В.О. Корнієнко, С.Г. Денисюк, А.А. Шиян
(Вінницький національний технічний університет)

ТЕОРІЯ КООПЕРАТИВНИХ ІГОР

Якщо в некооперативних іграх гравці не можуть діяти разом, а під спільними діями може розумітися добровільний обмін інформацією між гравцями про обрані стратегії, функції виграшу тощо, то в кооперативних іграх акцент робиться із стратегічних аспектів на можливості коаліцій,що розглядають автори статті.

Ключові слова: кооперативні ігри, коаліції, нуклеолус, переговора множина.

Кооперативні ігри як узгодження інтересів політичних коаліцій

Отже, в кооперативних іграх упор переноситься зі стратегічних аспектів на можливості коаліцій. Передбачається, що гравці можуть створювати різні коаліції та підписувати зобов’язуючі договори і домовленості. Це означає, що для кожної коаліції є багато варіантів користі, які вона може забезпечити своїм членам. Тут і надалі будемо використовувати певну термінологію.

Інформаційними коаліціями будемо називати групу гравців, які обмінюються один з одним інформацією. Вважається, що в процесі створення коаліції підписуються угоди, які примушують гравців повідомляти необхідну інформацію. При цьому можливість блефу, повідомлення недостовірної інформації, не розглядається. Коаліції, члени яких можуть між собою обмінюватися виграшами, будемо називати коаліціями корисності або просто коаліціями.

Коаліція – це підмножина гравців K□ N; коаліція N називається *тотальною.* Для набору стратегій $s_N = (s_i, i$□ $N)$ через s_K позначається його проекція на $Sk = \times i$□kSi; аналогічно розуміється $s_{\_K}$. Теорія кооперативних ігор робить ставку, в основному на кооперативні дії гравців в процесі гри, тобто її цікавить те, які коаліції утворюються в процесі гри і які умови необхідні для стійкого існування коаліцій. З цим пов’язана суттєва різниця в постановці задачі у порівнянні з теорією некооперативних ігор, основною математичною моделлю якої є гра в нормальній формі.

Гра, в нормальній формі, як досить детальний опис конфліктної ситуації, є дуже складною моделлю для дослідження кооперативних взаємодій гравців. Щоб описати за допомогою гри в нормальній формі навіть переговорний процес, вимагається суттєве ускладнення множини стратегій кожного гравця, що включає як елементи, що відповідають передачі інформації іншим гравцям, так і елементи, що описують реакцію на їх повідомлення.

Основна ідея кооперативних ігор полягає в тому, щоб не розглядаючи переговорний процес як такий, аналізувати можливі його підсумки і робити висновки про реалізацію того чи іншого результату переговорів. Тому і елементами опису гри у формі характеристичної функції є не стратегії гравців, а виграші, які може собі гарантувати та чи інша коаліція.

Припустимо, що у нас є гра $G = (N,(Si), (u_i))$ в нормальній формі. Якщо всі гравці домовляться використовувати стратегічний профіль s_N, то виграші гравців зручно зображати вектором $u(s_N) = (u_i(s_N))$□ R^N. Коли ми перебираємо всі стратегічні профілі з S_N, ми отримаємо деяку кількість в просторі R^N, який зазвичай позначають $V(N)$. Якщо гра кінцева, то отримується деяка кількість, що є не досить зручним. Тому, як правило, з кожним вектором у V(N) включають і всі менші.

Схожі чисельності $V(K)$ можна пов'язати не тыльки з тотальною коалыцією, але й з кожною коаліцією K, хоча це можна зробити різними способами. Ми розглянемо найприродніший спосіб. Наприклад, коаліція K гарантує вектор корисностей x з R^K, якщо існує корельована стратегія σ_K □$\Delta(S_K)$, така що для будь-якої σ_K виконані нерівності

$$u_i\,(\sigma_K,\ \sigma\_K) \geq x_i \ \square i\ \square K$$

Позначимо через $V^{\alpha}(K)$, або просто через $V(K)$, багато тих векторів у просторі R^K, які може гарантувати K. По суті, - це мінімаксна ідеологія.

Що можна сказати про цю множину $V(K)$? По-перше, вони опуклі (це можна перевірити) і нормальні (в тому сенсі, що з будь-якої точки містять менші). По-друге, вони замкнені і обмежені зверху (коли гра кінцева). По-третє, виконана така властивість *суперадитивності:* якщо коаліції K і K' не перетинаються, то $V(K \cup K')$ містить добуток $V(K)$ x $V(K')$. Можна перевірити!

