УДК 517.518.949

А. Т. Дудикевич[1]
А. І. Кардаш[1]
С. М. Левицька[1]

ВИКОРИСТАННЯ НЕОРТОГОНАЛЬНИХ ШАБЛОНІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА НА ПЛОЩИНІ

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка

Гранична задача Діріхле для рівняння Лапласа розв'язана методом скінченних різниць на неортогональних семиточковому та дев'ятиточковому шаблоні; побудована різницева схема та алгоритм її реалізації.

Ключові слова: гранична задача Діріхле для рівняння Лапласа, неортогональні шаблони, ітераційні методи.

Вступ

Актуальність полягає у тому, що проблема пошуку наближеного розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа у більшості сучасних алгоритмів стає проміжним етапом всього алгоритмічного процесу. Такі галузі комп'ютерних наук як теорія розпізнавання, комп'ютерна графіка та комп'ютерне моделювання вимагають різних методів і підходів для розв'язування рівняння Лапласа, які б давали змогу отримувати наближений розв'язок швидше і з тою ж самою точністю, як і з використанням існуючих методів. Тому ця проблема є актуальною і на сьогоднішній день.

Постановка задачі

Нехай оператор Лапласа заданий в деякій прямокутній області Ω:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0; \qquad \left(x_1,\, x_2\right)\in\Omega,\;\; u\left(x_1,\, x_2\right)\in C^{(2)}(\Omega) \tag{1}$$

і задовольняє такі граничні умови:

$$u\,|_{x_1=0}=\varphi_1\left(0,\, x_2\right);\;\; u\,|_{x_2=0}=\varphi_2\left(x_1,\, 0\right);\;\; u\,|_{x_1=l_1}=\varphi_3\left(l_1,\, x_2\right);\;\; u\,|_{x_1=l_2}=\varphi_4\left(x_1,\, l_2\right); \tag{2}$$

$$\left(x_1,\, x_2\right)\in\partial\Omega,\;\; \varphi_i\,(i=\overline{1,4})\in C(\Omega); \qquad \Omega=\left\{0<x_1<l_1,\, 0<x_2<l_2\right\}, \tag{3}$$

де $\partial\Omega$ — межа області Ω, $\varphi_i\left(x_1,\, x_2\right)$, $(i=\overline{1,4})$ — задані функції. Необхідно знайти розв'язок рівняння Лапласа в області Ω.

Побудова різницевих апроксимацій

Суть різницевої апроксимації полягає у тому, що похідні диференціального оператора заміняємо деякими різницевими співвідношеннями. Внаслідок цього замість диференціального оператора отримуємо різницевий оператор, який є лінійною комбінацією значень сіткової функції на деякій множині вузлів сітки, яку називають шаблоном.

Різницева апроксимація для семиточкового неортогонального шаблону

В області $\bar{\Omega}=\Omega+\partial\Omega$ введемо $(2n+2)$ напрямки за лініями

$$s_{i1}: x_1=k_i h_1 t_{i1},\;\; x_2=p_i h_2 t_{i1}; \qquad s_{i2}: x_1=-k_i h_1 t_{i2},\;\; x_2=p_i h_2 t_{i2}; \tag{4}$$

$$s_{01}: x_1=k_0 h_1 t_{01},\;\; s_{02}: x_2=p_0 h_2 t_{02},\;\; i=\overline{1,n}.$$

Диференціальний оператор Лапласа для похідних за змінними зводимо до певного оператора для похідних за введенними напрямками [1].

$$\Delta_s u = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2}\right) + \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial s_3^2}. \tag{5}$$

Використовуючи поняття усереднення та повторного усереднення операторів, апроксимуємо різницеві похідні за напрямками різницевими виразами, маємо:

$$\begin{aligned}\Lambda u_{i,j} = &\left(\frac{1}{4h_1^2} - \frac{1}{4h_2^2}\right)\left(u_{i+2,j} - 2u_{i,j} + u_{i-2,j}\right) + \\ &+\left(\frac{1}{2h_1^2} + \frac{1}{2h_2^2}\right)\left(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} - 4u_{i,j}\right) = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

