. Структурна схема динамічної системи, яка має три паралельно з'єднані ланки

Згідно з формулою (2.36) для схеми рис. 2.5 можна записати, що

$$Y_1(p) = W_1(p) \cdot X(p), \quad (2.76)$$

$$Y_2(p) = W_2(p) \cdot X(p), \quad (2.77)$$

$$Y_3(p) = W_3(p) \cdot X(p). \quad (2.78)$$

Крім того, для суматора справедливе рівняння

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p). \quad (2.79)$$

Підставляючи в (2.79) значення із (2.76) – (2.78), отримаємо:

$$Y(p) = (W_1(p) + W_2(p) + W_3(p)) X(p) \quad (2.80)$$

або

$$Y(p) = W_{нар}(p) \cdot X(p), \quad (2.81)$$

звідки

$$W_{нар}(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p), \quad (2.82)$$

що й підтверджує справедливість правила 2.

Застосовуючи правило 2, ми маємо право замість структурної схеми, що на рис. 2.5, використовувати структурну схему рис. 2.6, в якій $W_{нар}(p)$ визначається формулою (2.82), яка легко узагальнюється на будь-яке число паралельно з'єднаних ланок.

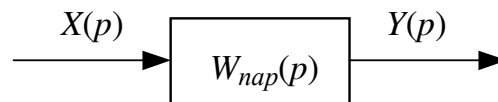


Рис. 2.6. Структурна схема динамічної системи, яка має три паралельно з'єднані ланки, після застосування до неї правила 2

Правило 3: *передаточна функція ланки, охопленої зворотним зв'язком, визначається дробом, у чисельнику якого знаходиться передаточна функція самої ланки, а у знаменнику — одиниця плюс (або мінус) добуток передаточних функцій ланки та каналу зворотного зв'язку.*

Знак “плюс” у знаменнику відповідає негативному зворотному зв'язку, а знак “мінус” — позитивному.

Доведемо справедливість цього правила на прикладі схеми, зображеної на рис. 2.7.

Згідно з формулою (2.36) для схеми рис. 2.7 можна записати, що

$$Y(p) = W(p) \cdot \varepsilon(p), \quad (2.83)$$

$$X_{зз}(p) = W_{зз}(p) \cdot Y(p), \quad (2.84)$$

крім того, для суматора справедливе рівняння

$$\varepsilon(p) = X(p) \pm X_{33}(p). \quad (2.85)$$

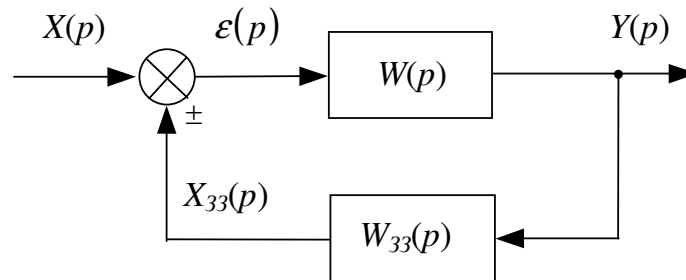


Рис. 2.7. Структурна схема динамічної системи, що являє собою ланку з передаточною функцією $W(p)$, охоплену зворотним зв'язком із передаточною функцією каналу $W_{33}(p)$. Знак “плюс” на схемі відповідає позитивному зворотному зв'язку, а “мінус” — негативному

Підставляючи значення $X_{33}(p)$ із (2.84) в (2.85), а цей результат в (2.83), отримаємо, що

$$Y(p) = W(p) (X(p) \pm W_{33}(p)Y(p)), \quad (2.86)$$

звідки

$$Y(p) = \frac{W(p)}{1 \mp W(p)W_{33}(p)} X(p) \quad (2.87)$$

або

$$Y(p) = \Phi(p) \cdot X(p). \quad (2.88)$$

Порівнюючи (2.87) та (2.88), бачимо, що

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 \mp W(p)W_{33}(p)}, \quad (2.89)$$

а це і є підтвердженням справедливості правила 3.

Застосовуючи правило 3, ми маємо право замість структурної схеми, що на рис. 2.7, використовувати структурну схему рис. 2.8, в якій $\Phi(p)$ визначається формулою (2.89), де знак “плюс” відноситься до негативного зворотного зв'язку, а знак “мінус” — до позитивного.

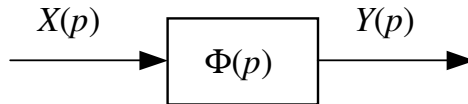


Рис. 2.8. Структурна схема ланки динамічної системи, охопленої зворотним зв'язком, після застосування до неї правила 3

Правило 4: При перенесенні точки відгалуження сигналу (рис. 2.9, а) із виходу структурної ланки з передаточною функцією $W(p)$ на її вхід (рис. 2.9, б) необхідно в канал відгалуження включити додаткову ланку з передаточною функцією $W(p)$.

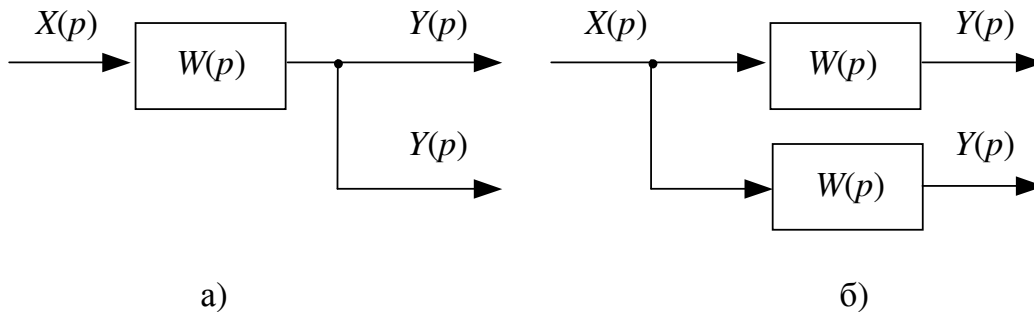


Рис. 2.9. Структурна схема динамічної системи до перенесення точки відгалуження сигналу (а) та після її перенесення (б)

Правило 5: При перенесенні точки відгалуження сигналу (рис. 2.10, а) зі входу структурної ланки з передаточною функцією $W(p)$ на її вихід (рис. 2.10, б) необхідно в канал відгалуження включити додаткову ланку з передаточною функцією $\frac{1}{W(p)}$.

Справедливість правил 4, 5 підтверджується, виходячи із принципу незмінності сигналу до і після перенесення та застосування формул (2.36) і (2.75).

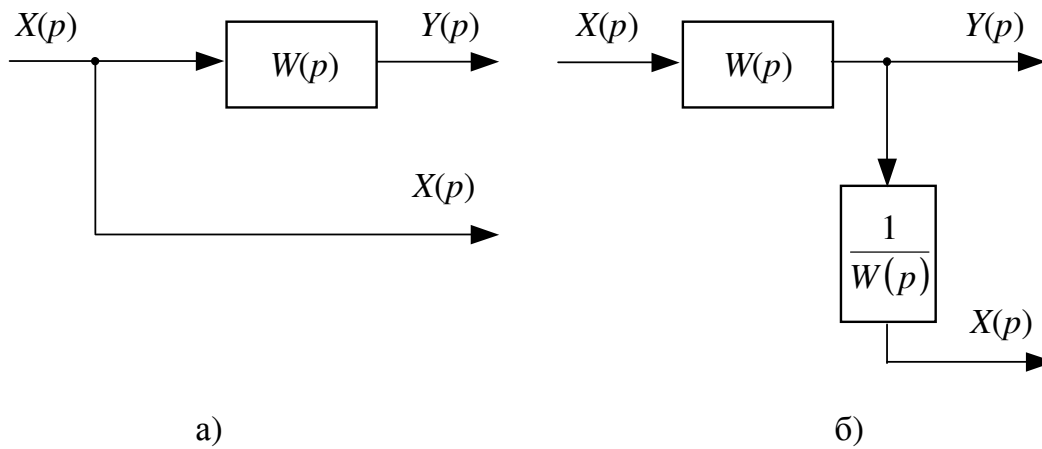


Рис. 2.10. Структурна схема динамічної системи до перенесення точки відгалуження сигналу (а) та після її перенесення (б)

Застосуємо наведені вище правила для спрощення структурної схеми САЕП, зображеної на рис. 2.2.

Спочатку застосуємо правило 1 до всіх структурних ланок схеми, розташованих між суматорами та точками розгалуження сигналів.

Отримаємо:

$$W_1(p) = k_I^* \frac{k_{3\Gamma}}{T_{3\Gamma} p + 1} \cdot k_{Я}, \quad (2.90)$$

$$W_2(p) = \frac{k^* T_{RC} p}{T_{RC} p + 1} \cdot \frac{k_{3H}^*}{T_{МП} p + 1}, \quad (2.91)$$

$$W_3(p) = \frac{1}{R_{Я}^*} \cdot k_I, \quad (2.92)$$

$$W_4(p) = \frac{k_{3Ш}^*}{T_{МП} p + 1} \cdot k_{3Ш}. \quad (2.93)$$

Зауважимо, що під час перетворень схеми можна відкинути $I_{3C}(p)$, оскільки введенням цього струму ми “зсуваємо” вліво характеристику магнітного підсилювача $I_{МП}^{\wedge\wedge} = f(I_Y)$, що легко врахувати зміною значення коефіцієнта $tg\beta$ у формулі (1.21).

З урахуванням отриманих передаточних функцій (2.90) – (2.93) та

зробленого зауваження від структурної схеми рис. 2.2 перейдемо до еквівалентної структурної схеми, зображеної на рис. 2.11.

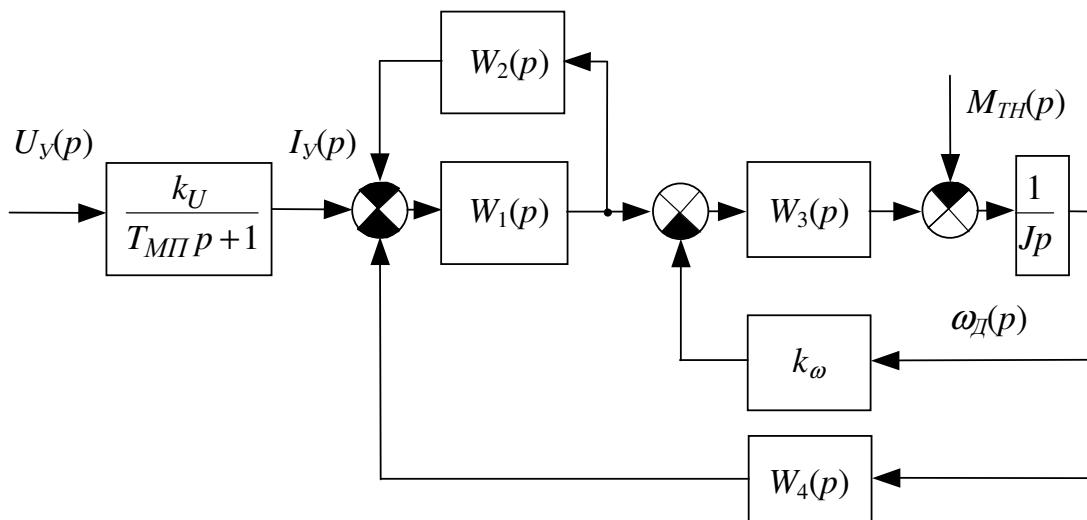


Рис. 2.11. Структурна схема САЕП після застосування до неї правила 1

Застосуємо тепер правило 3 до передаточних функцій $W_1(p)$ та $W_2(p)$. Отримаємо:

$$\Phi_1(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (2.94)$$

Для подальшого спрощення структурної схеми покладемо, що її треба перетворити так, аби можна було записати модель САЕП у вигляді

$$\omega_D(p) = W_{МП}(p)\Phi_Y(p) \cdot U_Y(p) - \Phi_M(p) \cdot M_{TH}(p), \quad (2.95)$$

тобто привести її до вигляду, зображеному на рис. 2.12.

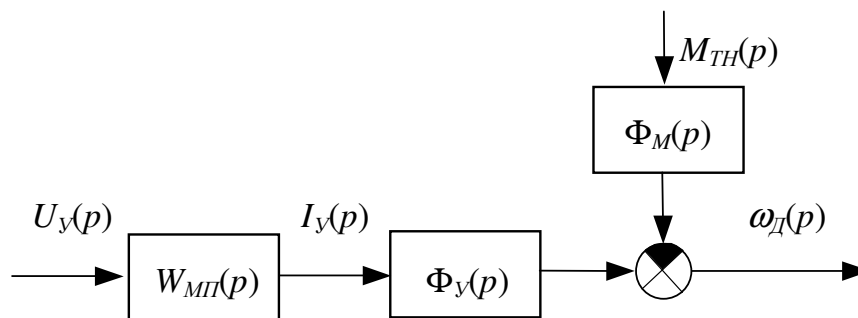


Рис. 2.12. Кінцева структурна схема САЕП

Для визначення передаточної функції $\Phi_Y(p)$ САЕП по каналу управління покладемо, що

$$M_{TH}(p) = 0. \quad (2.96)$$

Принцип суперпозиції, справедливий для лінійних систем, це дозволяє.

Тоді на схемі рис. 2.11 зникає суматор між ланками з передаточними функціями $W_3(p)$ та $\frac{1}{Jp}$. Застосовуючи до цих передаточних функцій правило 1, отримаємо:

$$W_5(p) = W_3(p) \cdot \frac{1}{Jp}. \quad (2.97)$$

За виконання умови (2.96) з урахуванням (2.94) структурна схема САЕП матиме вигляд, зображений на рис. 2.13.

Згідно з правилом 3:

$$\Phi_2(p) = \frac{W_5(p)}{1 + k_\omega W_5(p)}. \quad (2.98)$$

Згідно з правилом 1:

$$W_6(p) = \Phi_1(p) \cdot \Phi_2(p). \quad (2.99)$$

Згідно з правилом 3:

$$\Phi_Y(p) = \frac{W_6(p)}{1 + W_4(p)W_6(p)}. \quad (2.100)$$

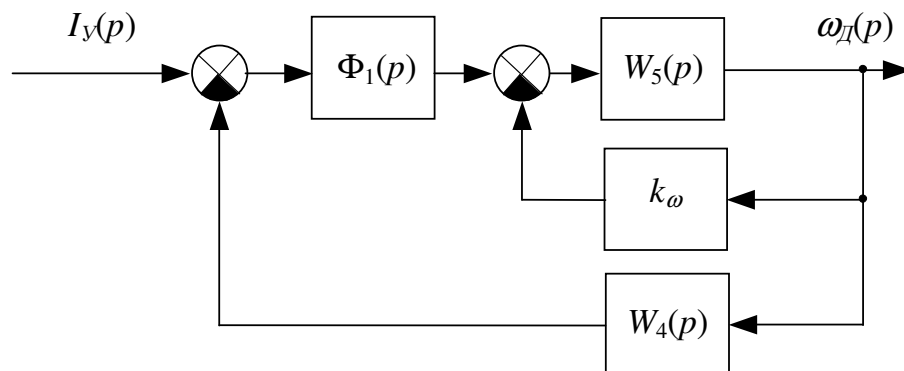


Рис. 2.13. Структурна схема САЕП за виконання умови (2.96)

Тепер знайдемо передаточну функцію $\Phi_M(p)$.

Для цього покладемо, що

$$U_Y(p) = 0. \quad (2.101)$$

Тоді на схемі рис. 2.11 зникнуть ланка з передаточною функцією $W_{МП}(p) = \frac{k_U}{T_{МП}p + 1}$ і суматор, розташований між цією ланкою та еквівалентною ланкою з передаточною функцією $\Phi_1(p)$. Але те, що цей суматор задавав негативний зворотний зв'язок (про що на схемі свідчить затемненість сектора, в який входить стрілка зворотного зв'язку), покажемо шляхом затемнення сектора у суматорі, в який упирається стрілка, що виходить від еквівалентної ланки з передаточною функцією $\Phi_1(p)$. З урахуванням викладеного вище структурна схема САЕП, по якій визначатимемо передаточну функцію $\Phi_M(p)$, матиме вигляд, зображений на рис. 2.14.

Згідно з правилом 1:

$$W_7(p) = \Phi_1(p) \cdot W_4(p). \quad (2.102)$$

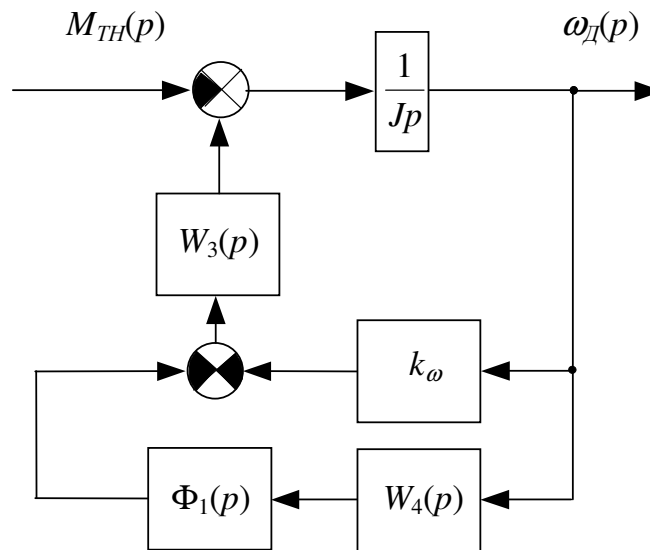


Рис. 2.14. Структурна схема САЕП за виконання умови (2.101)

Згідно з правилом 2:

$$W_8(p) = k_\omega + W_7(p). \quad (2.103)$$

Після цього структурна схема САЕП набуде вигляду, зображеного на рис. 2.15, тобто з неї вилучається проміжний суматор.

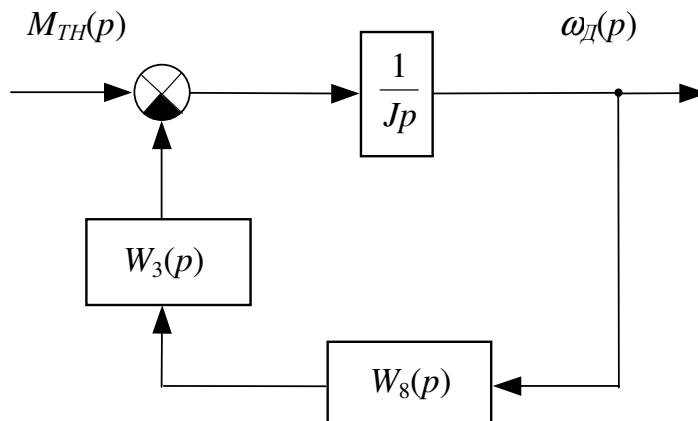


Рис. 2.15. Структурна схема САЕП за виконання умови (2.101) та спрощень (2.102) і (2.103)

Те, що зв'язки по каналах з передаточними функціями k_ω і $W_7(p)$ є негативними, ми на схемі рис. 2.15 позначаємо тим, що затемнюємо сектор, в який упирається стрілка від ланки з передаточною функцією $W_3(p)$, яка тепер відіграє лише проміжну роль на шляху до основного суматора від еквівалентної ланки з передаточною функцією $W_8(p)$.