Характеристична функція називається *суперадитивною,* коли для будь-яких коаліцій, що не пересікаються, їх об'єднання може отримати користність не меншу, ніж ці коаліції могли б отримати в сумі, діючи окремо. В цих умовах об'єднання в коаліцію, що включає всіх гравців, є найефективнішим з точки зору сумарної корисності поведінки учасників гри, однак додаткового дослідження потребує стійкість цієї коаліції.

Суперадитивні ігр є типовим випадком. Дійсно, нехай є коаліції S і T з їх виграшами $v(S)$ і $v(T)$. Що заважає коаліції SUT, що утворилася, діяти так, якби такого об'єднання не існувало? Тогді корисність цієї коаліції буде як мінімум дорівнює сумі корисностей коаліцій S і T, забезпечуючи суперадитивність. Такі роздуми є справедливими лише при відповідних припущеннях.

Класична теорія розглядає, в основному, суперадитивні ігри. Основними питаннями, які постають при їх дослідженні – це питання про услови реалізації та стійкості максимальної коаліції і «справедливому» розподілі виграшу $v(N)$ між гравцями.

Як вище згадувалося, зазвичай, ігрові задачі ставляться в нормальній формі. Для дослідження кооперативних взаємодій гру необхідно перевести в форму характеристичної функції. При цьому процедура переходу суттєво залежить від принципу раціональної поведінки, що використовується. Для класичної побудови задачі теорії кооперативних ігор характерна відсутність інформованості членів коаліції про стратегії гравці, які не входять до коаліції. У членів коаліції не передбачаються навіть знання про структуру інших утворених коаліцій. Також передбачається, що вибір стратегій гравцями відбувається одночасно.

Під *стратегією коаліції розуміється* вектор стратегій її учасників, а під *виграшем коаліції* – сума їх виграшів. Характеристична функція визначається виразом

$$V(S) = \max_{y_s \square A_s} \min_{y_{N\setminus S} \square A_{N\setminus S}} [\sum_{i \square S} K_i(y_s, y_{N\setminus S})],$$

де $y_s = (y_i)_{i \square S} \square A_s = \mathbf{\Pi}\, A_i$ – вектор дії учасників коаліції S. Можно відмітити чисті стратегії на змішані. Тоді $v(S)$ буде в точності співпадати з рішенням антагоністичної гри двох облич – коаліції S і коаліції $N\setminus S$ [5 6 7]. Введена таким чином характеристична функція супераддитивна [7].

Не дивлячись на зручність використання максиміну для побудови характеристичної функції, додаткова інформованість гравців може зробити більш логічним використання інших концепцій рівноваги. Звернемо увагу на те, що переговорний процес повинен супроводжуватись передачею гравцями один одному інформації про свої функції виграшу, оскільки подібні дані можуть здійснювати суттєвий вплив на структуру коаліцій. У зв’язку з цим можна припустити, що на момент кінцевого вибору коаліції кожний гравець (будь-яка коаліція) буде володіти інформацією про цільові функції всіх інших гравців (а, відповідно, і всіх можливих коаліцій). В цих умовах коаліція S повинна очікувати від інших гравців дій, спрямованих на максимізацію їх функцій корисності, а не дій, найгірших для коаліції S, як приписує максимін (нагадаємо, що в іграх з довільною сумою мінімаксна стратегія другого гравця може не співпадати з найгіршим, з точки зору першого гравця, його поведінкою). Такі модифікації процедури побудови характеристичної функції можуть наблизити модель до реального процесу переговорів, однак при цьому може порушитися супераддитивність. Щоб використати багаточисельні результатами кооперативної теорії ігор, отриманими для супераддитивних ігор, необхідно для кожної такої процедури перевіряти чи зберігається при її використанні властивість супераддитивності.

Узагальнюючи попередній матеріал, введемо поняття коаліційної гри або гри в коаліційній формі.

Нехай N – множина гравців. Коаліційною грою називається завдання для кожної коаліції $K \square N$ непустої множини $V(K) \square RK$. Множина $V(K)$ відмічає множину тих платежів (користей), які коаліція К може гарантувати своїм членам. Зазвичай, передбачається множина $V(K)$ замкнена, нормальна, обмежена зверху.