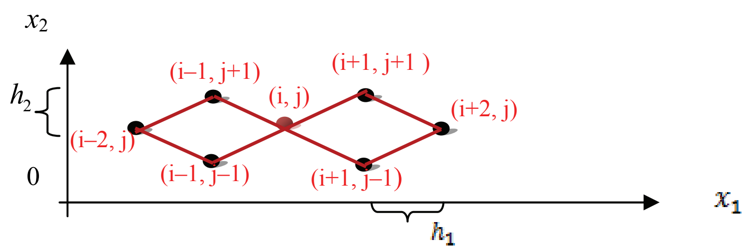

Рис. 1. Семиточковий неортогональний шаблон

Неважко переконатися, що оператор (6) апроксимує диференціальний оператор Лапласа з другим порядком апроксимації на семиточковому шаблоні прямокутної сітки

$$\Psi = \Lambda u - \Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\left[\frac{4h_1^4}{12}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right) + \frac{h_1^4}{12h_2^2}\right] + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\left(\frac{h_2^2}{12}\right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\left(\frac{6h_1^2}{12}\right) + O\left(h_1^4 + h_2^4\right).$$

Таким чином, отримаємо симетричний і при $h_1 < h_2$ додатньо визначений різницевий оператор Лапласа.

Різницева апроксимація для дев'ятиточкового неортогонального шаблону.

Побудуємо різницеву апроксимацію для дев'ятиточкового неортогонального шаблону. Для цього введемо в області $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ $4n$ напрямки за лініями:

$$s_{i1}: x_1 = k_i h_1 t_{i1},\ x_2 = p_i h_2 t_{i1};\quad s_{i2}: x_1 = -k_i h_1 t_{i2},\ x_2 = p_i h_2 t_{i2};$$

$$s_{1i}: x_1 = k_i h_1 t_{1i},\ x_2 = p_i h_2 t_{1i};\quad s_{2i}: x_1 = -k_i h_1 t_{2i},\ x_2 = p_i h_2 t_{2i}\quad (i = \overline{1,n}).$$

Скориставшись формулою похідної за напрямком, зведемо похідні за змінними в операторі Лапласа до похідних за напрямками s_1, s_2, s_3, s_4:

$$\Delta_s u = \left(\frac{8}{15} - \frac{2h_2^2}{15h_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2}\right) + \left(\frac{8}{15} - \frac{2h_1^2}{15h_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_4^2}\right). \tag{7}$$

Використовуючи поняття усереднення та повторного усереднення операторів, апроксимуємо різницеві похідні за напрямками відповідними різницевими виразами, із (7) отримаємо:

$$\begin{aligned}\Lambda u_{i,j} = &\left(\frac{2}{15h_2^2} - \frac{1}{30h_1^2}\right)\left(u_{i+1,j+2} + u_{i-1,j-2} + u_{i-1,j+2} + u_{i+1,j-2} - 4u_{i,j}\right) + \\ &+\left(\frac{2}{15h_1^2} - \frac{1}{30h_2^2}\right)\left(u_{i+2,j+1} + u_{i-2,j-1} + u_{i-2,j+1} + u_{i+2,j-1} - 4u_{i,j}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Оператор (8) апроксимує диференціальний оператор Лапласа з другим порядком апроксимації на дев'ятиточковому шаблоні прямокутної сітки

$$\Psi = \Lambda u - \Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\left[\frac{13h_1^4}{18}\left(\frac{1}{4h_1^2} - \frac{3}{h_2^2}\right) + \frac{7h_1^4}{15h_2^2}\right] + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\left(\frac{3h_2^2}{18}\right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\left(\frac{13h_1^2}{18}\right) + O\left(h_1^4 + h_2^4\right).$$