Звертаємо увагу на те, що затемненість сектора, в який упирається стрілка від M_{TH} на схемі рис. 2.11, означала, що цей сигнал надходить зі знаком “мінус”. Аби не плутати його із затемненістю, що визначає негативний зворотний зв'язок, який характеризує внутрішню структуру системи, на схемі рис. 2.15 ми залишаємо незатемненим сектор входження у суматор $M_{TH}(p)$, а знак “мінус” уже враховано у формулі (2.95).

Згідно з правилом 1:

$$W_9(p) = W_3(p) \cdot W_8(p). \quad (2.104)$$

Згідно з правилом 3:

$$\Phi_M(p) = \frac{\frac{1}{Jp}}{1 + \frac{1}{Jp} \cdot W_9(p)}. \quad (2.105)$$

Послідовно підставляючи у формули (2.100) та (2.105) значення всіх проміжних передаточних функцій, отримуємо:

$$\Phi_Y(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}, \quad (2.106)$$

де:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = k_I^* k_{3\Gamma} k_{\text{Я}} \cdot \frac{1}{R_{\text{Я}}^*} \cdot k_I, \\ b_1 = k_I^* k_{3\Gamma} k_{\text{Я}} \cdot \frac{1}{R_{\text{Я}}^*} \cdot k_I (T_{\text{RC}} + T_{\text{МП}}), \\ b_2 = k_I^* k_{3\Gamma} k_{\text{Я}} \cdot \frac{1}{R_{\text{Я}}^*} \cdot k_I T_{\text{RC}} T_{\text{МП}}, \\ a_0 = k_{\omega} \cdot \frac{1}{R_{\text{Я}}^*} \cdot k_I + k_I^* k_{3\Gamma} k_{\text{Я}} \cdot \frac{1}{R_{\text{Я}}^*} \cdot k_I k_{3\text{Ш}}^* k_{3\text{Ш}}, \\ a_1 = -J + k_{\omega} \cdot \frac{1}{R_{\text{Я}}^*} \cdot k_I (T_{3\Gamma} + T_{\text{RC}} + T_{\text{МП}}) + \\ \quad + k_{\omega} \cdot \frac{1}{R_{\text{Я}}^*} \cdot k_I k_I^* k_{3\Gamma} k_{\text{Я}} k^* T_{\text{RC}} k_{3\text{H}}^* + \\ \quad + k_I^* k_{3\Gamma} k_{\text{Я}} \cdot \frac{1}{R_{\text{Я}}^*} \cdot k_I k_{3\text{Ш}}^* k_{3\text{Ш}} T_{\text{RC}}, \\ a_2 = J (T_{3\Gamma} + T_{\text{RC}} + T_{\text{МП}}) + J \cdot k_I^* k_{3\Gamma} k_{\text{Я}} k^* T_{\text{RC}} k_{3\text{H}}^* + \\ \quad + k_{\omega} \cdot \frac{1}{R_{\text{Я}}^*} \cdot k_I (T_{3\Gamma} T_{\text{RC}} + T_{3\Gamma} T_{\text{МП}} + T_{\text{RC}} T_{\text{МП}}), \\ a_3 = J (T_{3\Gamma} T_{\text{RC}} + T_{3\Gamma} T_{\text{МП}} + T_{\text{RC}} T_{\text{МП}}) + k_{\omega} \cdot \frac{1}{R_{\text{Я}}^*} \cdot k_I T_{3\Gamma} T_{\text{RC}} T_{\text{МП}}, \\ a_4 = J \cdot T_{3\Gamma} T_{\text{RC}} T_{\text{МП}}. \end{array} \right. \quad (2.107)$$

$$\Phi_M(p) = \frac{c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}, \quad (2.108)$$

де:

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_1 = T_{3\Gamma} + T_{RC} + T_{МП} + k_I^* k_{3\Gamma} k_{Я} k^* k_{3H} T_{RC}, \\ c_2 = T_{3\Gamma} T_{RC} + T_{3\Gamma} T_{МП} + T_{RC} T_{МП}, \\ c_3 = T_{3\Gamma} T_{RC} T_{МП}. \end{cases} \quad (2.109)$$

Слід звернути увагу на те, що однаковість знаменників у передаточних функціях $\Phi_Y(p)$ та $\Phi_M(p)$ замкненої системи — це один із критеріїв правильності визначення цих функцій — необхідна, але недостатня умова. Тобто неоднаковість знаменників одразу вказує на неправильність розрахунків, але однаковості недостатньо, щоб стверджувати про повну правильність усіх розрахунків.

Підставляючи значення $\Phi_Y(p)$ та $\Phi_M(p)$ із (2.106) та (2.108) в (2.95), а також з (2.60) передаточну функцію $W_{МП}(p) = \frac{k_U}{T_{МП}p + 1}$, отрима-

ємо повну математичну модель САЕП на комплексній площині, за допомогою якої, задаючи закони зміни сигналу управління U_Y та моменту навантаження на вал електродвигуна $M_{ТН}$ і перетворюючи ці залежності за Лапласом, можна дослідити як змінюється швидкість обертання вала двигуна при різних U_Y та $M_{ТН}$:

$$\begin{aligned} \omega_D(p) = & \frac{(b_2 p^2 + b_1 p + b_0) \cdot k_U}{(a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) \cdot (T_{МП} p + 1)} U_Y(p) - \\ & - \frac{c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} M_{ТН}(p). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Нагадаємо, що для того, щоб отримати закон зміни ω_D у часовому просторі, треба від зображення $\omega_D(p)$ у формі (2.110) перейти до оригіналу $\omega_D(t)$, використовуючи або одну із формул розкладання, або таблиці відповідності між оригіналами та їх зображеннями, або ж взявши за допомогою теореми про лишки обернений інтеграл Лапласа (2.39).

Якщо рівняння (2.110) переписати у вигляді

$$\begin{aligned}
& \left[a_4 T_{МП} p^5 + (a_4 + a_3 T_{МП}) p^4 + (a_3 + a_2 T_{МП}) p^3 + \right. \\
& \left. + (a_2 + a_1 T_{МП}) p^2 + (a_1 + a_0 T_{МП}) p + a_0 \right] \omega_D(p) = \\
& = \left[k_U b_2 p^2 + k_U b_1 p + k_U b_0 \right] U_Y(p) - \left[c_3 T_{МП} p^4 + (c_3 + c_2 T_{МП}) p^3 + \right. \\
& \left. + (c_2 + c_1 T_{МП}) p^2 + (c_1 + c_0 T_{МП}) p + c_0 \right] M_{TH}(p), \quad (2.111)
\end{aligned}$$

то легко записати його аналог в області оригіналів, згадавши про те, що перемноження на p в області зображень відповідає диференціюванню в області оригіналів. З урахуванням цього зауваження маємо:

$$\begin{aligned}
& a_4 T_{МП} \frac{d^5 \omega_D}{dt^5} + (a_4 + a_3 T_{МП}) \frac{d^4 \omega_D}{dt^4} + (a_3 + a_2 T_{МП}) \frac{d^3 \omega_D}{dt^3} + \\
& + (a_2 + a_1 T_{МП}) \frac{d^2 \omega_D}{dt^2} + (a_1 + a_0 T_{МП}) \frac{d \omega_D}{dt} + a_0 \omega_D = \\
& = k_U b_2 \frac{d^2 U_Y}{dt^2} + k_U b_1 \frac{d U_Y}{dt} + k_U b_0 U_Y - \\
& - \left(c_3 T_{МП} \frac{d^4 M_{TH}}{dt^4} + (c_3 + c_2 T_{МП}) \frac{d^3 M_{TH}}{dt^3} + \right. \\
& \left. + (c_2 + c_1 T_{МП}) \frac{d^2 M_{TH}}{dt^2} + (c_1 + c_0 T_{МП}) \frac{d M_{TH}}{dt} + c_0 M_{TH} \right). \quad (2.112)
\end{aligned}$$

Очевидно, що операція отримання рівняння (2.112) шляхом виключення проміжних змінних у системі рівнянь (2.1) – (2.20) є набагато складнішою.

Тож перехід на комплексну площину є виправданим навіть у тому разі, коли за кінцеву мету задачі ідентифікації САЕП приймається отримання математичної моделі у просторі часу у вигляді (2.112).

Порівнюючи вирази (2.106) – (2.109) із рівнянням (2.112) ми бачимо, що всі коефіцієнти, які входять у математичну модель САЕП у формі диференціального рівняння, входять також і у формули для передаточних функцій САЕП по управлінню $\Phi_Y(p)$ та по збуренню $\Phi_M(p)$. Саме виходячи із цієї умови, математичні моделі динамічних систем на комплексній площині частіше задають не у формі рівняння (2.95), а у формі передаточ-

них функцій по управлінню та по збуренню, кожна з яких дозволяє розв'язувати досить широкий клас задач аналізу САЕП.

2.3. Ідентифікація на частотній осі

Як показано у попередньому підрозділі, достатньо повну інформацію про динаміку лінійної системи несе її передаточна функція, яка є функцією комплексної змінної $p = \sigma + j\omega$.

Якщо накласти умову

$$\sigma = 0, \quad (2.113)$$

то передаточна функція $\Phi(p)$ вироджується у функцію уявної частини $j\omega$ комплексної змінної p , тобто в $\Phi(j\omega)$.

До прикладу, нехай

$$\Phi_1(p) = \frac{10}{5p+1}. \quad (2.114)$$

За виконання умови (2.113) із (2.114) маємо:

$$\Phi_1(j\omega) = \frac{10}{1+j5\omega}. \quad (2.115)$$

Функцію $\Phi_1(j\omega)$ шляхом очевидних перетворень можна привести до такої форми

$$\begin{aligned} \Phi_1(j\omega) &= \frac{10 \cdot (1-j5\omega)}{(1+j5\omega) \cdot (1-j5\omega)} = \frac{10-j50\omega}{1+(5\omega)^2} = \\ &= \frac{10}{1+25\omega^2} - j \frac{50\omega}{1+25\omega^2} = P_1(\omega) + jQ_1(\omega), \end{aligned} \quad (2.116)$$

де

$$P_1(\omega) = \frac{10}{1+25\omega^2}, \quad (2.117)$$

$$Q_1(\omega) = -\frac{50\omega}{1+25\omega^2}. \quad (2.118)$$

Вирази (2.115) – (2.118) за своєю структурою справедливі для довільної функції $\Phi(p)$. Оскільки як функція $\Phi(j\omega)$, так і її складові $P(\omega)$ та $Q(\omega)$ у своїй структурі містять всі коефіцієнти передаточної функції $\Phi(p)$, то можна стверджувати, що кожна з них несе однаково кількість інформації про динаміку системи, яка характеризується цією передаточною функцією. У цьому легко переконатись на наведеному прикладі.

З теорії комплексних чисел відомо, що при $\omega = \omega^*$ комплексне число

$$\Phi(j\omega^*) = P(\omega^*) + jQ(\omega^*) \quad (2.119)$$

можна записати не тільки в алгебраїчній формі (2.119), а й у показниковій:

$$\Phi(j\omega^*) = A(\omega^*) \cdot e^{j\varphi(\omega^*)}, \quad (2.120)$$

де

$$A(\omega^*) = \sqrt{P^2(\omega^*) + Q^2(\omega^*)}, \quad (2.121)$$

$$\varphi(\omega^*) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega^*)}{P(\omega^*)}. \quad (2.122)$$

Оскільки параметр ω в усіх наведених вище виразах має чітко визначений фізичний сенс — це кругова частота, то всі функції, що залежать від нього, називаються частотними характеристиками, з яких:

$P(\omega)$ – дійсна частотна характеристика,

$Q(\omega)$ – уявна частотна характеристика,

$A(\omega)$ – амплітудна частотна характеристика,

$\varphi(\omega)$ – фазова частотна характеристика,

$\Phi(j\omega)$ – амплітудно-фазова частотна характеристика.

Для співвідношень (2.119) – (2.122), які пов'язують між собою частотні характеристики, слід додати ще два, які є очевидними для всіх, хто знайомий з теорією комплексних чисел, а саме:

$$P(\omega) = A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega), \quad (2.123)$$

$$Q(\omega) = A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega). \quad (2.124)$$

Амплітудну та фазову частотні характеристики $A(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ динамічної системи легко отримати експериментально за допомогою спеціального комплексу, який містить у собі генератор синусоїдальних коливань змінної частоти, подвійний піковий вольтметр, фазометр-частотомір та пристрій для перетворення фізичних параметрів процесів на вході та виході системи в електричний сигнал і навпаки для їх узгодження один з одним.

Експеримент з отримання частотних характеристик $A(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ полягає в тому, що на вхід системи від генератора синусоїдальних коливань подаємо сигнал

$$x_1(t) = X_1(\omega_1) \sin \omega_1 t \quad (2.125)$$

з фіксованими частотою $\omega_1 = 2\pi f_1$, де f_1 – реальна частота у герцах, та амплітудою $X_1(\omega_1)$.

Після закінчення перехідного процесу, тривалість якого визначається чотирма еквівалентними сталими часу цієї системи, на її виході встановлюються коливання

$$y_1(t) = Y_1(\omega_1) \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)). \quad (2.126)$$

Замірявши подвійним піковим вольтметром одночасно значення амплітуди $X_1(\omega_1)$ сигналу на вході системи та $Y_1(\omega_1)$ на її виході та взявши їх відношення, отримаємо значення амплітудної частотної характеристики системи на частоті ω_1 , тобто

$$A(\omega_1) = \frac{Y_1(\omega_1)}{X_1(\omega_1)}. \quad (2.127)$$

За допомогою фазометра-частотоміра на цій ж частоті ω_1 заміряємо зсув фаз $\varphi(\omega_1)$, який виникає між сигналами $x_1(t)$ та $y_1(t)$ — він безпосередньо задає значення фазової частотної характеристики $\varphi(\omega_1)$ на частоті ω_1 .

Дискретно змінюючи частоту вхідного сигналу від нуля до значень

ω_n , за яких можна вважати, що

$$Y(\omega_n) \cong 0, \quad (2.128)$$

і здійснюючи дії, що описані вище, отримаємо скінченну множину чисел:

$$\{(\omega_0, A(\omega_0), \varphi(\omega_0)), (\omega_1, A(\omega_1), \varphi(\omega_1)), \dots, (\omega_n, A(\omega_n), \varphi(\omega_n))\}, \quad (2.129)$$

яка дискретно задає амплітудну та фазову частотні характеристики $A(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ системи.

Для отримання неперервних функцій $A(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ залишається тільки здійснити апроксимацію послідовностей чисел

$$A(\omega_0), A(\omega_1), \dots, A(\omega_n), \quad (2.130)$$

$$\varphi(\omega_0), \varphi(\omega_1), \dots, \varphi(\omega_n) \quad (2.131)$$

за допомогою відомих інтерполяційних процедур, або використавши спеціально підібрані формули для $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ та суму квадратів відхилень як критерій оптимізації процедури.

У разі використання першого шляху для отримання $\Phi(j\omega)$ необхідно підставити інтерполяційні вирази для $A(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ у формулу (2.120), а потім за допомогою іншої апроксимаційної процедури перейти від $\Phi(j\omega)$ до $\Phi(p)$.

Другий шлях дозволяє одразу отримати формулу для $\Phi(p)$.

Алгоритм побудови $\Phi(p)$ за цим підходом такий: спочатку висуваємо гіпотезу про те, що динаміка нашої системи описується передаточною функцією

$$\Phi_1(p) = \frac{b_1}{a_1 p + 1}. \quad (2.132)$$

Із формули (2.132) видно, що для ідентифікації системи необхідно знайти лише два коефіцієнти a_1 та b_1 .

Використовуючи формули (2.119) – (2.122) та (2.132), знаходимо, що:

$$\Phi_1(j\omega) = \frac{b_1}{a_1 j\omega + 1} = \frac{b_1 \cdot (1 - a_1 j\omega)}{(1 + a_1 j\omega) \cdot (1 - a_1 j\omega)}, \quad (2.133)$$

$$P_1(\omega) = \frac{b_1}{1 + a_1^2 \omega^2}, \quad (2.134)$$

$$Q_1(\omega) = -\frac{a_1 b_1 \omega}{1 + a_1^2 \omega^2}, \quad (2.135)$$

$$A_1(\omega) = \frac{b_1}{\sqrt{1 + a_1^2 \omega^2}}, \quad (2.136)$$

$$\varphi_1(\omega) = -\text{arctg}(a_1 \omega). \quad (2.137)$$

Підставляючи у формулу (2.136) значення $\omega_0, A(\omega_0); \omega_1, A(\omega_1) \dots \omega_n, A(\omega_n)$ із (2.130) складаємо систему двох рівнянь з двома невідомими a_1, b_1 . Розв'язавши цю систему чисельними методами на ПЕОМ, отримаємо перші оцінки коефіцієнтів a_1, b_1 .

Використовуючи значення $\omega_0, \varphi(\omega_0); \omega_1, \varphi(\omega_1) \dots \omega_n, \varphi(\omega_n)$ із (2.131) аналогічно знаходимо оцінку

$$\sigma_1^2 = \sum_{i=0}^n (\varphi(\omega_i) + \text{arctg}(a_1 \omega_i))^2 \quad (2.138)$$

суми квадратів відхилень експериментальних значень фазової частотної характеристики від її значень, що визначаються за вибраною моделлю (2.137).

Після цього висуваємо гіпотезу, що динаміка системи описується якоюсь іншою передаточною функцією і для її конкретного виду повторюємо всю описану вище процедуру.

У результаті отримаємо оцінку σ_2^2 .

Якщо

$$\sigma_2^2 > \sigma_1^2, \quad (2.139)$$

то найкращу апроксимацію передаточної функції системи за експериментальними даними (2.130), (2.131) забезпечує формула (2.132). Якщо ж

$$\sigma_2^2 < \sigma_1^2, \quad (2.140)$$

то пошук треба продовжувати.

Дві практичні поради:

1). Якщо умова (2.128) виконується, то це означає, що порядок m полінома у чисельнику передаточної функції системи менший за порядок n полінома в її знаменнику.

У цьому легко переконатись, проаналізувавши вираз для $A(\omega)$, записаний у загальному вигляді.

Цю умову можна сформулювати ще так: для реальних інерційних систем, для яких

$$\Phi(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \quad (2.141)$$

завжди виконується умова

$$m < n. \quad (2.142)$$

2). а). Якщо в (2.131) є таке ω_m , для якого

$$\varphi(\omega_m) \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \quad (2.143)$$

то в (2.141) $n = 1$.

б). Якщо в (2.131) є таке ω_m , для якого

$$\varphi(\omega_m) \rightarrow -2 \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (2.144)$$

то в (2.141)

$$n = 2. \quad (2.145)$$

в). Якщо в (2.131) є таке ω_m , для якого

$$\varphi(\omega_m) \rightarrow -k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (2.146)$$

то в (2.141)

$$n = k. \quad (2.147)$$

Тож, отримавши експериментально значення (2.131), ми одразу мо-

жемо визначити порядок n системи і загальний вигляд знаменника її передаточної функції.