Приклад 3. *Гра ринку.* Нехай кожен учасник i володіє певним початковим запасом $\square\ (i)$, належним простору товарів R^l_+, і має функцію корисності u_i: $R^l_+ \to R$. Коаліція K може перерозподілити свої ресурси (тобто перейти до набору $x(i)$ □ $R^{l}{}_{+}$), такому, що $x(K)\!:=\sum_{i\square K}{}^{x(i)}=$ □ $(K))$. Тут $V(K) = \{\ u_i\ \ (x(i)),\ i\in K,\ x(K) =$ □ $(K)\}$.

Трансферабельні користності. Одразу варто виділити важливий випадок – випадок, так би мовити, *трансферабельних корисностей,* або кооперативних ігор з непрямими платежами. А саме, припустимо, що в системі бажаний товар – гроші, і що учасники можуть його передавати один одному. Більш того, припустимо, що корисність цього товару лінійно входить у функцію корисності так, що додавання одиниці грошей збільшує корисність кожного на одиницю. Тоді разом з кожною точкою x в множині $V(K)$ і будь-яка точка y з тією ж сумою координат. Для спрощення ми використовуємо позначення:

$$x\ (K) = \sum_{i\square K}{}^{xi.}$$

Тоді x □ $V(K)$ та y□ R^{K}, $x(K)\ \geq y(K)$ призводить до того, що y□ $V(K)$. У випадку трансферабельних корисностей замість множини $V(K)$ задаються числа □ $(K)=max\,x(K)$, де x пробігає $V(K)$.

У свою чергу, $V(K)= \{\ x$ □ $R^{K}, x(K)\leq$ □ $(K)\}$.

Таким чином, коаліційна гра з побічними платежами – це сімейство □ чисел **(**□ $(K),\ K$□ $N)$, параметризоване коаліціями K. Говорять також про гру в характеристичній формі.

Теорія кооперативних ігор робить ставку, в основному на кооперативні дії гравців в процесі гри, тобто її цікавить те, які коаліції утворюються в процесі гри і які умови необхідні для стійкого існування коаліцій. З цим пов’язана суттєва різниця в постановці задачі у порівнянні з теорією некооперативних ігор, основною математичною моделлю якої є гра в нормальній формі.

Гра, в нормальній формі, як досить детальний опис конфліктної ситуації, є дуже складною моделлю для дослідження кооперативних взаємодій гравців. Щоб описати за допомогою гри в нормальній формі навіть переговорний процес, вимагається суттєве ускладнення множини стратегій кожного гравця, що включає як елементи, що відповідають передачі інформації іншим гравцям, так і елементи, що описують реакцію на їх повідомлення.

Основна ідея кооперативних ігор полягає в тому, щоб не розглядаючи переговорний процес як такий, аналізувати можливі його підсумки і робити висновки про реалізацію того чи іншого результату переговорів. Тому і елементами опису гри у формі характеристичної функції є не стратегії гравців, а виграші, які може собі гарантувати та чи інша коаліція.

Приклад 4. *Прості ігри.* Це коли □ $(K)=0$ *або 1.* Подібні ігри зустрічаються при аналізі схем голосування. Як правило, передбачається, що
□ $(\emptyset) =0$, □$(N)= 1$, і □ монотонна.

Розподіл. Розподілом будемо називати довільний вектор x із R^N; дозволений розподіл – вектор із $V(N)$. Розв'язання коаліційної гри повинно вказувати деяке припустимий розподіл, який виходить в результаті раціональних дій (договорів) гравців. Знову тут немає однозначної відповіді. Зазвичай теорія йде шляхом формулювання деяких вимог до рішень, які виявляються розумними. Наприклад, природно вимагати, щоб рішення давало кожному гравцю не менше того, що він може отримати поодинці (вимога індивідуальної раціональності). Проте аналогічну вимогу можна виказати і стосовно будь-якої коаліції (якщо вона може утворитися, то ми неявно передбачаємо). Тут зручно ввести відповідну мову.

Домінування. Для двох розподілів x та y з R^N та коаліції K будемо писати

$$x \succ_K y, \text{ якщо } x_i > y_i \ \forall i \in K.$$

Говорять, що розподіл x *домінує* розподіл y, якщо знайдеться (непуста коаліція) K така, що $x \succ_K y$ і $x_K \in V(K)$.

Зміст цього в тому, що коаліція K не погодиться на вектор платежів y якщо, діючи самостійно, вона може отримати кращий для неї набір користі x_K. Тут замішені дві різні властивості: щоб x був кращим для коаліції К, і, одночасно, щоб x був досяжним коаліцією K.