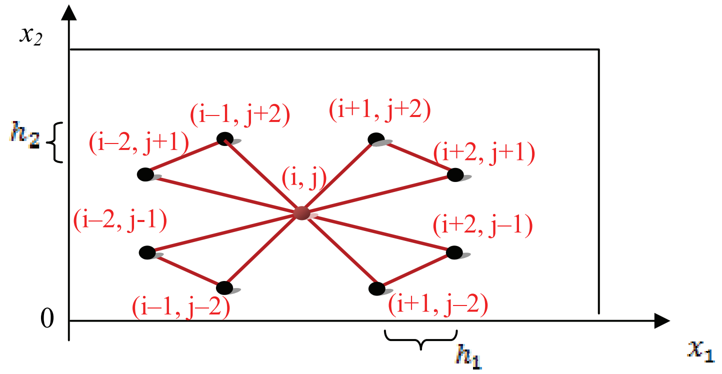

Рис. 2. Дев'ятиточковий неортогональний шаблон

Отримання розв'язку у приграничних вузлах

При розв'язуванні задачі (1)—(2) різницевими методами, побудованими на семи- та дев'ятиточкових неортогональних шаблонах, постає питання знаходження розв'язку у приграничних вузлах сітки $(\overline{\omega})$. Різницеві рівняння розв'язувались ітераційними методами. На рис. 3 зображено деяку k-ту ітерацію розв'язку задачі (1)—(2). Чорним кольором позначені вузли сітки, значення яких отримуємо з граничних умов (2). Зеленим кольором позначені ті вузли, які не будуть обчислені за допомогою різницевої схеми, побудованої на семиточковому неортогональному шаблоні. Тому постає проблема пошуку розв'язку в цих вузлах сітки.

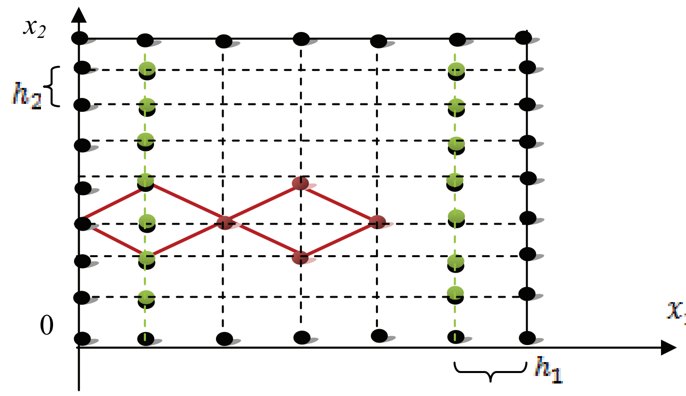

Рис. 3. Приграничні вузли на семиточковому неортогональному шаблоні

Аналогічна проблема постає і при застосуванні різницевої схеми, побудованої на дев'ятиточковому неортогональному шаблоні. Вирішити цю проблему можна за допомогою формул інтерполювання. Для цього скористаємось трьома підходами: інтерполяційним багаточленом Ньютона, інтерполяційним багаточленом Лагранжа і кубічним сплайном.

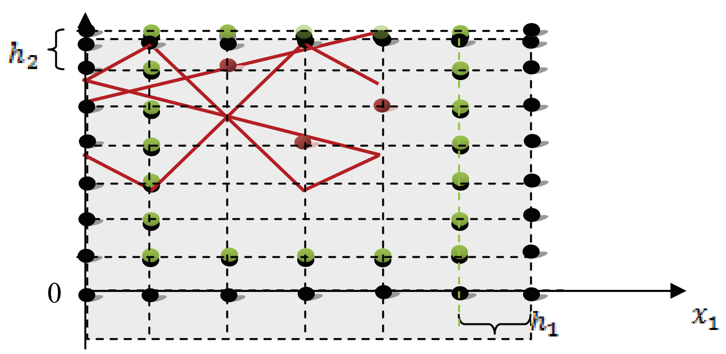

Рис. 4. Приграничні вузли на дев'ятиточковому неортогональному шаблоні

Побудова ітераційних процесів для систем різницевих рівнянь

СЛАР розв'язуються методом Зейделя (МЗ) та верхньої релаксації за точками (МВРТ).

Запишемо формули для знаходження розв'язків СЛАР за допомогою методу Зейделя для семиточкового неортогонального шаблону. При інтерполюванні приграничних вузлів за допомогою кубічного сплайну, ітераційні формули запишуться у такому вигляді:

$$\begin{cases} \hat{u}_{1,j}^{(k+1)} = \dfrac{1}{344}\left(-6u_{5,j}^{(k)} + 36u_{4,j}^{(k)} - 144u_{3,j}^{(k)} + 331u_{2,j}^{(k)} + 127u_{0,j}^{(k+1)}\right); \\ \hat{u}_{i,j}^{(k+1)} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{4h_1^2} - \dfrac{1}{4h_2^2}\right)\left(u_{i-2,j}^{(k+1)} + u_{i+2,j}^{(k)}\right) + \dfrac{1}{2h_2^2}\left(u_{i-1,j+1}^{(k)} + u_{i+1,j+1}^{(k)} + u_{i-1,j-1}^{(k+1)} + u_{i+1,j-1}^{(k+1)}\right)}{\left(\dfrac{1}{2h_1^2} + \dfrac{3}{2h_2^2}\right)}; \\ \hat{u}_{n-1,j}^{(k+1)} = \dfrac{127u_{n,j}^{(k+1)} + 331u_{n-2,j}^{(k+1)} - 144u_{n-3,j}^{(k+1)} + 36u_{n-4,j}^{(k+1)} - 6u_{n-5,j}^{(k+1)}}{344}. \end{cases} \quad (9)$$

Метод верхньої релаксації за точками для дев'ятиточкового неортогонального шаблону з використанням інтерполяційних багаточленів Ньютона або Лагранжа реалізується за формулами

$$\begin{cases} \hat{u}_{1,j}^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}u_{0,j}^{(k+1)} + \dfrac{3}{2}u_{2,j}^{(k)} - u_{3,j}^{(k)} + \dfrac{1}{4}u_{4,j}^{(k)}; \quad \hat{u}_{i,1}^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}u_{i,0}^{(k+1)} + \dfrac{3}{2}u_{i,2}^{(k)} - u_{i,3}^{(k)} + \dfrac{1}{4}u_{i,4}^{(k)}; \\ \hat{u}_{i,j}^{(k+1)} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{4h_1^2} - \dfrac{1}{4h_2^2}\right)\left(u_{i-2,j}^{(k+1)} + u_{i+2,j}^{(k)}\right) + \dfrac{1}{2h_2^2}\left(u_{i-1,j+1}^{(k)} + u_{i+1,j+1}^{(k)} + u_{i-1,j-1}^{(k+1)} + u_{i+1,j-1}^{(k+1)}\right)}{\left(\dfrac{1}{2h_1^2} + \dfrac{3}{2h_2^2}\right)}; \\ \hat{u}_{n-1,j}^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}u_{n,j}^{(k+1)} + \dfrac{3}{2}u_{n-2,j}^{(k+1)} - u_{n-3,j}^{(k+1)} + \dfrac{1}{4}u_{n-4,j}^{(k+1)}; \quad \hat{u}_{i,m-1}^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}u_{i,m}^{(k+1)} + \dfrac{3}{2}u_{i,m-2}^{(k+1)} - u_{i,m-3}^{(k+1)} + \dfrac{1}{4}u_{i,m-4}^{(k+1)}. \end{cases} \quad (10)$$

Приклад

Розв'яжемо таку задачу Діріхле для рівняння Лапласа: $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0;$

де $(x_1, x_2) \in \Omega$, $u(x_1, x_2) \in C^{(2)}(\Omega)$; $u\big|_{x_1=0} = 0$; $u\big|_{x_2=0} = \sin(\pi x)$; $u\big|_{x_1=l_1} = 0$; $u\big|_{x_2=l_2} = 0$;

$\Omega = \{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$; $l_1 = l_2 = 1$.

Точний розв'язок задачі такий: $u_{\text{точне}} = \dfrac{\sinh(\pi x_2)}{\sinh(\pi)}\sin(\pi x_1)$, $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Ця задача розв'язується на сітці розміром 10×10 з використанням семиточкового неортогонального шаблону. Приграничні вузли інтерполюються за допомогою інтерполяційного багаточлена Лагранжа, а СЛАР розв'язується за допомогою методу верхньої релаксації за точками. Ітераційний процес зупиняється з досягненням точності 10^{-10}. Представимо графічно точний і наближений розв'язки у вигляді поверхонь (рис. 5)