У цьому випадку процедура ідентифікації за значеннями $A(\omega_i)$, $\varphi(\omega_i)$, $i = \overline{0, n}$ фактично зводиться до пошуку потрібного виразу чисельника передаточної функції (2.141).

У заголовок підрозділу ми записали “ідентифікація на частотній осі”.

Ввівши умову (2.113), від перетворення за Лапласом, яке кожній функції, визначеній на часовій осі як оригінал, ставить у відповідність функцію на комплексній площині, ми переходимо до перетворення Фур’є, яке відображає оригінали на частотну вісь комплексної площини. Саме такий зміст вкладено у назву підрозділу, що впливає із всього викладеного вище.

2.4. Ідентифікація у просторі змінних стану

Нехай відомо, що процеси у динамічній системі описуються диференціальним рівнянням

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bu, \quad (2.148)$$

де u – сигнал управління, а y – реакція системи на нього.

Початкові умови, як це вже було обумовлено раніше, ми не задаємо, хоча для питання, про яке йде мова у цьому підрозділі, це не має принципового значення.

Позначимо

$$y = y_1. \quad (2.149)$$

Тоді

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt}. \quad (2.150)$$

Введемо заміну

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_3. \end{cases} \quad (2.151)$$

Перепишемо рівняння (2.148) у формі:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = -a_0 y - a_1 \frac{dy}{dt} - a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + bu. \quad (2.152)$$

З урахуванням (2.149) – (2.151) рівняння (2.152) можна записати у вигляді

$$\frac{dy_3}{dt} = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - a_2 y_3 + bu. \quad (2.153)$$

У результаті цих перетворень диференціальне рівняння 3-го порядку (2.148) по відношенню до координати y ми привели до системи трьох диференціальних рівнянь 1-го порядку відносно координат y_1, y_2, y_3 , тобто еквівалентом для (2.148) є система

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - a_2 y_3 + bu, \end{cases} \quad (2.154)$$

яку можна переписати у матричній формі у вигляді

$$\dot{Y} = AY + BU. \quad (2.155)$$

де

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{(3 \times 1)} &= \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}, & U_{(3 \times 1)} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{Bmatrix}, & Y_{(3 \times 1)} &= \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \\ A_{(3 \times 3)} &= \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{Bmatrix}, & B_{(3 \times 3)} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Матричне рівняння (2.155) легко узагальнюється на довільний поряд-

док вектора \dot{Y} , який характеризує стан системи, та вектора управління U за умови лише, що

$$m \leq n. \quad (2.157)$$

Вирази (2.154) або (2.155) та (2.156) задають математичну модель динамічної системи у просторі змінних її стану, до яких відносять саму вихідну координату y та її $(n-1)$ похідну.

Запис математичної моделі системи у просторі змінних стану широко використовується в теорії автоматичного управління під час розв'язання задач синтезу оптимального управління.

В літературі до 80-х років при $n = 3$ простір змінних стану було прийнято називати *фазовим простором*, а при $n = 2$ — *фазовою площиною*.

2.5. Перехідна та імпульсна перехідна характеристики лінійної динамічної системи з зосередженими параметрами

Серед математичних моделей лінійних динамічних систем широке застосування знаходять дві їх характеристики в часовій області, які називають перехідною характеристикою $h(t)$ та імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$.

Перехідна характеристика $h(t)$ системи є її реакцією на вхідний сигнал $x(t)$ у вигляді одиничного стрибка. Тобто у випадку, коли

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (2.158)$$

маємо:

$$y(t) = h(t). \quad (2.159)$$

Графічна інтерпретація цього означення показана на рис. 2.16.

Оскільки згідно з співвідношенням (2.36) зображення за Лапласом вихідного сигналу $Y(p)$ лінійної динамічної системи є добутком передато-

чної функції цієї системи $W(p)$ та зображення за Лапласом вхідного сигналу системи $X(p)$, яке в разі виконання (2.158), згідно з (2.25), дорівнюватиме $\frac{1}{p}$, то для зображення за Лапласом перехідної характеристики

$H(p)$ матимемо:

$$H(p) = \frac{W(p)}{p}, \quad (2.160)$$

що, в свою чергу, дає нам право записати

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}. \quad (2.161)$$

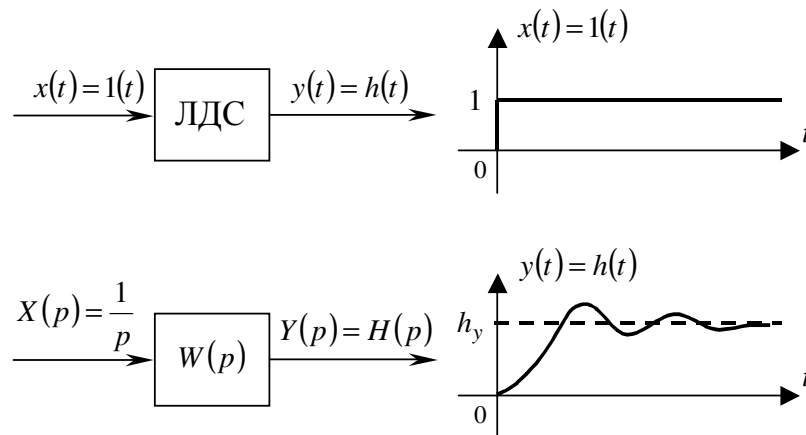


Рис. 2.16. Графік реакції $h(t)$ лінійної динамічної системи ЛДС на одиничний стрибок $1(t)$

Імпульсна перехідна або вагова характеристика $g(t)$ системи є її реакцією на одиничний імпульсний вхідний сигнал $x(t)$ у вигляді дельта-функції $\delta(t)$, для якої справедливо:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (2.162)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.163)$$

Із виразів (2.162), (2.163) випливає, що дельта-функція — це ідеалі-

зація імпульсу одиничної площі з надзвичайно великою висотою і надзвичайно малою протяжністю (рис. 2.17).

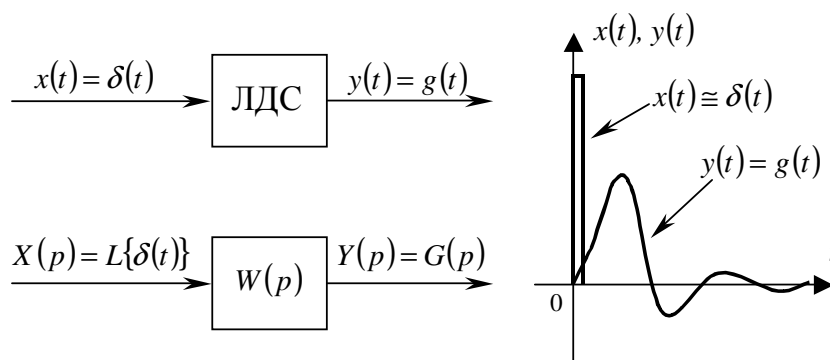


Рис. 2.17. Графік реакції $g(t)$ лінійної динамічної системи ЛДС на одиничний імпульс $\delta(t)$

Легко бачити, що зображення за Лапласом дельта-функції

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = e^{-p \cdot (t=0)} \int_0^{\infty} \delta(t) dt = e^{-p \cdot 0} \cdot 1 = 1. \quad (2.164)$$

Тож, якщо при

$$x(t) = \delta(t), \quad (2.165)$$

за визначенням

$$y(t) = g(t), \quad (2.166)$$

то із (2.36) випливає, що

$$G(p) = W(p). \quad (2.167)$$

Тобто передаточна функція лінійної динамічної системи є зображенням за Лапласом її імпульсної перехідної характеристики, і навпаки

$$g(t) = L^{-1}\{W(p)\}. \quad (2.168)$$

Із співвідношень (2.160) і (2.167) випливає, що

$$G(p) = p \cdot H(p). \quad (2.169)$$

А це, в свою чергу, означає, що справедливим є твердження:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (2.170)$$

тобто імпульсну перехідну характеристику $g(t)$ системи можна отримати диференціюванням її перехідної характеристики $h(t)$.

2.6. Завдання для самоперевірки

1. За яких умов САЕП може вважатись лінійною, детермінованою, неперервною електромеханічною системою із зосередженими параметрами?

2. Яким рівнянням описується динаміка електричного двигуна? Чим ще треба доповнити це рівняння для моделювання електродвигуна у САЕП?

3. Що собою являє математична модель САЕП у просторі часу?

4. Що собою являє перетворення за Лапласом? Які головні переваги аналізу в області зображень?

5. Як визначити передаточну функцію системи, якщо відоме диференціальне рівняння, котре описує процеси у цій системі?

6. Як визначити оригінал за відомим його зображенням на комплексній площині?

7. Отримайте передаточні функції електричного двигуна, електричного генератора, магнітного підсилювача, тахогенератора, каналів зворотних зв'язків.

8. Побудуйте структурну схему САЕП в області зображень.

9. Як визначити передаточну функцію послідовного та паралельного з'єднання структурних ланок?

10. Як визначити передаточну функцію структурної ланки, охопленої зворотним зв'язком?

11. Чого треба дотримуватись під час перенесення точки відгалуження сигналу через структурну ланку з її виходу на вхід та навпаки?

12. До якого найпростішого рівня складності можна спростити структурну схему САЕП, яка має канал управління та канал збурення?
13. Які умови треба виконувати під час знаходження передаточної функції САЕП по управлінню? По збуренню?
14. Як, маючи передаточні функції САЕП, відтворити диференціальне рівняння, яке описує процеси у цій системі?
15. Яким чином, маючи передаточну функцію САЕП, отримати частотні характеристики системи: дійсну, уявну, амплітудну, фазову, амплітудно-фазову?
16. Які частотні характеристики і за допомогою яких приладів можна знайти експериментально?
17. Як, маючи експериментально визначені окремі значення частотних характеристик, синтезувати передаточну функцію системи?
18. Як за експериментальними значеннями фазової частотної характеристики системи визначити її порядок?
19. Що собою являє простір змінних стану системи та як побудувати її модель у цьому просторі?
20. Дайте означення перехідної та імпульсної перехідної характеристик лінійної динамічної системи.
21. Що собою являє одиничний стрибок, і який графік він має?
22. Що собою являє одиничний імпульс, і які його властивості ви знаєте?
23. Як зв'язані зображення за Лапласом перехідної та імпульсної перехідної характеристик системи з її передаточною функцією?
24. Доведіть, що імпульсна перехідна характеристика системи є похідною від її перехідної характеристики.

3. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Приклади конкретних ЕМС, які можна віднести до даного класу, наведені на рис. 1.3 та на рис. 1.5.

На схемі рис. 1.3 дискретна ланка з'являється у блоці СІФУ, в якому формуються імпульси, що керують моментом відкриття тиристорів силового перетворювача електроенергії, а на схемі рис. 1.5 додається ще одна ланка в каналі мікропроцесорного управління.

Для аналізу процесів у дискретних системах нам потрібен математичний апарат, який виходить за рамки того, що вивчається у вузівському стандартному курсі вищої математики, а тому розпочнемо цей розділ викладенням основ цього апарату.

3.1. Решітчасті функції та скінченні різниці

Нехай $f(t)$ — неперервна функція, графік якої має вигляд, наведений на рис. 3.1, а.

Виберемо інтервал дискретності T і визначимо значення функції $f(t)$ лише при значеннях аргументу t , кратних T (рис. 3.1, б).

У результаті цих дій ми отримаємо функцію $f[kT]$ дискретного аргументу kT ($k = 0, 1, 2, \dots$) (рис. 3.1, в), яку математики домовились називати “*решітчастою*”.

Записується алгоритм породження решітчастої функції $f[kT]$ із неперервної $f(t)$ у такий спосіб:

$$f[kT] = f(t)_{t=kT}, \quad (3.1)$$
$$T > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

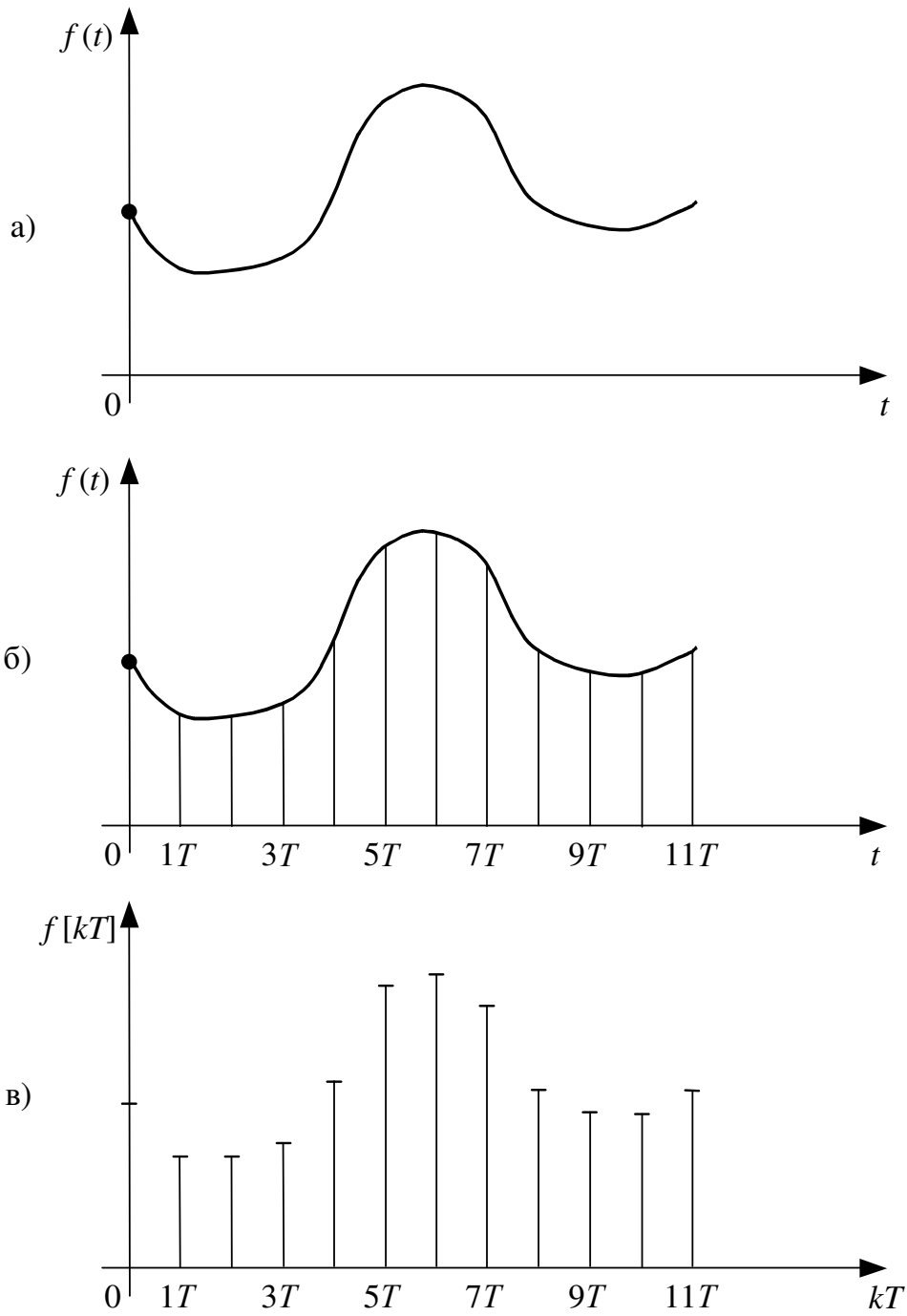


Рис. 3.1. Графіки неперервної $f(t)$ і породженої нею
решітчастої $f[kT]$ функцій

Приклад 1. Нехай

$$f_1(t) = 2t - 4, \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

$$T = 0,5. \quad (3.3)$$

Згідно з алгоритмом (3.1) решітчаста функція $f_1[kT]$, яка породжується функцією (3.2) за умови (3.3), має вигляд:

$$f_1[kT] = f_1(t)|_{t=0,5k} = 2 \cdot [0,5k] - 4, \quad (3.4)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Приклад 2. Нехай

$$f_2(t) = 3t^2 + 2, \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

$$T = 0,5. \quad (3.6)$$

Цій неперервній функції відповідає решітчаста, яка визначається у такий спосіб:

$$f_2[kT] = f_2(t)|_{t=0,5k} = 3 \cdot [0,5k]^2 + 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Графіки решітчастих функцій (3.4), (3.7) наведені на рис. 3.2.

Із формул (3.4) та (3.7) легко бачити, що після вибору числового значення інтервалу дискретності T решітчаста функція $f[kT]$ стає функцією лише аргументу k , а тому автори багатьох книг записують її у вигляді не $f[kT]$, а — $f[k]$. Роблячи так, слід пам'ятати, по-перше, що коефіцієнти у функціях $f[k]$ і $f[kT]$ не збігаються, а по-друге, що для відтворення їх по-родної неперервної функції $f(t)$ необхідно порядковий номер k , який виступає як аргумент решітчастої функції $f[k]$, помножити на числове значення інтервалу дискретності T до виконання операції над ним. Для того, щоб не тримати цього у пам'яті, ми будемо зберігати період дискретності T в аргументі решітчастої функції $f[kT]$.

Як відомо з курсу математичного аналізу, швидкість зміни неперервної функції $f(t)$ у кожній точці графіка характеризується значенням її похідної $\frac{df}{dt}$ у цій точці, числове значення якої дорівнює тангенсу кута α нахилу дотичної до графіка, проведеної через цю ж точку (рис. 3.3).