Відмітимо одразу, що відношення домінування на множині всіх розподілів в загальному випадку не є транзитивним чи антисиметричним (тому, що K може мінятися від випадку до випадка). Тим не менше воно дозволяє аналізувати припустимі розподіли. Природно, що найбільшу цікависть викликають максимальні елементи відносно домінування чи недомінуючі розподіли. Це нас приводить до поняття ядра та інших понять розв'язання коаліційних ігор.

Концепції рішення для кооперативних ігор та приклади

В теорії кооперативних ігор, як і взагалі в теорії ігор, не існує єдиної концепції рішення. Це пов'язано з тим, що на початковій стадії розвитку теорії були розроблені досить прості моделі ігор, які легко піддавалися аналізу, і, відповідно, прості концепції рішень, такі, як *С*-ядро і *НМ*-рішення (див. нижче). В процесі розвитку теорії постало питання про практичне використання отриманих результатів.

Для того, щоб наблизити теорію до прикладів ігор, які зустрічаються в житті, були розроблені більш складні моделі, наприклад, ігри з нетрансферабельною корисністю тощо. Паралельно з'являлись як узагальнення понять рішення на ці більш складні моделі, так і нові концепції рішень.

Деякі концепції рішення прийшли в теорію ігор із теорій суспільного благополуччя і кооперативного вибору[8]. Темою дослідження цих теорій є задача вибору колективних рішень. Зрозуміло, що колективний вибір повинен бути (або бажано, щоб був) єдиним. Для звуження кола можливих рішень ці теорії користуються аксіоматичними припущеннями про стратегії прийняття колективних рішень. В цих аксіомах широко використовується поняття «справедливого» розподілу благ (тобто розподілу виграшів, корисності тощо).

З поняттям справедливості в умовах прийняття рішень суспільством пов'язана окрема проблематика. Аксіоматичний підхід передбачає, що при дослідженні ситуації вибору, для того, щоб обґрунтувати вибір суспільства, дослідник робить припущення, більш менш очевидні, про моральні установки даного суспільства, і, тим самим, визначає, що в даному суспільстві розуміється під справедливістю. Парадокс полягає в тім, що багато припущень, що відповідають здоровому глузду по одиниці, разом опиняються такими, що протирічать одне одному. Сьогодні в науці не існує єдиної думки про те, що розуміти під справедливістю. Двома основними концепціями справедливого розподілу благ є егалітаризм і утилітаризм[8]. Егалітаризм стверджує, що при розподілі благ, в першу чергу, слід звертати увагу на корисність найбільш «обділених» членів суспільства. А утилітаризм вважає справедливим «ефективний» розподіл, що приводить до найбільшого значення суми корисностей членів суспільства.

Ядром коаліційної гри *V* називається множина всіх припустимих не домінуючих розподілів, воно позначається $C(V)$.

В силу важливості цього поняття дещо перепишемо визначення. Нехай даний розподіл x. Скажемо, що коаліція *К* відкидає x (чи може його покращити), якщо існує такий вектор y_K із $V(K)$, що для будь-якого гравця i із коаліції *К* виконано $y_i > x_i$. Тоді ядро складається із таких допустимих розподілів (тобто елементів $V(N)$), які не відкидаються ніякою коаліцією. Можна і так зазначити: елемент x належить ядру $V(N)$ тоді і тільки тоді, коли

a) $x \in V(N)$, і

b) для будь-якої (непустої) коаліції *К* проекція x_K не належить множині $V(K)$[4].

Звідси видно, що ядро – замкнена і обмежена підмножина в $V(N)$. Елементи із ядра можуть претендувати на звання адекватного рішення гри. Вони оптимальні за Парето (лежать на границі Парето $V(N)$) та індивідуально раціональні. Ядро може опинитися більшим і тоді потрібно виділити «найкращий» елемент із ядра. Менш приємно, якщо ядро пусте, що буває досить часто. Наприклад, нехай троє ділять 100 грн., і будь-яка пара може забезпечити собі 100 грн. Тут ядро пусте, і вони навряд чи домовляться.

Рішення Неймана-Моргенштерна. Щодо коаліційних ігор, то можлива пустота ядра спричинила пошук інших понять рішень. Тут варто нагадати історично перше поняття рішення за Нейманом-Моргенштерном (чи *Н-М-рішення*).

Назвемо імпутацією (поділом) оптимальний та індивідуально раціональний вектор x із $V(N)$; інакше кажучи, x повинен лежати на границі Парето множини $V(N)$ і для будь-якого i повинна бути виконана нерівність $x_i \geq \max (y, y \in V(\{i\})) = \square_i$. Позначимо через $E(V)$ множину всіх імпутацій гри *V*.