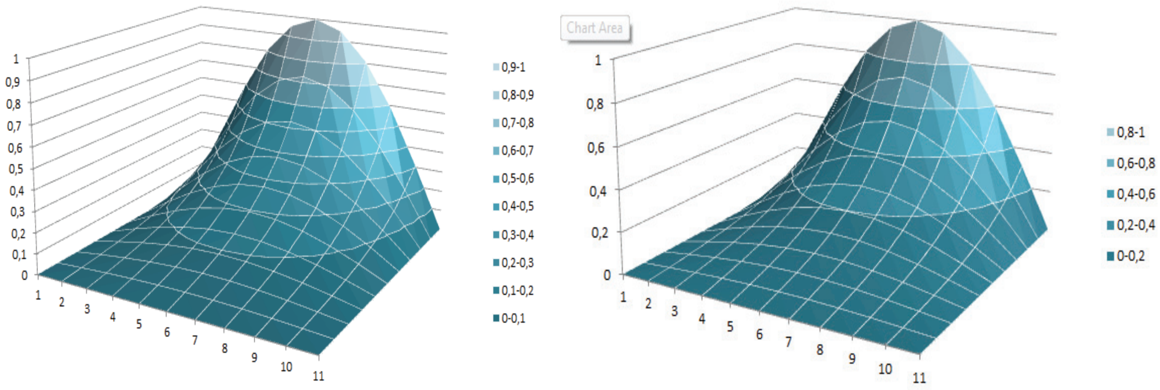

Рис. 5. Графічне представлення наближеного та точного розв'язку

Таблиця 1

Абсолютна похибка обчислень

0,00014	0,00041	0,00063	0,00077	0,00082	0,00077	0,00063	0,00041	0,00014
0,00027	0,00081	0,00126	0,00154	0,00164	0,00154	0,00126	0,00081	0,00027
0,00038	0,00122	0,00189	0,00233	0,00248	0,00233	0,00189	0,00122	0,00038
0,00046	0,0016	0,00252	0,00311	0,00332	0,00311	0,00252	0,0016	0,00046
0,00047	0,00193	0,0031	0,00386	0,00412	0,00386	0,0031	0,00193	0,00047
0,00039	0,00216	0,00358	0,00448	0,0048	0,00448	0,00358	0,00216	0,00039
0,00018	0,00223	0,00383	0,00484	0,00516	0,00484	0,00383	0,00223	0,00018
0,00021	0,00204	0,00367	0,00459	0,00492	0,00459	0,00367	0,00204	0,00021
0,000482	0,00156	0,00262	0,00327	0,00348	0,00327	0,00262	0,00156	0,000482

Кількість ітерацій — 180. Час виконання програми — 0,0157218 с.

Проводився обчислювальний експеримент розв'язування цієї задачі на сітках розміром 50×50, 100×100, 150×150 та 200×200 вузлів з використанням всіх вищеописаних шаблонів. Результат представимо у вигляді таблиці на сітці розміром 50×50, де основними характеристиками будуть час виконання програми (в секундах) і кількість ітерацій (табл. 2).

Таблиця 2

Результати чисельного експерименту

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td>5 точковий «хрест»</td><td>9 точковий «ящик»</td><td colspan="2"></td><td>7 точковий неортогональний</td><td>9 точковий неортогональний</td></tr>
<tr><td rowspan="8">50×50</td><td rowspan="4">МВРТ</td><td rowspan="2">кількість ітерацій</td><td rowspan="2">6694</td><td rowspan="2">5631</td><td rowspan="2">ЛН</td><td>кількість ітерацій</td><td>3218</td><td>1457</td></tr>
<tr><td>час</td><td>1,3258531</td><td>0,7355516</td></tr>
<tr><td rowspan="2">час</td><td rowspan="2">3,4416956</td><td rowspan="2">2,5600466</td><td rowspan="2">КС</td><td>кількість ітерацій</td><td>3183</td><td>1478</td></tr>
<tr><td>час</td><td>1,3116035</td><td>0,7511979</td></tr>
<tr><td rowspan="4">МПІ</td><td rowspan="2">кількість ітерацій</td><td rowspan="2">32656</td><td rowspan="2">27502</td><td rowspan="2">ЛН</td><td>кількість ітерацій</td><td>3894</td><td>1763</td></tr>
<tr><td>час</td><td>1,604282</td><td>0,890018</td></tr>
<tr><td rowspan="2">час</td><td rowspan="2">4,164452</td><td rowspan="2">3,097656</td><td rowspan="2">КС</td><td>кількість ітерацій</td><td>3851</td><td>1789</td></tr>
<tr><td>час</td><td>1,58704</td><td>0,90895</td></tr>
</table>

З отриманих результатів бачимо, що метод верхньої релаксації за точками є найкращим для розв'язування СЛАР, а для інтерполювання пригraничних вузлів слід використовувати інтерполяційні багаточлени Ньютона або Лагранжа. Використання семиточкового неортогонального шаблону має низку переваг над дев'ятиточковим:

— швидкодія (кількість ітерацій з використанням семиточкового неортогонального шаблону менша, ніж з використанням дев’ятиточкового);

— точність (відносна похибка обчислень в обох випадках не перевищувала одного відсотка).