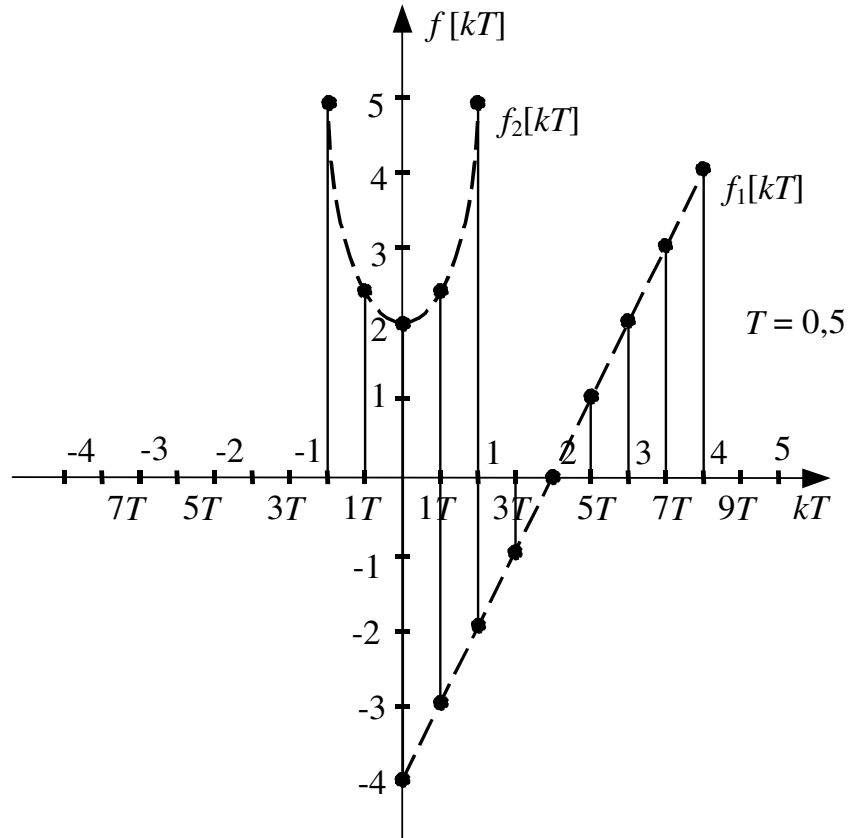


Рис. 3.2. Графіки решітчастих функцій $f_1[kT] = 2[0,5k] - 4$ та $f_2[kT] = 3[0,5k]^2 + 2$ при $T = 0,5$

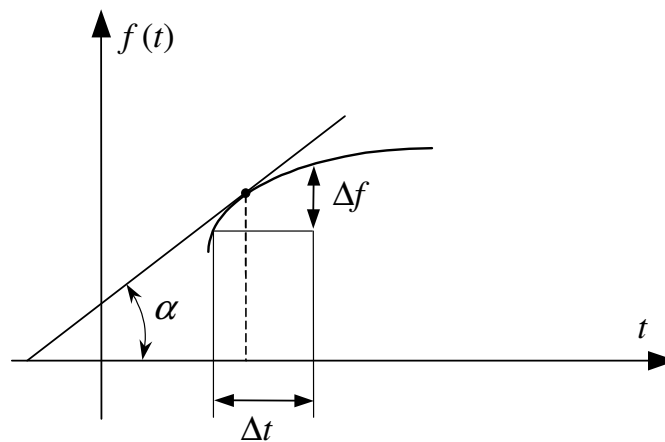


Рис. 3.3. Геометрична інтерпретація похідної $\dot{f}(t)$ від функції $f(t)$

Відомо, що похідна $\frac{df}{dt}$ є функцією $\dot{f}(t)$, яка визначається із співвідношення:

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}, \quad (3.8)$$

яке не може мати місця для решітчастих функцій.

Але, оскільки сусідні значення аргументу kT решітчастої функції $f[kT]$ відрізняються на T , то, сформувавши різницю

$$\Delta f[kT] = f[(k+1)T] - f[kT], \quad (3.9)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

ми можемо формально використати цю різницю $\Delta f[kT]$ для характеристики швидкості зміни решітчастої функції $f[kT]$ у точці з аргументом kT .

Різницю $\Delta f[kT]$ називають *прямою скінченною різницею першого порядку* решітчастої функції $f[kT]$.

За аналогією з (3.9) можна визначити пряму скінченну різницю другого порядку

$$\Delta^2 f[kT] = \Delta f[(k+1)T] - \Delta f[kT], \quad (3.10)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Якщо у вираз (3.10) підставити значення $\Delta f[kT]$ та $\Delta f[(k+1)T]$, визначені за формулою (3.9), отримаємо:

$$\Delta^2 f[kT] = f[(k+2)T] - 2f[(k+1)T] + f[kT], \quad (3.11)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Узагальнюючи (3.9) та (3.10), маємо:

$$\Delta^n f[kT] = \Delta^{n-1} f[(k+1)T] - \Delta^{n-1} f[kT], \quad (3.12)$$

$$n = 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

домовившись, що

$$\begin{cases} \Delta^0 f[kT] = f[kT], \\ \Delta^0 f[(k+1)T] = f[(k+1)T]. \end{cases} \quad (3.13)$$

Відомо, що значення похідної $f'(t)$ від неперервної функції $f(t)$ у точці з аргументом t не залежить від того зліва чи справа наближається Δt до нуля (див. формулу (3.8)). Інша ситуація виникає при наближенні до точки з аргументом kT під час аналізу решітчастої функції $f[kT]$, а тому для характеристики швидкості її зміни крім прямої скінченної різниці $\Delta f[kT]$ першого порядку вводять ще й обернену скінченну різницю першого порядку за формулою:

$$\nabla f[kT] = f[kT] - f[(k-1)T], \quad (3.14)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Нагадаємо, що символи “ Δ ” та “ ∇ ” є грецькими літерами, відповідно, “дельта” та “набла”.

На рис. 3.4 показано, наскільки суттєво можуть відрізнятися пряма $\Delta f[kT]$ та обернена $\nabla f[kT]$ скінченні різниці першого порядку решітчастої функції $f[kT]$ при значенні аргументу $kT = 4T$.

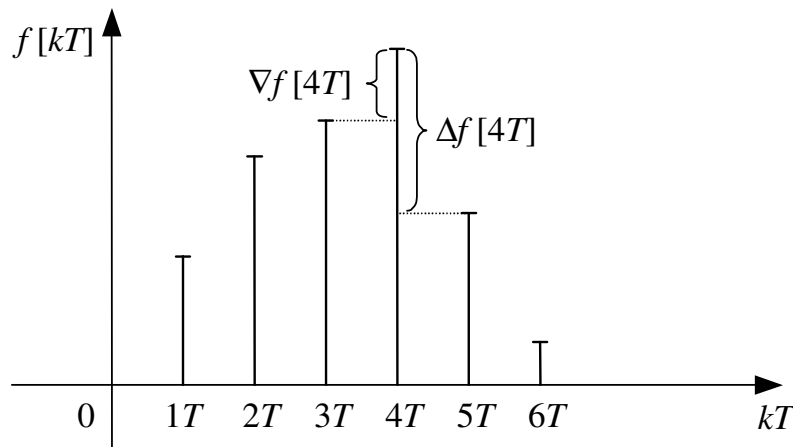


Рис. 3.4. Геометрична інтерпретація відмінності між прямою $\Delta f[kT]$ та оберненою $\nabla f[kT]$ скінченними різницями першого порядку у точці з аргументом $kT = 4T$

За аналогією з (3.12) визначається і обернена скінченна різниця $\nabla^n f[kT]$ порядку n :

$$\begin{aligned}\nabla^n f[kT] &= \nabla^{n-1} f[kT] - \nabla^{n-1} f[(k-1)T], \\ n &= 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{3.15}$$

де, як і в (3.13),

$$\begin{cases} \nabla^0 f[kT] = f[kT], \\ \nabla^0 f[(k-1)T] = f[(k-1)T]. \end{cases}\tag{3.16}$$

При $n = 2$ із формули (3.15) отримаємо:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f[kT] &= \nabla f[kT] - \nabla f[(k-1)T], \\ k &= 2, 3, 4, \dots,\end{aligned}\tag{3.17}$$

або з урахуванням (3.14):

$$\begin{aligned}\nabla^2 f[kT] &= f[kT] - 2f[(k-1)T] + f[(k-2)T], \\ k &= 2, 3, 4, \dots\end{aligned}\tag{3.18}$$

Як приклад знайдемо $\Delta f[kT]$, $\Delta^2 f[kT]$ та $\nabla f[kT]$, $\nabla^2 f[kT]$ для решітчастих функцій $f_1[kT]$, $f_2[kT]$, визначених формулами (3.4) та (3.7).

Для функції $f_1[kT]$:

$$\begin{aligned}\Delta f_1[kT] &= f_1[(k+1)T] - f_1[kT] = k+1-4 - (k-4) = 1, \\ k &= 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_1[kT] &= f_1[(k+2)T] - 2f_1[(k+1)T] + f_1[kT] = \\ &= k+2-4 - 2((k+1)-4) + (k-4) = \\ &= k+2-4 - 2k-2+8+k-4 = 0, \\ k &= 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\nabla f_1[kT] &= f_1[kT] - f_1[(k-1)T] = k-4 - (k-1-4) = 1, \\ k &= 1, 2, 3, \dots,\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_1[kT] &= f_1[kT] - 2f_1[(k-1)T] + f_1[(k-2)T] = \\ &= k-4 - 2((k-1)-4) + (k-2-4) = \\ &= k-4 - 2k+2+8+k-2-4 = 0, \\ k &= 2, 3, 4, \dots\end{aligned}\tag{3.22}$$

Для функції $f_2[kT]$:

$$\begin{aligned}\Delta f_2[kT] &= f_2[(k+1)T] - f_2[kT] = 0,75(k+1)^2 + 2 - (0,75k^2 + 2) = \\ &= 0,75k^2 + 1,5k + 0,75 + 2 - 0,75k^2 - 2 = 1,5k + 0,75, \quad (3.23) \\ &k = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_2[kT] &= f_2[(k+2)T] - 2f_2[(k+1)T] + f_2[kT] = \\ &= 0,75(k+2)^2 + 2 - 2(0,75(k+1)^2 + 2) + 0,75k^2 + 2 = \\ &= 0,75k^2 + 3k + 3 + 2 - 1,5k^2 - 3k - 1,5 - 4 + 0,75k^2 + 2 = 1,5, \quad (3.24) \\ &k = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla f_2[kT] &= f_2[kT] - f_2[(k-1)T] = 0,75k^2 + 2 - (0,75(k-1)^2 + 2) = \\ &= 0,75k^2 + 2 - 0,75k^2 + 1,5k - 0,75 - 2 = 1,5k - 0,75, \quad (3.25) \\ &k = 1, 2, 3, \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_2[kT] &= f_2[kT] - 2f_2[(k-1)T] + f_2[(k-2)T] = \\ &= 0,75k^2 + 2 - 2(0,75(k-1)^2 + 2) + 0,75(k-2)^2 + 2 = \\ &= 0,75k^2 + 2 - 1,5k^2 + 3k - 1,5 - 4 + 0,75k^2 - 3k + 3 + 2 = 1,5, \quad (3.26) \\ &k = 2, 3, 4, \dots\end{aligned}$$

Як видно з отриманих результатів, скінченні різниці першого порядку від лінійної решітчастої функції є константами, а другого порядку дорівнюють нулю. Нагадаємо, що і перша похідна від лінійної неперервної функції є константою, а друга похідна теж дорівнює нулю. Така ж аналогія спостерігається і між решітчастою та неперервною квадратичними функціями.

3.2. Рівняння в скінченних різницях та різницеві рівняння

В попередньому підрозділі ми встановили, що аналогом похідної l -го порядку, де $l = 1, 2, \dots, n$, для решітчастої функції $f[kT]$ є пряма $\Delta^l f[kT]$ та обернена $\nabla^l f[kT]$ скінченні різниці того ж порядку.

Очевидним наслідком цієї аналогії є те, що для решітчастих функцій $x[kT]$ та $y[kT]$ можна сконструювати рівняння в скінченних різницях

$\Delta^l y[kT]$ ($l=1, 2, \dots, n$), $\Delta^q x[kT]$ ($q=1, 2, \dots, m$) або $\nabla^l y[kT]$ ($l=1, 2, \dots, n$), $\nabla^q x[kT]$ ($q=1, 2, \dots, m$), яке буде аналогом диференціального рівняння відносно породних функцій $y(t)$, $x(t)$ та їх похідних $y^{(l)}(t)$ ($l=1, 2, \dots, n$), $x^{(q)}(t)$ ($q=1, 2, \dots, m$).

Покажемо на прикладі як можна побудувати дискретний аналог диференціального рівняння.

Нехай ми маємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 2y = 2x \quad (3.27)$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \quad (3.28)$$

Нехай T — період дискретності функцій $x(t)$, $y(t)$ для породження решітчастих функцій $x[kT]$, $y[kT]$.

Нагадаємо, що аргументи t і k пов'язані між собою співвідношенням:

$$t_k = kT. \quad (3.29)$$

Зрозуміло, що похідній $\frac{dy}{dt}$, яку маємо у рівнянні (3.27), в його дискретному аналізі відповідатиме вираз

$$\frac{\Delta y[kT]}{\Delta t_k} = \frac{\Delta y[kT]}{(k+1)T - kT} = \frac{\Delta y[kT]}{T}, \quad (3.30)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

а другій похідній — вираз

$$\frac{\Delta^2 y[kT]}{(\Delta t_k)^2} = \frac{\Delta^2 y[kT]}{T^2}, \quad (3.31)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Підставляючи (3.29) – (3.31) у рівняння (3.27), (3.28), отримаємо:

$$\frac{\Delta^2 y[kT]}{T^2} + 4 \frac{\Delta y[kT]}{T} + 2y[kT] = 2x[kT], \quad (3.32)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{cases} y[0] = 0, \\ \frac{\Delta y[0]}{T} = 1 \end{cases} \quad (3.33)$$

або

$$\Delta^2 y[kT] + 4T\Delta y[kT] + 2T^2 y[kT] = 2T^2 x[kT], \quad (3.34)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{cases} y[0] = 0, \\ \Delta y[0] = T. \end{cases} \quad (3.35)$$

Зрозуміло, що чим меншим буде значення періоду дискретності T , тим менше будуть відрізнятися один від одного значення t_k та t_{k+1} або t_{k-1} і, як наслідок, ближчими до розв'язку $y(t)$ диференціального рівняння (3.27) у точках t_k будуть розв'язки $y[kT]$ рівняння в скінченних різницях (3.34).

Найбільш просто рівняння (3.34) розв'язується шляхом перетворення його в різницеве, яке містить у собі не скінченні різниці, а значення решітчастих функцій, взятих при декількох значеннях аргументу.

Для здійснення цього перетворення необхідно у рівняннях (3.34), (3.35) замість скінченних різниць $\Delta y[kT]$, $\Delta^2[kT]$, підставити їхні значення, взяті з формул (3.9), (3.11).

Здійснивши це, отримаємо:

$$y[(k+2)T] - 2y[(k+1)T] + y[kT] + 4T(y[(k+1)T] - y[kT]) + 2T^2 y[kT] = 2T^2 x[kT], \quad (3.36)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{cases} y[0] = 0, \\ y[1 \cdot T] - y[0] = T \end{cases} \quad (3.37)$$

або

$$y[(k+2)T] = 2T^2 x[kT] - (4T-2)y[(k+1)T] - (2T^2 - 4T + 1)y[kT], \quad (3.38)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{cases} y[0] = 0, \\ y[1 \cdot T] - y[0] = T. \end{cases} \quad (3.39)$$

Вибравши конкретне значення T та сформувавши із заданої функції $x(t)$ решітчасту $x[kT]$, шляхом підстановки по черзі $k=0$, потім $k=1$ і так далі у рівняння (3.38) отримаємо стільки значень розв'язку $y[kT]$, скільки нам треба.

Отримати різницеве рівняння через обернені скінченні різниці $\nabla y[kT]$ та $\nabla^2 y[kT]$ пропонуємо самостійно як завдання на закріплення матеріалу. Також, пропонуємо перетворити у різницеве довільне диференціальне рівняння третього порядку із самостійно заданими коефіцієнтами, початковими умовами та правою частиною.

3.3. Дискретне перетворення Лапласа та Z-перетворення

У другому розділі було показано, що лінійні диференціальні рівняння можна розв'язувати не лише безпосередньо, але й завдяки попередньому їх перетворенню в алгебраїчні рівняння комплексної змінної із застосуванням прямого та оберненого перетворень Лапласа.

Покажемо, що аналогічну процедуру ми можемо застосувати і до різницевих рівнянь.

Нехай $y[kT]$ ($k=0, 1, 2, \dots$) є решітчастою функцією, породженою неперервною функцією-оригіналом $y(t)$ з періодом дискретності T , для якої, як відомо, справедливо:

$$y(t) = \begin{cases} y(kT), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (3.40)$$

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt. \quad (3.41)$$

Оскільки

$$\begin{cases} t_k = kT, \\ dt \cong T, \end{cases} \quad (3.42)$$

то інтеграл у (3.41) можна з деякою похибкою, яка зменшується із зменшенням значення T , записати у вигляді суми

$$Y^*(p) \cong \sum_{k=0}^{\infty} y(t_k) e^{-pt_k} T, \quad (3.43)$$

або

$$Y^*(p) \cong T \sum_{k=0}^{\infty} y[kT] e^{-pkT}. \quad (3.44)$$

Введемо нову комплексну змінну q у такий спосіб

$$q = pT \quad (3.45)$$

і запишемо суму, яка стоїть у правій частини виразу (3.44), у вигляді:

$$Y(q) = \sum_{k=0}^{\infty} y[kT] e^{-qk}. \quad (3.46)$$

Формула (3.46) задає дискретне перетворення Лапласа $Y(q)$ решітчастої функції $y[kT]$.

Приклад: у попередньому розділі ми знайшли (див. формулу (2.27)), що зображенням за Лапласом експоненціальної функції

$$f(t) = e^{-\alpha t} \quad (3.47)$$

є функція

$$F(p) = \frac{1}{p + \alpha}. \quad (3.48)$$

Знайдемо дискретне зображення за Лапласом решітчастого аналога

$$f[kT] = e^{-\alpha kT} \quad (3.49)$$

цієї експоненти, використавши формулу (3.46).

$$\begin{aligned}
F(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] e^{-qk} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k T} \cdot e^{-qk} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\alpha T + q)k} = \\
&= 1 + e^{-(\alpha T + q)} + e^{-2(\alpha T + q)} + \dots = \\
&= \frac{1}{1 - e^{-(\alpha T + q)}} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} \cdot e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - e^{-\alpha T}}. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Нагадаємо, що у перетвореннях (3.50) ми використали формулу суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником $e^{-(\alpha T + q)}$.

Порівнюючи формули (3.48) та (3.50), бачимо, що зображення за Лапласом навіть неперервної експоненти є набагато простішим за своєю структурою, аніж аналогічне зображення її решітчастого аналога. Для більш складних функцій громіздкість зображень за Лапласом їх решітчастих аналогів суттєво наростає.

Ось чому сьогодні дискретне перетворення за Лапласом повністю витіснене з практики аналізу дискретних систем більш простим Z-перетворенням, яке отримується шляхом заміни у формулі (3.46)

$$z = e^q, \tag{3.51}$$

тобто

$$Z\{y[kT]\} = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[kT] z^{-k}. \tag{3.52}$$

Прямою підстановкою (3.51) у (3.50) знайдемо, що Z-перетворення решітчастої експоненти має вигляд:

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}. \tag{3.53}$$

Порівнюючи (3.53) з (3.48), бачимо, що вони мають однакову структуру — і у першому, і у другому випадках ми маємо дробово-раціональні функції, які є відношеннями поліномів у одному випадку за степенями p , а у другому — за z .

Слід пам'ятати, що $e^{-\alpha T}$ за заданих α і T — це є число, наприклад

при $\alpha = 1$ і $T = 2$ — це 0,135.

Як ще один приклад знайдемо Z-перетворення одиничної решітчастої функції $1[kT]$, $k = 0, 1, \dots$

Оскільки одиничну функцію $1(t)$ можна отримати з експоненти $e^{-\alpha T}$, поклавши $\alpha = 0$, то одинична решітчаста функція $1[kT]$ є теж окремим випадком решітчастої експоненти при $\alpha = 0$. А тому для отримання Z-перетворення $1[kT]$ достатньо покласти у формулі (3.53) $\alpha = 0$. Таким чином:

$$Z \{1[kT]\} = 1(z) = \frac{z}{z-1}. \quad (3.54)$$

У справедливості формули (3.54) легко пересвідчитись і за допомогою основної формули (3.52) Z-перетворення, підставляючи $y[kT] = 1[kT]$ і знаходячи суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії із знаменником z^{-1} .