Висновки

В роботі побудований новий клас різницевих апроксимацій: інтерполяційними багаточленами Ньютона вперед і назад для нерівновіддалених вузлів інтерполювання, інтерполяційними багаточленами Лагранжа та кубічними сплайнами біля приграничних вузлів. Створено різницеві схеми для семи- та дев’ятиточкових неортогональних шаблонів у випадку прямокутної сітки.

У роботі також були побудовані ітераційні процеси для систем різницевих рівнянь, зокрема наведені формули для розв’язування СЛАР методами простої ітерації та верхньої релаксації за точками. Отримано результати практичних досліджень. На конкретному прикладі зроблені аналіз і порівняння різницевих схем, які використовували п’ятиточковий шаблон типу «хрест», семиточковий неортогональний шаблон, дев’ятиточковий неортогональний шаблон та дев’ятиточковий ортогональний шаблон типу «ящик» на прямокутній сітці. В результаті обчислювального експерименту отримано дані, які підтверджують те, що знайдена апроксимація оператора Лапласа дає більшу близькість шаблону до точного значення та зумовлює кращі дисперсійні властивості таких схем, порівняно із схемами на ортогональних шаблонах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бистрицький М. Метод побудови диференціального оператора Лапласа на неортогональних шаблонах / М. Бистрицький // Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка,1999.

2. Бистрицький М. Є. Різницевий оператор Лапласа на неортогональному семиточковому шаблоні прямокутної сітки та його спектральні властивості / М. Є. Бистрицький, М. М. Москальков // Обчислювальна та прикладна математика. — 1997. — № 2 (82). — С. 7—12.

3. Дудикевич А. Т. Ефективний спосіб розв’язування різницевої задачі Діріхле на семиточковому шаблоні для рівняння Пуассона / А. Т. Дудикевич, А. І. Кардаш, С. М. Левицька // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. Міжнародний науково-технічний журнал, Вінниця, 2005. — С. 45—48.

Рекомендована кафедрою вищої математики ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 20.02.2015

Дудикевич Анна Теодорівна — канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри обчислювальної математики;

Кардаш Андрій Іванович — канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри програмування;

Левицька Софія Михайлівна — старший викладач кафедри програмування, e-mail: sofialev.m@gmail.com.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

A. T. Dudykevych[1]
A. I. Kardash[1]
S. M. Levytska[1]

Usage of non-orthogonal templates for the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in the plane

[1]Ivan Franko National University of Lviv

The Dirichlet boundary problem for the Laplace equation is solved by the finite differences method on non-orthogonal 7-point and 9-point templates. Differencing scheme is built and the algorithm for its implementation is developed.

Keywords: Dirichlet boundary problem for Laplace equation, non-orthogonal templates, approximation of boundary points.

Dudykevych Anna T. — Cand. Sc. (Ph.-Math.), Assistant Professor of the Chair of Computation Mathematics; e-mail: annatdud@gmail.com;

Kardash Andrii I. — Cand. Sc. (Ph.-Math.), Assistant Professor of the Chair of Programming;

Levytska Sofiia M. — Senior Lecturer of the Chair of Programming, e-mail: sofialev.m@gmail.com

А. Т. Дудыкевич[1]
А. И. Кардаш[1]
С. М. Левицкая[1]

Использование неортогональных шаблонов при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости

[1]Львовский национальный университет имени Ивана Франко

Граничная задача Дирихле для уравнения Лапласа решена методом конечных разностей на неортогональных семиточечном и девятиточечном шаблонах; построена разностная схема и алгоритм ее реализации.

Ключевые слова: граничная задача Дирихле для уравнения Лапласа, неортогональные шаблоны, итерационные методы.

Дудыкевич Анна Теодоровна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики;
Кардаш Андрей Иванович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры программирования;
Левицкая София Михайловна — старший преподаватель кафедры программирования, e-mail: sofialev.m@gmail.com