Оскільки оператор Z-перетворення ми отримали з перетворення Лапласа шляхом двох лінійних підстановок, всі властивості перетворення Лапласа справедливі і для Z-перетворення, наприклад:

$$Z \{f_1[kT] + f_2[kT]\} = Z \{f_1[kT]\} + Z \{f_2[kT]\}, \quad (3.55)$$

$$Z \{\alpha f_1[kT]\} = \alpha Z \{f_1[kT]\}, \quad (3.56)$$

де α – число, значення якого не залежить від аргументу kT функції $f_1[kT]$.

Під час Z-перетворення різницевих рівнянь доводиться знаходити Z-зображення зсунутих вправо чи вліво значень решітчастих функцій, відносно яких ці рівняння складені, а тому побудуємо алгоритми їх знаходження.

Спочатку розглянемо зсув вправо:

$$Z \{y[(k+1)T]\} = \sum_{k=0}^{\infty} y[(k+1)T] z^{-k}. \quad (3.57)$$

Нехай $k + 1 = m$, тоді:

$$\begin{aligned} Z \{y[(k + 1)T]\} &= \sum_{m=1}^{\infty} y[mT] z^{-(m-1)} = z \cdot \sum_{m=1}^{\infty} y[mT] z^{-m} = \\ &= z \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} y[mT] z^{-m} - y[0] \right) = z \cdot (Y(z) - y[0]). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Аналогічно:

$$Z \{y[(k + 2)T]\} = \sum_{k=0}^{\infty} y[(k + 2)T] z^{-k}. \quad (3.59)$$

Тепер нехай $m = k + 2$, тоді:

$$\begin{aligned} Z \{y[(k + 2)T]\} &= \sum_{m=2}^{\infty} y[mT] z^{-(m-2)} = \\ &= z^2 \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} y[mT] - y[0] - y[1 \cdot T] z^{-1} \right) = \\ &= z^2 \cdot (Y(z) - y[0] - y[1 \cdot T] z^{-1}). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Узагальнюючи (3.58) та (3.60), отримуємо для довільного n :

$$Z \{y[(k + n)T]\} = z^n \cdot (Y(z) - y[0] - y[1 \cdot T] z^{-1} - \dots - y[(n - 1)T] z^{-(n-1)}). \quad (3.61)$$

Тепер розглянемо зсув вліво:

$$Z \{y[(k - 1)T]\} = \sum_{k=0}^{\infty} y[(k - 1)T] z^{-k}. \quad (3.62)$$

Нехай $k - 1 = m$, тоді:

$$\begin{aligned} Z \{y[(k - 1)T]\} &= \sum_{m=-1}^{\infty} y[mT] z^{-(m+1)} = \\ &= z^{-1} \cdot \left(y[-1 \cdot T] \cdot z + \sum_{m=0}^{\infty} y[mT] z^{-m} \right) = z^{-1} \cdot (0 + Y(z)) = z^{-1} \cdot Y(z). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Виводячи формулу (3.63), ми використали властивість оригіналу бути рівним нулю за від'ємних значеннях аргументу.

Аналогічно:

$$Z \{y[(k - 2)T]\} = \sum_{k=0}^{\infty} y[(k - 2)T] z^{-k}. \quad (3.64)$$

Нехай $k - 2 = m$, тоді:

$$\begin{aligned} Z \{y[(k-2)T]\} &= \sum_{m=-2}^{\infty} y[mT] z^{-(m+2)} = \\ &= z^{-2} \cdot \left(y[-2 \cdot T] \cdot z^2 + y[-1 \cdot T] \cdot z^1 + \sum_{m=0}^{\infty} y[mT] z^{-m} \right) = \\ &= z^{-2} \cdot (0 + 0 + Y(z)) = z^{-2} \cdot Y(z). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Узагальнюючи (3.63) та (3.65), отримуємо для довільного n :

$$Z \{y[(k-n)T]\} = z^{-n} \cdot Y(z). \quad (3.66)$$

Порівнюючи вирази (3.61) і (3.66), приходимо до висновку, що за допомогою Z-перетворення доцільніше розв'язувати різницеві рівняння, які конструюються із диференціальних шляхом застосування обернених скінченних різниць.

Якщо ж різницеве рівняння сконструйоване із диференціального за допомогою прямих скінченних різниць, то його доцільніше розв'язувати рекурентною (крок за кроком) процедурою, аналогічною (3.38).

На конкретному прикладі розглянемо процедуру Z-перетворення різницевого рівняння та алгоритм його розв'язання у цій області.

Нехай математична модель дискретної системи має вигляд:

$$\begin{aligned} y[kT] + 2y[(k-1)T] + 4y[(k-2)T] &= 2x[kT] - x[(k-1)T], \\ k &= 2, 3, 4, \dots, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{cases} x[-1 \cdot T] = 0, \\ y[-2 \cdot T] = y[-1 \cdot T] = 0. \end{cases} \quad (3.68)$$

Знайдемо Z-перетворення рівняння (3.67) за початкових умов (3.68).

Записуючи спочатку формально,

$$Z \{y[kT] + 2y[(k-1)T] + 4y[(k-2)T]\} = Z \{2x[kT] - x[(k-1)T]\}, \quad (3.69)$$

та враховуючи лінійні властивості Z-перетворення (3.55), (3.56), отримаємо:

$$\begin{aligned} Z \{y[kT]\} + 2Z \{y[(k-1)T]\} + 4Z \{y[(k-2)T]\} &= \\ &= 2Z \{x[kT]\} - Z \{x[(k-1)T]\}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Із (3.70) з урахуванням (3.52), (3.63), (3.65) випливає:

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + 4z^{-2}Y(z) = 2X(z) - z^{-1}X(z) \quad (3.71)$$

або

$$Y(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}} X(z), \quad (3.72)$$

або

$$Y(z) = W(z)X(z), \quad (3.73)$$

де

$$W(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}} \quad (3.74)$$

— дискретна передаточна функція динамічної системи, що описується різницеvim рівнянням (3.67).

Нехай $x[kT] = 1[kT]$, тоді згідно з (3.54)

$$X(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}. \quad (3.75)$$

Підставляючи (3.75) у (3.72), отримаємо:

$$Y(z) = \frac{2 - z^{-1}}{(1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}) \cdot (1 - z^{-1})} = \frac{2 - z^{-1}}{1 + z^{-1} + 2z^{-2} - 4z^{-3}}. \quad (3.76)$$

Як і під час використання звичайного перетворення Лапласа, де для знаходження оригіналу за відомим зображенням використовується або процедура взяття оберненого інтеграла на основі теореми про лишки, або одна із формул розкладання, існує декілька процедур знаходження решітчастих оригіналів за їх відомим Z-зображенням. Але у практиці перевагу віддають найпростішій процедурі, яка полягає у діленні багаточлена на багаточлен.

Якщо розписати суму у формулі Z-перетворення в (3.52), то отримаємо:

$$Y(z) = y[0] + y[1 \cdot T]z^{-1} + y[2 \cdot T]z^{-2} + y[3 \cdot T]z^{-3} + \dots \quad (3.77)$$

Із виразу (3.77) видно, що коефіцієнти при степенях z^{-k} ($k = 0, 1, \dots$) і є значеннями решітчастої функції $y[kT]$, яка є оригіналом для Z-зображення $Y(z)$.

А до форми (3.77) дробово-раціональна функція, яка є відношенням двох багаточленів, приводиться діленням чисельника на знаменник і взяттям такої кількості членів ряду, яка необхідна за умовами розв'язання.

Застосуємо описану процедуру до виразу (3.76):

$$\begin{array}{r|l}
 2 - z^{-1} & 1 + z^{-1} + 2z^{-2} - 4z^{-3} \\
 (-) & \hline
 2 + 2z^{-1} + 4z^{-2} - 8z^{-3} & 2 - 3z^{-1} - z^{-2} + 15z^{-3} - 25z^{-4} - \dots \\
 \hline
 & -3z^{-1} - 4z^{-2} + 8z^{-3} \\
 (-) & \\
 & -3z^{-1} - 3z^{-2} - 6z^{-3} + 12z^{-4} \\
 \hline
 & -z^{-2} + 14z^{-3} - 12z^{-4} \\
 (-) & \\
 & -z^{-2} - z^{-3} - 2z^{-4} + 4z^{-5} \\
 \hline
 & 15z^{-3} - 10z^{-4} - 4z^{-5} \\
 (-) & \\
 & 15z^{-3} + 15z^{-4} + 30z^{-5} - 60z^{-6} \\
 \hline
 & -25z^{-4} - 34z^{-5} + 60z^{-6} \\
 (-) & \\
 & -25z^{-4} - 25z^{-5} - 50z^{-6} + 100z^{-7} \\
 \hline
 & -9z^{-5} + 110z^{-6} - 100z^{-7}.
 \end{array}$$

Зупинившись на цьому кроці, $Y(z)$, що задано виразом (3.76), можна записати у такий спосіб:

$$Y(z) = 2 - 3z^{-1} - z^{-2} + 15z^{-3} - 25z^{-4} + \frac{-9z^{-5} + 110z^{-6} - 100z^{-7}}{1 + z^{-1} + 2z^{-2} - 4z^{-3}}. \quad (3.78)$$

Порівнюючи (3.77) та (3.78), знаходимо п'ять перших значень решітчастої функції $y[kT]$, яка є оригіналом для Z-зображення $Y(z)$, визначеного формулою (3.76):

$$\begin{aligned} y[0] &= 2, \\ y[1 \cdot T] &= -3, \\ y[2 \cdot T] &= -1, \\ y[3 \cdot T] &= 15, \\ y[4 \cdot T] &= -25. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Оскільки процес ділення багаточлена на багаточлен легко алгоритмізується, то на комп'ютері дуже швидко можна отримати яку завгодно сукупність значень решітчастого оригіналу, час отримання якої обмежується, фактично, лише часом виведення цієї сукупності значень за допомогою принтера на папір.

3.4. Побудова різницевої моделі детермінованої САЕП із зосередженими параметрами

На рис. 1.3 подана схема САЕП на основі системи ТП-Д.

Оскільки кут α затримки відкриття тиристорів встановлюється блоком СІФУ в імпульсному режимі один раз за період пульсації випрямленої тиристорним перетворювачем ТП напруги, то ця система автоматизованого електропривода відноситься до класу дискретних систем, а тому її математичну модель необхідно синтезувати із застосуванням решітчастих функцій.

На рис. 3.5 показана функціональна схема цієї САЕП, але без елеме-

нтів та зв'язків, які відіграють допоміжну роль і безпосередньо на синтез моделі не впливають.

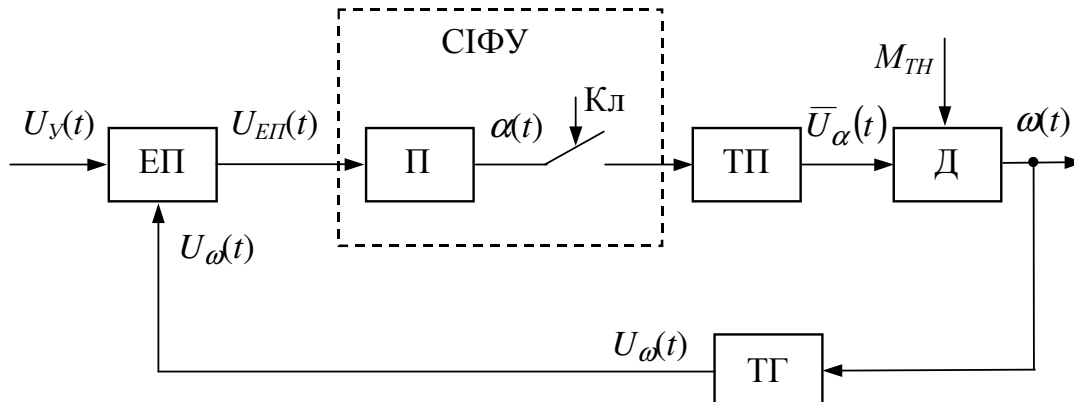


Рис. 3.5. Функціональна схема САЕП на основі системи ТП-Д, показаної на рис. 1.3

Нагадаємо, що:

ЕП – це електронний підсилювач;

СІФУ – система імпульсно-фазового управління;

ТП – тиристорний перетворювач;

Д – електричний двигун;

ТГ – тахогенератор;

Кл – ключ;

П – перетворювач напруги $U_{ЕП}$ в кут затримки α ;

U_y – напруга на вході ЕП, якою задається закон управління кутовою швидкістю ω обертання вала Д;

U_ω – напруга на виході ТГ, пропорційна кутовій швидкості ω ;

\bar{U}_α – напруга постійного струму на виході ТП, яка залежить від значення кута затримки α ;

M_{TH} – момент технологічного навантаження на вал Д.

З підрозділу 1.4 ми вже знаємо, що математичну модель електронного підсилювача можна подати у вигляді:

$$U_{EП}(t) = k_{EП} \cdot (U_Y(t) - U_\omega(t)), \quad (3.80)$$

де $k_{EП}$ — коефіцієнт підсилення ЕП.

Знаємо ми з підрозділу 1.2 і математичну модель електричного двигуна з незалежним збудженням:

$$\bar{U}_\alpha(t) = E_D(t) + R_Y I_Y(t), \quad (3.81)$$

$$E_D(t) = k_\omega \cdot \omega(t), \quad (3.82)$$

$$M_D(t) = k_I \cdot I_Y(t), \quad (3.83)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M_D(t) - M_{TH}(t), \quad (3.84)$$

якій відповідає структурна схема, зображена на рис. 1.8.

З підрозділу 1.6 ми знаємо, що для тахогенератора ТГ справедлива залежність

$$U_\omega(t) = k_{ТГ} \cdot \omega(t). \quad (3.85)$$

А з підрозділу 1.5 нам відомо, що

$$\bar{U}_\alpha(t) = f(\alpha(t)), \quad (3.86)$$

$$\alpha(t) = \varphi(U_{EП}(t)). \quad (3.87)$$

У рівняннях (3.80) – (3.85) нам всі коефіцієнти відомі.

Тож для визначення повної математичної моделі САЕП, показаної на рис. 3.5, нам залишилось лише розкрити суть функцій $f(\alpha(t))$ і $\varphi(U_{EП}(t))$ у співвідношеннях (3.86), (3.87) та з'ясувати вплив на них ключа Кл.

Із рис. 3.5 видно, що залежність (3.87) реалізує СІФУ, а (3.86) — ТП.

Із фізики процесів у САЕП випливає, що ключ Кл замикається один раз за період T випрямленої напруги \bar{U}_α , який для мостової схеми Ларіонова і частоти струму 50 Гц можна знайти із співвідношення

$$\omega T = \frac{2\pi}{3} \quad (3.88)$$

шляхом його приведення до вигляду:

$$T = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{2\pi}{3 \cdot 2\pi f} = \frac{1}{3f} = \frac{1}{150} \text{ (с)}. \quad (3.89)$$

Зрозуміло, що моменти замикання ключа Кл не є фіксованими на період T , а залежать від значення $U_{ЕП}$, яке формує кут затримки α . У той же час, для використання решітчастих функцій нам необхідно, щоб період дискретності аргументу функції, яка породжує решітчасту, був величиною сталою протягом всього відрізка часу спостереження процесів у САЕП.

Графік залежності $\alpha = \varphi(U_{ЕП})$ у статичному режимі (без врахування часу) має вигляд, наведений на рис. 3.6.

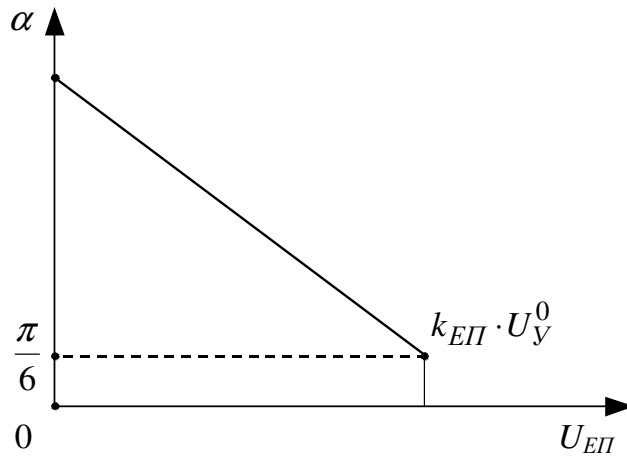


Рис. 3.6. Статична характеристика СІФУ

Цю залежність для $\alpha \geq \frac{\pi}{6}$ можна записати як:

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{k_{ЕП} U_Y^0} U_{ЕП} \right) + \frac{\pi}{6}. \quad (3.91)$$

Із (1.25), (1.26) випливає, що статична характеристика $\bar{U}_\alpha = f(\alpha)$ ТП для $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ у лінійному наближенні має вигляд (рис. 3.7):

$$\bar{U}_\alpha = \bar{U}_0 \left[1 - \frac{3}{2\pi} \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \right]. \quad (3.92)$$

Тож, якщо під час аналізу ми крім статичних характеристик

$\alpha = \varphi(U_{EII})$, $\bar{U}_\alpha = f(\alpha)$ і ключа Кл, за допомогою якого $\alpha(t)$ перетворюється в $\alpha[kT]$ ($k = 0, 1, \dots$), використаємо ще й фіксатор нульового порядку, який на k -ому кроці запам'ятовує імпульс ключа Кл, пропорційний значенню α_k , впродовж усього періоду дискретності T , то наша дискретна математика буде досить адекватно віддзеркалювати процеси, які протікатимуть у САЕП.

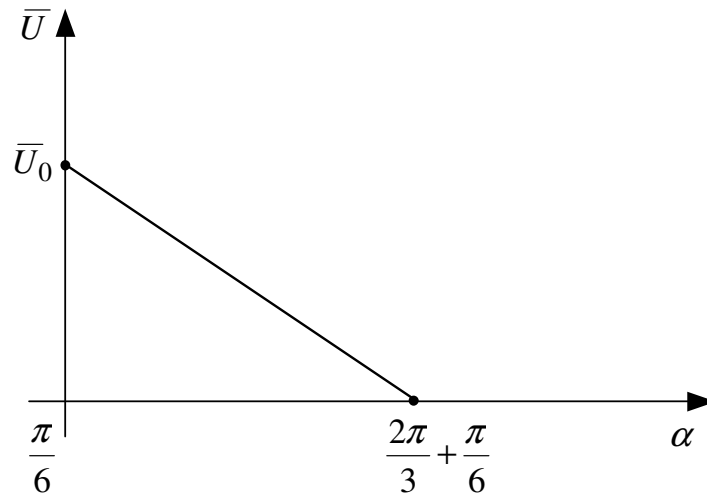


Рис. 3.7. Лінійне наближення статичної характеристики ТП

Математична модель фіксатора нульового порядку за період T має вигляд:

$$\alpha_k^T(t) = \alpha[kT] \cdot \{1(t - kT) - 1(t - [k+1]T)\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.93)$$

а графік — такий, як на рис. 3.8.

Слід зазначити, що як окремого елемента фіксатора нульового порядку у схемі САЕП немає, його функцію виконують самі тиристори, котрі, відкриваючись під дією імпульсу СІФУ у момент kT при досягненні куту затримки значення $\alpha_k[kT]$, запам'ятовують це значення до появи наступного імпульсу у момент $[k+1]T$.

А оскільки у момент kT при визначенні напруги на виході тиристорів необхідно врахувати внески, викликані попередніми імпульсами від

СІФУ, то вихідний сигнал фіксатора нульового порядку, який вже є неперервним, у момент часу t слід визначати як суму внесків від кожного імпульсу, котрий надійшов на вхід фіксатора до цього моменту, тобто

$$\alpha_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha[kT] \cdot \{1(t - kT) - 1(t - [k+1]T)\}. \quad (3.94)$$

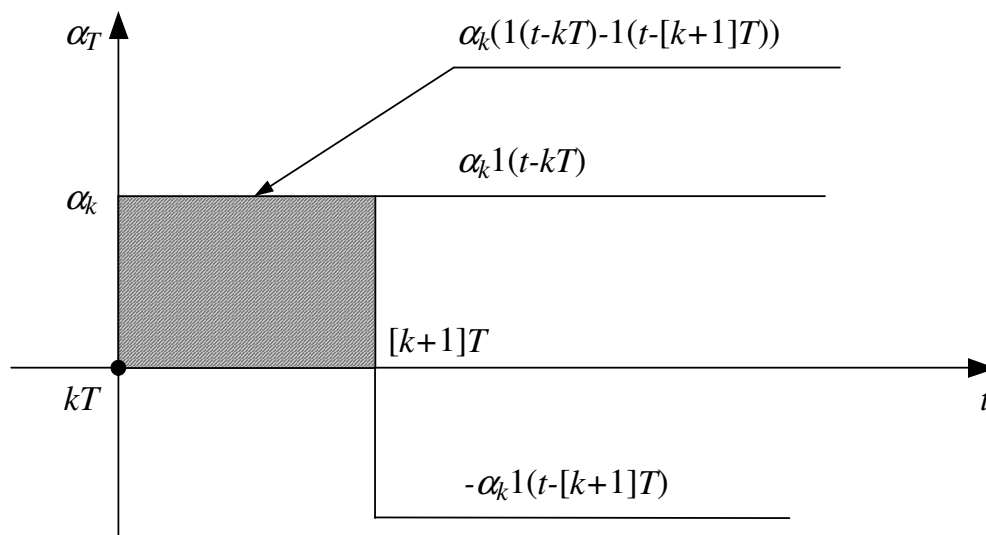


Рис. 3.8. Графік динамічної (яка характеризує зміни у часі) характеристики фіксатора нульового порядку

Щодо варіації кута затримки α відносно моменту ввімкнення ключа Кл, то вона враховується статичними характеристиками $\alpha = \varphi(U_{EП})$, $\bar{U}_\alpha = f(\alpha)$ СІФУ та ТП.

Але і співвідношень (3.91) – (3.94) та

$$\alpha[kT] = \alpha(t)|_{t=kT}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.95)$$

недостатньо для адекватного математичного опису процесів у СІФУ та ТП.

Справа у тому, що як на вході СІФУ процес $U_{EП}(t)$, так і на виході ТП процес $\bar{U}_\alpha(t)$ згладжуються відповідними фільтрами Φ_1 , Φ_2 , стаючи, відповідно, $U_{EП}^*(t)$ та $\bar{U}_\alpha^*(t)$, для яких справедливі диференціальні рівняння:

$$T_{RC} \frac{dU_{EП}^*(t)}{dt} + U_{EП}^*(t) = U_{EП}(t), \quad (3.96)$$

$$T_{RL} \frac{d\bar{U}_\alpha^*(t)}{dt} + \bar{U}_\alpha^*(t) = \bar{U}_\alpha(t), \quad (3.97)$$

в яких сталі часу

$$T_{RC} = \frac{1}{R_1 C_1}, \quad (3.98)$$

$$T_{RL} = \frac{L_2}{R_2} \quad (3.99)$$

визначаються відповідними еквівалентними омичними R_1 , R_2 та ємнісним C_1 і індуктивним L_2 параметрами.

Чим більші значення T_{RC} , T_{RL} , тим краще згладжуються процеси $U_{EП}(t)$, $\bar{U}_\alpha(t)$.

Основний внесок в еквівалентну ємність C_1 у фільтрі Φ_1 вносять конденсатори, які включаються у схему СІФУ, а основний внесок в індуктивність L_2 у фільтрі Φ_2 вносить реактор, який включається між схемою Ларіонова в системі ТП-Д та електричним двигуном Д.

Сукупність рівнянь, заданих співвідношеннями (3.80) – (3.99), і є математичною моделлю САЕП на основі ТП-Д із лінійно наближеними статичними характеристиками тиристорного перетворювача та СІФУ.

Слід зазначити, що рівняння (3.95), котре вірно відображає суть роботи ключа Кл, який формує решітчасту функцію $\alpha[kT]$ із неперервної $\alpha(t)$, є не досить зручним для його використання. А тому замість нього будемо використовувати його еквівалент, виражений через дельта-функцію $\delta(t)$, а саме:

$$\alpha[kT] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(t) \cdot \delta(t - kT). \quad (3.100)$$

Нагадаємо, що дельта-функція $\delta(t)$ — це ідеальний імпульс нескін-

ченно великої амплітуди та нескінченно малої тривалості, але із площею, яка дорівнює одиниці, тобто

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (3.101)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.102)$$

Фактично, рівняння (3.100), завдяки властивостям дельта-функції, задає послідовність імпульсів (3.95), які формуються у моменти часу $t_k = kT$ ідеальними імпульсами, зрізаними на рівні $\alpha[kT]$.

Структурна схема моделі, заданої рівняннями (3.80) – (3.100), зображена на рис. 3.9, на якій символом D позначений оператор диференціювання $\frac{d}{dt}$.

Задаючи закони зміни керувального сигналу $U_Y(t)$ і моменту навантаження на вал електродвигуна $M_{TH}(t)$ та числові параметри всіх елементів структурної схеми лінійної моделі САЕП, показаної на рис. 3.9, за допомогою одного з багатьох стандартних пакетів програм, розроблених для аналізу систем управління, отримаємо функцію $\omega(U_Y, M_{TH}, t)$, котра дає можливість зробити висновок, в яких режимах можна експлуатувати САЕП, в яких не бажано, а які не треба допускати ні в якому разі.

Ще раз нагадаємо, що запропонована модель адекватно віддзеркалює процеси у САЕП лише у випадку $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, оскільки лише за виконання цієї умови можна не враховувати нелінійний відрізок у межах від нуля до $\frac{\pi}{6}$ статичної характеристики ТП $\bar{U}_\alpha = f(\alpha)$ (рис. 1.23) та нелінійний відрізок при $U_{EP} \geq k_{EP} U_Y^0$ статичної характеристики СІФУ $\alpha = \varphi(U_{EP})$ (див. рис. 3.6).

Важливе зауваження: в теорії автоматичного керування під час

аналізу дискретних систем, як правило, прийнято використовувати поняття дискретної передаточної функції, приклад отримання якої наведений нами у підрозділі 3.3 (дивись вирази (3.73), (3.74)). Але за допомогою дискретної передаточної функції можна аналізувати лише лінійні дискретні системи, в той час як реальні дискретні системи є переважно нелінійними.

Оскільки в стандартних пакетах комп'ютерних програм аналізу систем автоматичного керування є достатньо таких, за допомогою яких ці системи (як в лінійному варіанті, так і в нелінійному) можна досліджувати після приведення їхніх структурних схем до вигляду, показаного на рис. 3.9, то, на наш погляд, сьогодні саме таким шляхом і потрібно йти у цьому напрямку.

Що ж до отримання дискретної передаточної функції САЕП, структурна схема якої показана на рис. 3.9, то її ми пропонуємо кожному отримати самостійно. Це стане критерієм засвоєння матеріалу цього розділу.

Як підказка вкажемо на таку послідовність дій:

1) записуємо звичайні передаточні функції для всіх недискретних елементів структурної схеми;

2) згортаємо ділянки з послідовним, паралельним з'єднанням елементів схеми і з'єднання зі зворотними зв'язками з обох боків дискретних елементів;

3) за згорнутими передаточними функціями ділянок записуємо їхні диференціальні рівняння;

4) перетворюємо усі диференціальні рівняння в різниціві;

5) записуємо дискретні передаточні функції як для ділянок, що описуються отриманими різницевиими рівняннями, так і для дискретних елементів структурної схеми;

6) згортаємо схему з дискретними передаточними функціями.

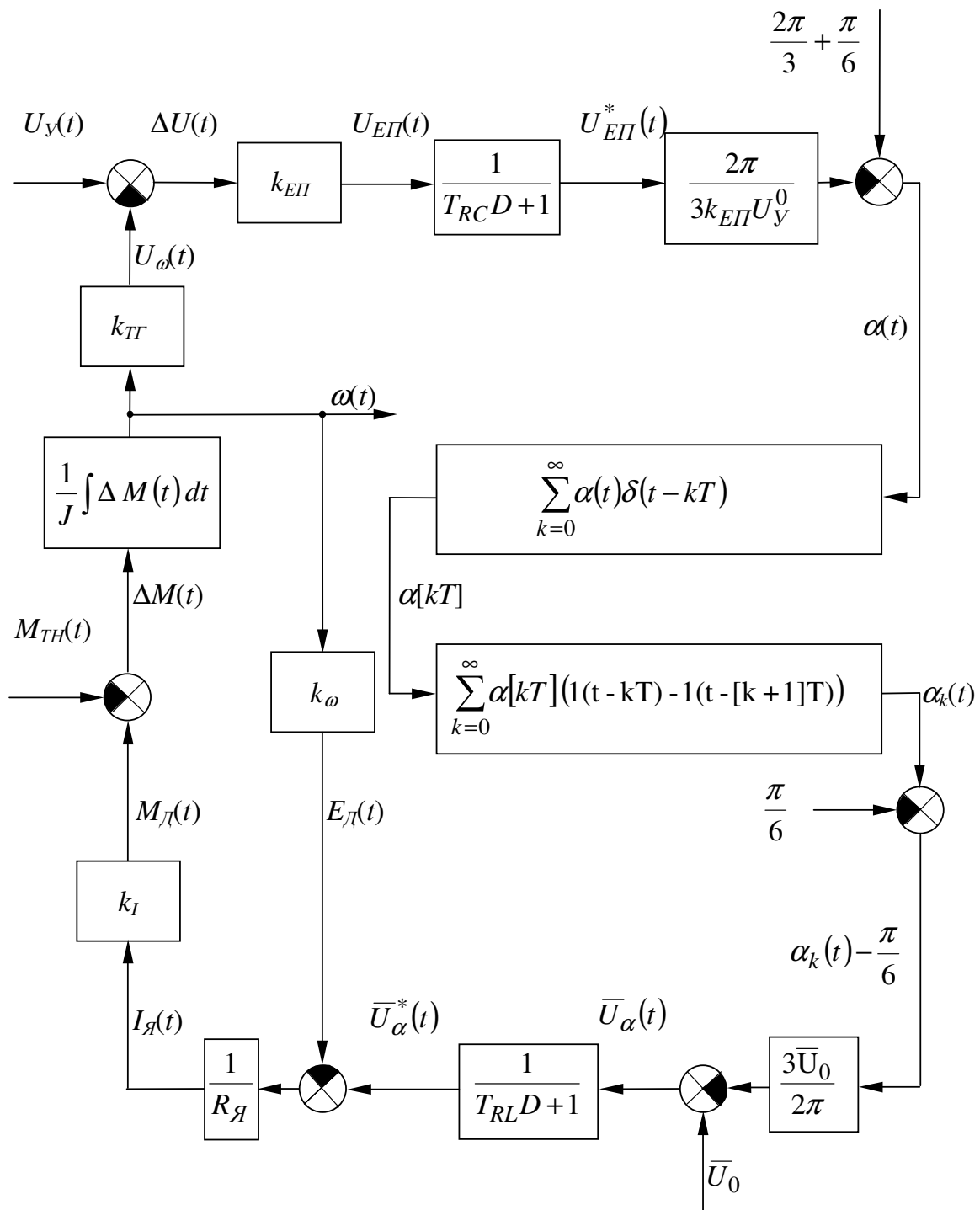


Рис. 3.9. Структурна схема лінійної моделі САЕП на основі системи

ТП-Д в області значень $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

3.5. Завдання для самоперевірки

1. Дайте означення решітчастої функції, наведіть приклад із побудовою графіка.
2. Що є аналогом похідної для решітчастих функцій?
3. Чому недостатньо лише прямої скінченної різниці для характеристики швидкості зміни решітчастої функції? Який вихід?
4. Чим відрізняється рівняння в скінченних різницях від різницевого рівняння?
5. Як за диференціальним рівнянням побудувати різницеве? Наведіть приклад.
6. Що таке дискретне перетворення Лапласа решітчастої функції? Наведіть приклад перетворення решітчастої функції.
7. Що таке Z-перетворення решітчастих функцій і чому виникає в ньому потреба? Наведіть приклад Z-перетворення решітчастої функції.
8. Які є способи отримання решітчастого оригіналу за заданим його Z-зображенням? Наведіть приклад отримання решітчастого оригіналу.
9. У чому полягає перевага використання обернених скінченних різниць під час застосування Z-перетворення для аналізу дискретних систем?
10. Побудуйте функціональну схему САЕП на основі системи ТП-Д із віднесенням її до класу дискретних систем.
11. Як знайти математичну модель неперервної частини дискретної САЕП на основі системи ТП-Д?
12. Побудуйте статичну характеристику блока тиристорних перетворювачів.
13. Побудуйте статичну характеристику СІФУ.
14. Як побудувати математичну модель дискретної частини дискретної САЕП на основі системи ТП-Д?

15. Що таке повна математична модель дискретної САЕП на основі системи ТП-Д у лінійному діапазоні зміни статичних характеристик блоків ТП та СІФУ?

16. Як здійснити аналіз електромеханічних процесів у дискретних САЕП за допомогою математичної моделі?

17. Як отримати дискретну передаточну функцію системи, що описується різницеvim рівнянням?

18. Як отримати дискретну передаточну функцію системи, частина елементів якої є неперервними, а частина — дискретними?

19. Отримайте дискретну передаточну функцію САЕП на основі системи ТП-Д по каналу керувального впливу.

20. Отримайте дискретну передаточну функцію САЕП на основі системи ТП-Д по каналу збурення, обумовленого змінами моменту навантаження.

4. ФУР'Є-ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.1. Вихідні передумови ФІМІ

Відомо, що сигнал $x(t)$, який діє на вході лінійної системи з імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$ (рис. 4.1), та реакція системи $y(t)$ на цей сигнал пов'язані між собою інтегралом згортки

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

або у більш загальному вигляді:

$$y = Ax, \quad (4.2)$$

де A – оператор системи.

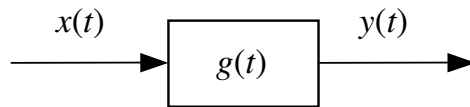


Рис. 4.1. Узагальнена структурна схема лінійної динамічної системи

Якщо моделі сигналів подати у вигляді рядів Фур'є з одним і тим же спектром частот, то кожен гармонічну складову сигналу $x(t)$ можна однозначно пов'язати із гармонічною складовою тієї ж частоти сигналу $y(t)$ алгебраїчним виразом, який містить у собі тільки коефіцієнти Фур'є сигналів $x(t)$, $y(t)$ та спектральні складові АФЧХ $\Phi(j\omega)$ системи на цій же частоті.

Які ж задачі можна розв'язувати за допомогою отриманих алгебраїчних виразів, використання яких у певних комбінаціях та у певній послідовності і являє собою Фур'є-інтегральний метод ідентифікації (ФІМІ) сигналів та систем?

Таких задач дві.

Задача ідентифікації системи. У цій задачі, відштовхнувшись від параметричного аналізу відомих сигналів $x(t)$ та $y(t)$, синтезується такий оператор системи A , який оптимальним чином (за деяким критерієм) віддзеркалює властивості системи як перетворювача сигналу $x(t)$ у сигнал $y(t)$.

Задача ідентифікації (відновлення) вхідного сигналу. Для розв'язання цієї задачі за допомогою ФІМІ синтезуються такі співвідношення, виходячи з яких за відомим вихідним сигналом $y(t)$ і заданим оператором A системи ідентифікуються (відновлюються) характеристики сигналу $x(t)$, який, подіявши на вхід цієї системи, викликав реакцію $y(t)$.

Виконанням же яких умов повинно супроводжуватись використання ФІМІ, або, що одне і те ж, — якими ж повинні бути вихідні передумови?

Для лінійних динамічних систем така передумова лише одна — сигнали $x(t)$, $y(t)$ повинні задовольняти умови Діріхле, щоб їх можна було розкласти у ряди Фур'є.

Ця передумова у реальних електромеханічних системах, запаси енергії в яких завжди обмежені, а тому амплітуди сигналів не можуть бути нескінченними, виконується завжди.

4.2. Синтез алгоритмів параметричної ідентифікації сигналів на вході лінійної вимірювальної системи

У більшості вимірювальних систем мають місце процеси перетворення електричної енергії у механічну або навпаки, якщо не впродовж усього каналу вимірювання, то, принаймні, хоча б на одній з його ділянок, а тому, розв'язуючи задачу синтезу алгоритмів параметричної ідентифікації сигналів на вході вимірювальної системи, ми залишаємось у визначеній нами у цьому посібнику області ідентифікації електромеханічних процесів.

Як відомо, в лінійних системах використовується лише лінійний відрізок характеристики “вхід – вихід”, тобто вони без будь-яких натяжок відносяться до класу лінійних динамічних систем.

Зосередженість параметрів вимірювальних систем теж не викликає сумнівів за умови, що до їх складу не відносять канал передачі вимірювальної інформації на значну відстань (про такі канали мова йтиме в 3-й частині посібника).

Для вимірювальних систем визначеного класу справедливим є інтегральне рівняння згортки (4.1). Якщо відрізок часу спостереження вихідного сигналу $y(t)$ дорівнює T , його можна подати на цьому відрізку у вигляді ряду Фур’є

$$y(t) = \frac{m_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} m_i \cos i\omega_1 t + \sum_{i=1}^{\infty} n_i \sin i\omega_1 t. \quad (4.3)$$

Не накладаючи умови — відомий чи ні нам вхідний сигнал $x(t)$, подамо його у вигляді ряду Фур’є на тому ж відрізку часу T :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\omega_1 t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin i\omega_1 t. \quad (4.4)$$

У виразах (4.3), (4.4)

$$m_i, i = \overline{0, \infty}; \quad n_i, i = \overline{1, \infty}; \quad a_i, i = \overline{0, \infty}; \quad b_i, i = \overline{1, \infty}$$

— коефіцієнти Фур’є сигналів $x(t)$, $y(t)$, які знаходяться за відомими формулами:

$$\begin{cases} a_i \\ m_i \end{cases} = \frac{2}{T} \int_0^T \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \cos i\omega_1 t dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} b_i \\ n_i \end{cases} = \frac{2}{T} \int_0^T \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \sin i\omega_1 t dt, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.6)$$

де $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ — частота першої гармоніки.

Підставляючи ряди (4.3) та (4.4) в інтеграл згортки (4.1), після низки нескладних перетворень, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{m_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} m_i \cos i\omega_1 t + \sum_{i=1}^{\infty} n_i \sin i\omega_1 t = \\ & = \frac{a_0}{2} R(0) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cdot R(i\omega_1) + b_i \cdot Q(i\omega_1)) \cos i\omega_1 t + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} (b_i \cdot R(i\omega_1) - a_i \cdot Q(i\omega_1)) \sin i\omega_1 t, \end{aligned} \quad (4.7)$$

де $R(i\omega_1)$, $Q(i\omega_1)$ – значення, відповідно, дійсної $R(\omega)$ та уявної $Q(\omega)$ частотних характеристик вимірювальної системи на частотах $i\omega_1$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Оскільки (4.7) — це тотожність, то справедливими є, по-перше, рівняння

$$a_0 R(0) = m_0 \quad (4.8)$$

для постійних складових a_0 , m_0 сигналів $x(t)$, $y(t)$, а, по-друге, система рівнянь

$$\begin{cases} a_i R(i\omega_1) + b_i Q(i\omega_1) = m_i, \\ b_i R(i\omega_1) - a_i Q(i\omega_1) = n_i, \end{cases} \quad (4.9)$$

де $i = 1, 2, \dots$, для всіх інших коефіцієнтів Фур'є a_i , b_i , m_i , n_i сигналів $x(t)$, $y(t)$.

З теорії рядів Фур'є та властивостей уявної частотної характеристики $Q(\omega)$ відомо, що

$$\begin{cases} b_0 = 0, \\ Q(0) = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

а тому рівняння (4.8) теж можна отримати із системи (4.9) при $i = 0$. Тож у подальшому будемо розглядати лише систему рівнянь (4.9), поклавши в ній: $i = 0, 1, 2, \dots$

Розв'яжемо цю систему відносно a_i , b_i . Отримаємо:

$$a_i = \frac{m_i R(i\omega_1) - n_i Q(i\omega_1)}{R^2(i\omega_1) + Q^2(i\omega_1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.11)$$

$$b_i = \frac{n_i R(i\omega_1) + m_i Q(i\omega_1)}{R^2(i\omega_1) + Q^2(i\omega_1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

Далі розв'язання задачі ідентифікації вхідного сигналу $x(t)$ вимірювальної системи можна здійснювати, використовуючи один із двох підходів.

Під час використання першого з підходів, який назвемо прямим, алгоритм розв'язання задачі містить такі етапи: спочатку за реалізацією вихідного сигналу $y(t)$, зафіксованою на відрізку часу T , за допомогою формул (4.5) і (4.6) визначаємо коефіцієнти Фур'є m_i , n_i цього сигналу для значень $i = \overline{0, N}$. Потім для цих же значень i за заданими частотними характеристиками $R(\omega)$, $Q(\omega)$ вимірювальної системи визначаємо їх значення на частотах $i\omega_1$, тобто $R(i\omega_1)$, $Q(i\omega_1)$. Підставляючи m_i , n_i , $R(i\omega_1)$, $Q(i\omega_1)$ у формули (4.11), (4.12), отримуємо для кожного значення i із множини $\overline{0, N}$ пару коефіцієнтів Фур'є a_i , b_i вхідного сигналу $x(t)$.

Підстановкою всіх цих коефіцієнтів в зрізаний ряд (4.4) ми і завершуємо розв'язання задачі ідентифікації (відновлення) вхідного сигналу $x(t)$ за вихідним сигналом $y(t)$ вимірювальної системи за допомогою прямого алгоритму. У цьому алгоритмі залишилось нез'ясованим одне важливе питання — а яку ж кількість гармонічних складових необхідно взяти в зрізаному ряді (4.4)? Іншими словами, яку потужність N повинна мати множина коефіцієнтів Фур'є параметрично ідентифікованого сигналу $x(t)$?

Для отримання відповіді на це питання використаємо встановлену математиками закономірність, яка полягає у тому, що коефіцієнти Фур'є довільного сигналу спадають у порядку, обернено пропорційному своєму номеру. Це означає, що спектр Фур'є-сигналу складають лише ті коефіцієнти, які задовольняють цю властивість.

Всі інші коефіцієнти Фур'є, що мають номери вищі від того, для якого порушується вищезначена умова, складають спектр завади.

Таким чином, число N гармонічних складових у вхідному сигналі $x(t)$ необхідно залишити, виходячи з того, на якому коефіцієнті починає порушуватись умова обернено пропорційного спаду коефіцієнтів Фур'є у порядку величини відносно свого номера.

Розглянутий прямий алгоритм ідентифікації вхідного сигналу $x(t)$ вимірювальної системи не можна віднести до класу оптимальних, оскільки під час його побудові не був використаний ніякий критерій оптимальності. Крім того, запропонований спосіб вибору потужності N множини коефіцієнтів Фур'є сигналу $x(t)$ дає, у загальному випадку, “розмите” значення цього числа.

Більш ефективний розв'язок поставленої задачі можна отримати, використовуючи другий підхід, який базується на алгоритмі оптимального відновлення сигналу $x(t)$.

Під час побудови оптимального алгоритму задачу відновлення також будемо розв'язувати, виходячи з рівнянь (4.9), але скористаємось ними не для отримання розрахункових співвідношень (4.11), (4.12), а для побудови критеріїв оптимальності:

$$\Sigma^m = \sum_{i=0}^l (m_i - a_i R(i\omega_1) - b_i Q(i\omega_1))^2, \quad (4.13)$$

$$\Sigma^n = \sum_{i=0}^l (n_i - b_i R(i\omega_1) + a_i Q(i\omega_1))^2. \quad (4.14)$$

Із цих виразів видно, що коефіцієнти a_i , b_i входять в кожне із критеріальних співвідношень (4.13), (4.14), а тому одне з них можна використати для чисельного визначення значень коефіцієнтів a_i , b_i вхідного сигналу $x(t)$, а друге — для визначення їх оптимальної кількості N .

Покажемо, як це зробити.

Візьмемо частинні похідні за a_i , b_i , $i = \overline{0, l}$ від Σ^m і прирівняємо їх нулю. Отримаємо систему $2l + 1$ нормальних рівнянь Гаусса:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma^m}{\partial a_i} = 0, & i = \overline{0, l}; \\ \frac{\partial \Sigma^m}{\partial b_i} = 0, & i = \overline{1, l} \end{cases} \quad (4.15)$$

для визначення $2l+1$ оцінок коефіцієнтів $a_0; a_1, b_1; \dots; a_l, b_l$, які позначимо індексними зірочками, тобто

$$a_0^*; a_1^*, b_1^*; a_2^*, b_2^*; \dots; a_l^*, b_l^*. \quad (4.16)$$

Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (4.15) одним із стандартних методів, отримаємо чисельні значення оцінок вищезначених коефіцієнтів.

Підставивши знайдені шляхом розв'язання системи (4.15) оцінки коефіцієнтів (4.16) у вираз (4.14), в який підставимо також знайдені раніше коефіцієнти Фур'є n_i , $i = \overline{0, l}$ вихідного сигналу $y(t)$, визначимо чисельне значення Σ^n , яке позначимо Σ_l^n .

Використовуючи ще один коефіцієнт Фур'є m_{l+1} вихідного сигналу $y(t)$ додамо до системи рівнянь (4.15) ще два рівняння

$$\frac{\partial \Sigma^m}{\partial a_{l+1}} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma^m}{\partial b_{l+1}} = 0. \quad (4.17)$$

Розв'язавши систему рівнянь (4.15), (4.17), отримаємо нові оцінки a_i^{**} , $i = \overline{0, l}$; b_i^{**} , $i = \overline{1, l}$ коефіцієнтів a_i, b_i , а також оцінки a_{l+1}^{**} , b_{l+1}^{**} коефіцієнтів a_{l+1}, b_{l+1} , які раніше не визначались.

Підставивши знайдені тепер уже шляхом розв'язання системи рівнянь (4.15), (4.17) оцінки всіх отриманих коефіцієнтів Фур'є вхідного сигналу $x(t)$ та значення коефіцієнтів n_i , $i = \overline{0, l+1}$ вихідного сигналу $y(t)$ у вираз (4.14), в якому верхню границю суми замінено з l на $l+1$, отримаємо нове чисельне значення Σ^n , яке позначимо Σ_{l+1}^n .

Повторюючи наведену вище процедуру для $l+2, l+3, \dots, l+q$, отримаємо відрізок числового ряду:

$$\Sigma_l^n, \Sigma_{l+1}^n, \Sigma_{l+2}^n, \dots, \Sigma_{l+q}^n, \quad (4.18)$$

найменший член якого

$$\Sigma_{l+p}^n = \min \quad (4.19)$$

визначає, згідно з основною ідеєю методу найменших квадратів, оптимальну кількість

$$N_{opt} = l + p \quad (4.20)$$

членів ряду Фур'є у виразі (4.4), яким задається математична модель вхідного сигналу $x(t)$.

У цій процедурі залишається нез'ясованим тільки одне питання: як вибрати значення l , з якого повинен починатись відрізок ряду (4.18)?

Для відповіді на це питання скористаємось критерієм спаду коефіцієнтів

$$c_k = \sqrt{m_k^2 + n_k^2} \quad (4.21)$$

вихідного сигналу $y(t)$ у порядку, обернено пропорційному своєму номеру k , про який вже йшла мова під час розгляду прямого алгоритму розв'язання задачі параметричної ідентифікації вхідного сигналу $x(t)$.

Визначивши номер k коефіцієнта Фур'є c_k , для якого порушується вищезначена умова, необхідно взяти значення l на 2–3 одиниці менше, тобто

$$l = k - 2(3). \quad (4.22)$$

Таке зміщення вліво початку процедури пошуку оптимальної кількості N_{opt} членів ряду Фур'є у моделі сигналу $x(t)$ забезпечує надійний і однозначний розв'язок задачі оптимального відновлення цього сигналу на множині коефіцієнтів Фур'є, які параметрично визначають даний сигнал.

Порівнюючи алгоритми прямого і оптимального відновлення вхідно-

го сигналу $x(t)$ вимірювальної системи за відомою її реакцією $y(t)$ на цей сигнал, можна відзначити:

- внаслідок незалежності обчислення кожного коефіцієнта Фур'є алгоритм прямого відновлення потребує об'єму пам'яті комп'ютера на 1–2 порядки меншого за той, який потрібен для реалізації оптимального алгоритму, котрий містить у собі процедуру розв'язання системи алгебраїчних рівнянь, порядок якої дорівнює числу необхідних для оптимальної параметричної ідентифікації сигналу $x(t)$ коефіцієнтів Фур'є;

- завдяки оптимальній процедурі пошуку кількості членів ряду Фур'є, яка забезпечує однозначно момент зупинки процесу побудови оптимальної моделі сигналу $x(t)$, оптимальний алгоритм відновлення розв'язує задачу із суттєво вищою точністю;

- і прямий, і оптимальний алгоритми розв'язують задачу відновлення вхідного сигналу $x(t)$ лише тоді, коли ширина частотного спектра вимірювальної системи більша ширини частотного спектра цього сигналу — лише у цьому випадку кожна гармонічна складова вхідного сигналу $x(t)$ знайде своє віддзеркалення у вихідному сигналі $y(t)$, і жодна з них не буде відфільтрована вимірювальною системою.

4.3. Побудова алгоритму параметричної ідентифікації лінійної динамічної системи за допомогою ФІМІ

Якщо задача відновлення сигналів $x(t)$ та $y(t)$, які фіксуються, відповідно, на вході та на виході електромеханічної системи, розв'язана за допомогою ФІМІ, то найбільш ефективним методом синтезу параметричної математичної моделі цієї системи є також ФІМІ.

Ефективність цього методу обумовлена перш за все тим, що коефіцієнти Фур'є сигналів $x(t)$, $y(t)$, які відновлюються за допомогою ФІМІ інформаційно-вимірювальними системами, безпосередньо використовують-

ся потім під час розв'язання задачі ідентифікації об'єкта цим же методом, а тому і етап відновлення сигналів, і етап ідентифікації об'єкта можуть бути реалізовані в одній і тій ж мікропроцесорній системі обробки вимірювальної інформації. Це суттєво зменшує кількість апаратних засобів, необхідних для реалізації обох задач, та час, який витрачається на розв'язання, особливо у випадках, коли для обчислення коефіцієнтів Фур'є використовуються методи швидкого перетворення Фур'є.

Всі перетворення (до отримання виразів (4.9), (4.10) включно), здійснені у попередньому підрозділі, залишаються справедливими і під час побудови алгоритму ідентифікації динамічної системи, для якої $x(t)$ є входом, а $y(t)$ — виходом.

Із системи рівнянь (4.9), (4.10) випливає, що

$$R(i\omega_1) = \frac{a_i m_i + b_i n_i}{a_i^2 + b_i^2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.23)$$

$$Q(i\omega_1) = \frac{b_i m_i - a_i n_i}{a_i^2 + b_i^2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Отриманням формул (4.23), (4.24) закінчується перший етап побудови алгоритму параметричної ідентифікації динамічної системи за допомогою ФІМІ.

На другому етапі будемо шукати математичну модель системи, дійсна $R(\omega)$ та уявна $Q(\omega)$ частотні характеристики якої в окремих точках визначаються співвідношеннями (4.23), (4.24) у класі передаточних функцій виду

$$\Phi_{ls}(p) = \frac{\sum_{v=0}^l \psi_v p^v}{\sum_{\mu=0}^s \chi_\mu p^\mu}, \quad (4.25)$$

де ψ_v , χ_μ — параметри, числові значення яких потребують визначення у

процесі ідентифікації. Нагадаємо, що для динамічних систем, які можна фізично реалізувати, завжди

$$l \leq s. \quad (4.26)$$

Критеріальне співвідношення

$$\Sigma_{ls}^R = \sum_{i=0}^N (R(i\omega_1) - R_{ls}(i\omega_1))^2 \quad (4.27)$$

будемо використовувати для пошуку оптимальних числових значень параметрів ψ_ν , χ_μ передаточних функцій $\Phi_{ls}(p)$ вибраної структури — тобто за заданих значень l і s , а критеріальне співвідношення

$$\Sigma_{ls}^Q = \sum_{i=0}^N (Q(i\omega_1) - Q_{ls}(i\omega_1))^2 \quad (4.28)$$

— для оптимізації процесу вибору структури цієї передаточної функції — тобто для визначення оптимальних значень l і s .

У (4.27), (4.28) $R_{ls}(i\omega_1)$, $Q_{ls}(i\omega_1)$ — функціонально задані, виходячи з вибраної структури передаточної функції $\Phi_{ls}(p)$, у точках $i\omega_1$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) вирази для дійсної $R_{ls}(\omega)$ і уявної $Q_{ls}(\omega)$ частотних характеристик об'єкта, що ідентифікується, для отримання яких слід використати відомі з теорії автоматичного керування співвідношення:

$$\begin{cases} R_{ls}(\omega) = \operatorname{Re} \Phi_{ls}(p) \Big|_{p=j\omega} \\ Q_{ls}(\omega) = \operatorname{Im} \Phi_{ls}(p) \Big|_{p=j\omega} \end{cases} \quad (4.29)$$

а $R(i\omega_1)$, $Q(i\omega_1)$ — розв'язки рівнянь (4.23), (4.24).

Використовуються співвідношення (4.23) – (4.29) у процесі параметричної ідентифікації динамічної системи у такій послідовності: задаючись у (4.25) різними конкретними значеннями l і s так, щоб виконувалась умова фізичної реалізованості (4.26), для кожної конкретної пари значень l і s за співвідношеннями (4.29) визначаємо функції $R_{ls}(\omega)$ та $Q_{ls}(\omega)$. У результаті цієї операції отримуємо множину пар частотних характеристик

$$\begin{aligned}
& R_{01}(\omega), Q_{01}(\omega); R_{11}(\omega), Q_{11}(\omega); \\
& R_{02}(\omega), Q_{02}(\omega); R_{12}(\omega), Q_{12}(\omega); R_{22}(\omega), Q_{22}(\omega); \\
& R_{03}(\omega), Q_{03}(\omega); R_{13}(\omega), Q_{13}(\omega); \dots
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Підставивши по черзі функції $R_{01}(\omega)$, $R_{11}(\omega)$, $R_{02}(\omega)$, $R_{12}(\omega)$, ... із множини (4.30), задані у точках $i\omega_1$, разом із значеннями $R(i\omega_1)$, взятими з (4.23), у критеріальне співвідношення (4.27), і здійснивши відносно (4.27) стандартну процедуру методу найменших квадратів, визначимо оптимальні за критерієм мінімуму суми квадратів відхилень оцінки коефіцієнтів ψ_ν , χ_μ передаточних функцій виду (4.25) для кожної конкретної пари значень l і s із наперед заданого діапазону.

Для того, щоб оптимізувати структуру передаточної функції $\Phi_{ls}(p)$ системи, що ідентифікується, підставимо знайдені з використанням функції $R_{ls}(\omega)$ за допомогою методу найменших квадратів числові значення коефіцієнтів ψ_ν , χ_μ у відповідні вирази для $Q_{ls}(\omega)$ із множини пар (4.30). Конкретизовані у такий спосіб функції $Q_{ls}(\omega)$, у свою чергу, підставимо у друге критеріальне співвідношення (4.28). Після підстановки у (4.28) також і значень $Q(i\omega_1)$, отриманих із (4.24), і прямих обчислень значень Σ_{ls}^Q побудуємо числовий ряд

$$\Sigma_{01}^Q, \Sigma_{11}^Q, \Sigma_{02}^Q, \Sigma_{12}^Q, \Sigma_{22}^Q, \dots \tag{4.31}$$

Виходячи із основної ідеї методу найменших квадратів, можна стверджувати, що та пара характеристик $R_{ls}(\omega)$, $Q_{ls}(\omega)$, яка задає найменший член

$$\Sigma_{ls}^Q = \min_{ls} \tag{4.32}$$

ряду (4.31), і визначає оптимальну структуру математичної моделі динамічної системи, що ідентифікується.

Під час розгляду цього алгоритму привертає до себе увагу той факт, що на відміну від оптимального алгоритму відновлення сигналу, побудованого у попередньому підрозділі, в ньому не виникає запитання про кількість гармонічних складових, які треба утримувати в зрізаних рядах Фур'є сигналів $x(t)$, $y(t)$, оскільки відповідь на це питання однозначна — чим більше, тим краще, але кількість їх обов'язково повинна бути більшою від числа коефіцієнтів передаточної функції $\Phi_{ls}(p)$, які нам потрібно визначити у процесі ідентифікації системи.

Але у цій задачі потрібно мати відповідь на інше запитання, а саме — за якими умовами задача ідентифікації лінійної динамічної системи за допомогою ФІМІ може бути віднесена до класу коректних і мати однозначний розв'язок?

Для відповіді на це запитання нагадаємо, що задача ідентифікації лінійної динамічної системи у частотній області з використанням інформації про вхідний $x(t)$ та вихідний $y(t)$ сигнали може бути розв'язана лише за умови, що спектр Фур'є вхідного сигналу є ширшим частотного спектра системи. У цьому випадку кожна частота спектра системи може бути збуджена відповідною складовою спектра вхідного сигналу і у тій чи іншій мірі проявити себе у спектрі вихідного сигналу.

Якщо ж частотний спектр вхідного сигналу є вузьким, ніж спектр системи, то деякі частоти спектра системи не будуть збуджені і не проявлять себе у спектрі вихідного сигналу, а тому вони не зможуть бути ідентифікованими жодним із частотних методів.

Тож, як висновок із наведеного вище аналізу впливає, що задача параметричної ідентифікації лінійної динамічної системи за допомогою ФІМІ розв'язується однозначно лише тоді, коли коефіцієнти Фур'є вихідного сигналу цієї системи спадають швидше коефіцієнтів Фур'є її вхідного сигналу.

4.4. Екскурс у метод найменших квадратів

Під час реалізації алгоритмів оптимальної параметричної ідентифікації сигналів та систем, розглянутих у попередніх підрозділах цього розділу, використано метод найменших квадратів (МНК), ідея якого належить “королю математики” всіх часів і народів Гауссу.

І хоча виклад основ МНК можна знайти у посібниках із математичної статистики та обробки результатів експериментів, ми вирішили подати їх у нашому посібнику також. Оскільки, по-перше, його використання є невід’ємною частиною Фур’є-інтегрального методу ідентифікації, змістом якого заповнено саме цей розділ, а по-друге, використання МНК має певні обмеження, на які автори багатьох посібників не звертають увагу студентів, що у подальшому може стати джерелом помилок в їх дослідженнях, обробка результатів яких здійснюється з використанням МНК.

Ми ж ці обмеження не лише вкажемо, але й висвітлимо можливі наслідки їх ігнорування.

Після цього коротенького вступу перейдемо до викладу безпосередньо МНК.

Нехай нам відомо, що вихідний параметр процесу, який ми вивчаємо, позначимо його y , лінійно залежить від вхідного параметру x (суцільна пряма лінія на рис. 4.2).

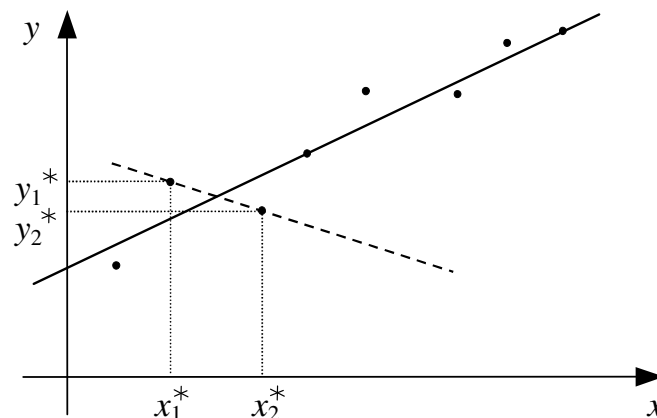


Рис. 4.2. Графічна інтерпретація причин, які обумовлюють необхідність використання МНК

Тобто, ми припускаємо, що статична характеристика цього процесу може бути подана у вигляді

$$y = kx + b, \quad (4.33)$$

де k і b – коефіцієнти, для визначення числових значень яких необхідно, як мінімум, задати два значення x_1, x_2 вхідній величині x і заміряти відповідні їм значення y_1, y_2 вихідної величини y , оскільки лише під час виконання цих умов для моделі (4.33) можна скласти систему двох алгебраїчних рівнянь із двома невідомими k і b

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b, \\ y_2 = kx_2 + b. \end{cases} \quad (4.34)$$

Але результати будь-яких експериментальних вимірювань несуть у собі похибки, обумовлені класом точності вимірювальних засобів, дією різноманітних завад, неточністю зчитування показів приладів, округленням під час приведення даних до однакових умов обробки інформації — список умов виникнення похибок можна продовжити, але для обґрунтування МНК цього досить.

Тож через наявність цих похибок в експериментальних значеннях x_1, x_2, y_1, y_2 безпосередній розв’язок системи рівнянь (4.34) відносно b та k може нести в собі похибку в 10, 100, 1000 і більше відсотків.

Наприклад, якщо використати лише значення $x_1^*, y_1^*; x_2^*, y_2^*$ (рис. 4.2) для розв’язання системи рівнянь (4.34), то похибка буде вже не у відсотках, а в характері функціональної залежності (пунктирна лінія на рис. 4.2).

У свій час Гаусс запропонував інший спосіб визначення коефіцієнтів k, b моделі (4.33). Він запропонував сформулювати суму квадратів різниць Σ^N між теоретично заданими за допомогою рівняння (4.33) значеннями вихідної координати y при значеннях аргументу $x_1, i = \overline{1, N}$, та її експериментальними значеннями y_i :

$$\Sigma^N = \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i)^2, \quad (4.35)$$

а потім знайти такі значення коефіцієнтів k , b рівняння (4.33), котрі мінімізують вираз (4.35).

Від цієї процедури і назва методу — метод найменших квадратів.

З курсу математичного аналізу ми знаємо, що для знаходження мінімуму якоїсь функції необхідно взяти від неї похідну, прирівняти цю похідну до нуля і розв'язати отримане рівняння — його корінь задає значення аргументу, за якого функція досягає мінімуму, а само значення функції у цій точці, якщо вона опукла донизу, задає її мінімальне значення.

Згідно з цією ідеєю, підставимо у вираз (4.35) замість $y(x_i)$ його значення з (4.33) і візьмемо від отриманого виразу частинні похідні за b та k , які прирівняємо до нуля, тобто

$$\Sigma^N = \sum_{i=1}^N (kx_i + b - y_i)^2, \quad (4.36)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma^N}{\partial b} = \sum_{i=1}^N 2(kx_i + b - y_i)(1) = 0, \\ \frac{\partial \Sigma^N}{\partial k} = \sum_{i=1}^N 2(kx_i + b - y_i)(x_i) = 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

Із (4.37) після низки нескладних перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} b \cdot N + k \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i, \\ b \sum_{i=1}^N x_i + k \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N y_i x_i. \end{cases} \quad (4.38)$$

Розв'язавши систему рівнянь (4.38) відносно b і k , ми отримаємо такі їх значення, які мінімізують суму квадратів відхилень експериментально вимірених значень величин x_i , y_i від теоретично заданих згідно з вибраною функціональною залежністю.

Рівняння, що входять у систему (4.38), називають *нормальними рів-*

няннями Гаусса. Коефіцієнтами у них є суми, які “згладжують” дію похибок вимірювань величин x , y і зменшують їх вплив на оцінки параметрів b , k . Завдяки цьому підвищується точність їх визначення.

А тепер припустимо, що поле точок (x_i, y_i) експериментально визначених величин x , y має такий вигляд, як це показано на рис. 4.3.

Із цього рисунка видно, що середньою лінією цього поля, яка віддзеркалює “в середньому” функціональну залежність y від x , є парабола

$$y = ax^2 + kx + b, \quad (4.39)$$

параметри якої a , k , b також доцільно визначати за допомогою МНК.

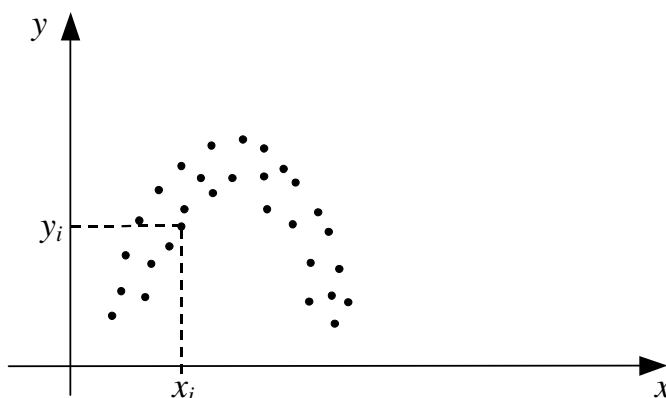


Рис. 4.3. Поле точок (x_i, y_i) експериментально визначених величин x , y

Для отримання нормальних рівнянь Гаусса у цьому випадку підставимо (4.39) у (4.35), що дасть вираз

$$\Sigma^N = \sum_{i=1}^N (ax_i^2 + kx_i + b - y_i)^2. \quad (4.40)$$

Далі від цього виразу візьмемо частинні похідні за b , k , a та прирівняємо їх нулю, що дасть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma^N}{\partial b} = \sum_{i=1}^N 2(ax_i^2 + kx_i + b - y_i) \cdot (1) = 0, \\ \frac{\partial \Sigma^N}{\partial k} = \sum_{i=1}^N 2(ax_i^2 + kx_i + b - y_i) \cdot (x_i) = 0, \\ \frac{\partial \Sigma^N}{\partial a} = \sum_{i=1}^N 2(ax_i^2 + kx_i + b - y_i) \cdot (x_i^2) = 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

Після спрощень в системі (4.41) матимемо систему нормальних рівнянь Гаусса (4.42), розв'язавши яку, отримаємо оптимальні за критерієм мінімуму відхилень експерименту від теорії значення параметрів b , k , a математичної моделі (4.39) функціональної залежності величини y від величини x , заданих експериментальним полем точок (x_i, y_i) , яке зображено на рис. 4.3:

$$\begin{cases} b \cdot N + k \sum_{i=1}^N x_i + a \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N y_i, \\ b \sum_{i=1}^N x_i + k \sum_{i=1}^N x_i^2 + a \sum_{i=1}^N x_i^3 = \sum_{i=1}^N y_i x_i, \\ b \sum_{i=1}^N x_i^2 + k \sum_{i=1}^N x_i^3 + a \sum_{i=1}^N x_i^4 = \sum_{i=1}^N y_i x_i^2. \end{cases} \quad (4.42)$$

Приклад. Нехай в результаті експерименту отримана послідовність десяти парних значень величин x , y , яка наведена у табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Експериментальні дані та проміжні дані їх обробки

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y_i	1,16	1,30	1,20	1,20	0,9	0,9	0,4	0	-0,5	-1,0
x_i^2	0,04	0,16	0,36	0,64	1,0	1,44	1,96	2,56	3,24	4,0

Якщо нанести на координатну площину x , y ці точки, то можна по-

бачити, що це є “збурена” завадами параболою. Але спочатку спробуємо використати для побудови моделі цієї залежності рівняння прямої (4.33).

Підставляючи значення $x_i, y_i, i = \overline{1, 10}$ із табл. 4.1 у рівняння (4.38), отримуємо:

$$\begin{cases} 10b + 11k = 5,56, \\ 11b + 15,4k = 2,072. \end{cases} \quad (4.43)$$

Розв’язком системи рівнянь (4.43) є оцінки

$$b^* = 1,904; \quad k^* = -1,225, \quad (4.44)$$

які задають модель залежності у вигляді прямої лінії

$$y^* = -1,225x + 1,904. \quad (4.45)$$

А тепер використаємо для побудови моделі залежності, заданої табл. 4.1, рівняння параболою (4.39).

Підставляючи значення $x_i, y_i, i = \overline{1, 10}$ із табл. 4.1 у рівняння (4.42), отримуємо:

$$\begin{cases} 10b + 11k + 15,4a = 5,560, \\ 11b + 15,4k + 24,2a = 2,072, \\ 15,4b + 24,2k + 40,533a = -1,186. \end{cases} \quad (4.46)$$

Розв’язком системи рівнянь (4.46) є оцінки

$$b^{**} = 1,017; \quad k^{**} = 0,991; \quad a^{**} = -1,008, \quad (4.47)$$

які задають модель вказаної вище залежності у вигляді параболою

$$y^{**} = -1,008x^2 + 0,991x + 1,017. \quad (4.48)$$

Для того, щоб визначити яка із двох моделей (4.45), (4.47) краще віддзеркалює функціональну залежність, що задана табл. 4.1, знайдемо числове значення критеріальних співвідношень (4.36), (4.40) з використанням (4.44) та (4.47).

Із (4.36) та (4.44) для поля точок, заданих табл. 4.1, знаходимо, що

$$\Sigma_*^N = 0,899, \quad (4.49)$$

а із (4.40) та (4.47), що

$$\Sigma_{**}^N = 0,041. \quad (4.50)$$

Отже, оскільки

$$\Sigma_{**}^N \ll \Sigma_*^N, \quad (4.51)$$

то, згідно з основною ідеєю МНК, модель (4.48) є набагато кращою, ніж модель (4.45), у чому легко переконатись, якщо нанести поле точок із табл. 4.1 на координатну площину (x, y) (рис. 4.4).

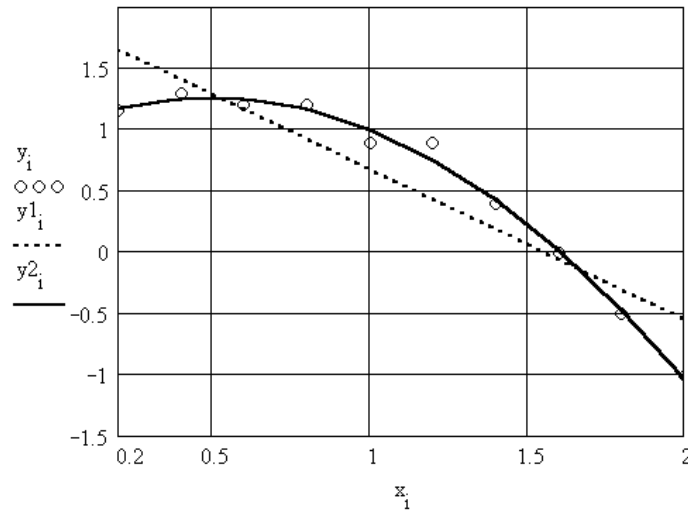


Рис. 4.4. Поля точок (x_i, y_i) , $(x_i, y1_i)$ і $(x_i, y2_i)$ експериментально визначених величин x , y та величин $y1$ і $y2$, обчислених у пакеті *MathCAD* за методом найменших квадратів і яким відповідають

у тексті величини y^* та y^{**}

(точки графіка залежності $y(x)$ нанесені у вигляді маленьких кіл;

графік функції $y1(x)$ зображений у вигляді пунктирної лінії,

а графік функції $y2(x)$ — у вигляді суцільної)

З усього викладеного у даному підрозділі можна зробити такі висновки:

1) за вибраної структури моделі функціональної залежності оптимальні значення її параметрів у межах заданого діапазону значень аргументу та його функції найбільш просто і ефективно визначаються за допомогою МНК;

2) вибір виду та структури моделі є прерогативою дослідника;

3) у класі заданих структур МНК дозволяє отримати не лише оптимальні значення коефіцієнтів, але й її оптимальну структуру.

На завершення цього підрозділу зробимо одне надзвичайно важливе зауваження, а вірніше, попередження, яке полягає у тому, що, оскільки обчислювальні алгоритми МНК побудовані виключно на основі інтерполяційних процедур, то їх використання для розв'язання задач екстраполяції може призвести до неприпустимих помилок. Іншими словами, за допомогою МНК можна успішно розв'язувати задачі оптимізації відновлювання сигналів на вході вимірювальної системи за інформацією про її вихід та задачі оптимального синтезу динамічної характеристики (наприклад, передаточної функції) системи, за інформацією про її вхід та вихід, але ні в якому разі за допомогою МНК не можна синтезувати моделі прогнозу.

Про те, яких значень можуть сягати помилки через ігнорування цього попередження, легко зробити висновок із рис. 4.5.

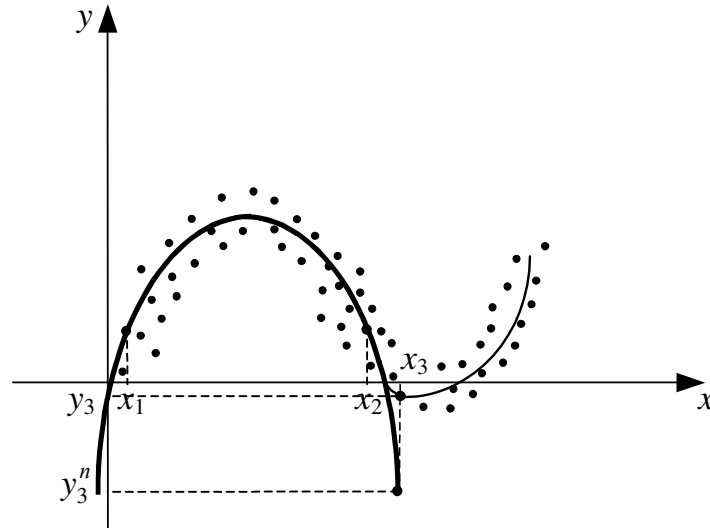


Рис. 4.5. Графічна ілюстрація недоцільності використання МНК для розв'язання задачі прогнозування

З рис. 4.5 видно, що якщо у нас є лише точки з діапазону значень координати x від x_1 до x_2 , то МНК як оптимальну модель залежності

$y = f(x)$ дасть параболу. Під час використання цієї параболи для прогнозування значення y у точці x_3 ми отримаємо значення y_3^n , у той же час як реально координата y матиме значення y_3 , яке суттєво відрізняється від y_3^n .

На жаль, сьогодні навіть у дисертаціях та монографіях можна зустріти приклади використання МНК під час синтезу моделей прогнозу.

Ми сподіваємось, що всі, хто користуватиметься нашим посібником, такої помилки припускатись не будуть.

4.5. Завдання для самоперевірки

1. Які умови повинні виконуватись для забезпечення можливості використання Фур'є-інтегрального методу ідентифікації?
2. Які задачі можна розв'язувати за допомогою ФІМІ?
3. У чому суть задачі відновлення сигналів на вході вимірювальної системи?
4. Коли ФІМІ поза конкуренцією під час розв'язання задач ідентифікації?
5. Як розкласти сигнал у ряд Фур'є?
6. Взнявши інтеграл згортки для заданих Фур'є-сигналів $x(t)$ та $y(t)$, переконайтесь у справедливості виразу (4.7).
7. Які етапи має прямий алгоритм відновлення сигналів?
8. Як визначити скільки гармонічних складових треба залишити в зрізаному ряді Фур'є відновлюваного сигналу?
9. Які критерії і яким чином використовуються під час синтезу алгоритму оптимального відновлення сигналів?
10. Як визначити номер гармонічної складової, з якої запускається алгоритм оптимального відновлення сигналів?

11. Який алгоритм — прямий чи оптимальний — вимагає більше затрат пам'яті ЕОМ і чому?
12. Яка процедура використовується у ФІМІ для визначення оптимальних значень параметрів моделі заданої структури?
13. Яка процедура використовується для визначення оптимальної структури моделі під час використання ФІМІ?
14. Чому алгоритми ідентифікації сигналів та системи за допомогою ФІМІ називають параметричними?
15. За яких умов задача ідентифікації динамічної системи за допомогою ФІМІ належить до класу коректних?
16. У чому полягає основна ідея методу найменших квадратів?
17. Як отримати систему нормальних рівнянь Гаусса для визначення оптимальних оцінок коефіцієнтів моделі заданої структури?
18. Як визначити оптимальну структуру моделі за допомогою МНК у вибраному класі структур?
19. Які задачі можна розв'язувати за допомогою МНК і чому не можна використовувати МНК для синтезу моделей прогнозу?