Визначення. *Н-М-рішення* гри V називається підмножина $Z \subset E(V)$? Яке задаволняє двом умовам:

(*) якщо $y \in E(V) \setminus Z$, то знайдеться $x \in Z$, яке домінує y.

(**) якщо y і x із Z, то x не домінує y.

Можна сказати, що умова (**) – це умова внутрішньої стабільності Z, тоді як (*) - це умова зовнішньої стабільності. Іншими словами, рішення в сукупності домінує все, а внутрі себе вільно від домінування.

Наприклад, в грі більшості (поділ 300 грн.; υ (1,2,3) = 300, υ (2-х елемен- тних коаліцій) = 300, υ (гравця) = 0) множина із трьох розподілів (150, 150, 0), (150, 0, 150), (0, 150, 150) утворює Н-М-рішення. Насправді, легко зрозу- міти, що ніякий з цих розподілів не домінує один одного. З іншого боку, роз- глянемо довільний розподіл (x_1, x_2, x_3); це означає, що x_i невід'ємні та в сумі дорівнюють 300. Але тоді два числа із трьох менше або дорівнюють 150. Не- хай $x_1, x_2 < 150$. Тоді цей розподіл домінується розподілом (150, 150, 0). До речі, в цій грі є багато інших Н-М-рішень.

Нуклеолус. Це поняття використовується тільки для ігор з побічними платежами. Почнемо з технічного терміна. Ексцес коаліції S при даному пла- тіжному векторі x є число

$$e(S, x) = \upsilon(S) - \sum_{i \square S} x_i.$$

Розподіл x належить ядру тоді і тільки тоді, коли всі ексцеси ≤ 0. □-ядро

– коли всі ексцеси ≤ □. *Біля-ядро* (near-core) – найменше непусте □-ядро. Це опукла множина. Якщо йти ще далі (рухаючи стінки багатогранника, що за- дає ядро), ми прийдемо до єдиної точки, яка називається нуклеолусом.

Нуклеолус є шматочно-лінійною функцією на множині всіх ігор. Геоме- трично це «центральна точка» ядра, коли воно непусте.

Переговорна множина. Переговорна точка гри υ - це така імпутація α, що для будь-яких гравців i та j будь-яке «заперечення» i проти j натикається на «конрзаперечення» j проти i. Тут заперечення (objection) – це коаліція S (що містить *i, але не j*) та імпутація □, доступна S і найкраща, порівняно з □ для всіх членів S. Конрзаперечення – коаліція T (що містить *j без i*) і допус- тима для T імпутація □, яка (слабко) краща, ніж □, для членів $S \cap T$, *і* (слабко) краща, ніж □, для членів $T - S$.

Таке поняття було інспіровано спостереженням за гравцями в експери ментальних ситуаціях. Порівняно з Н-М-рішенням, воно виражає стабіль- ность єдиної імпутації, а не всієї множини. Існує варіант поняття, де індивіди i та j замінюються коаліціями.

Література

1. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.:ИПУ, 2005. – 138с.
2. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводныйкурс. Учебное пособие. – СПб.: 2001. – 342 с.
3. Данилов В.И. Лекции по теории игр /КЛ/ 2002/ 001. – М.: Российскаяэко- номическая школа, 2002
4. Вилкас Э.Й. Аксиоматическое определение значения матричной игры // Теория вероятностей и ее применения. 1962. Том. 8. № 3. С.324-327.
5. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение.М.: Наука, 1970.
6. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.
7. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
8. Lave Ch., March J.G. An Introduction to Models in Social Sciences. N.Y.,1978.
9. Persson T., Tabellini G. Political Economics: Explaining Economic Policy.- Cambridge, MA: MIT Press, 2000. – 533 p.
10. Яковлев И.Г. Информационно-аналитические технологии и политическое консультирование // Полис. №.2. - 1998.
11. Саати Т. Математические методы исследования операций. М., 1962.
12. Black Duncan On the Rationale of Group Decision-making. – The Journal of Political Economy, 56, P. 23-34.
13. Downs Antony An Economic Theory of Democracy, New York; Harper & Row.
14. Hotelling, Harold Stability in Competition // Economic Journal/ - № 39.
15. Шиян А.А. Управление государством. Учебник для Президентов, Премьеров и Парламентариев. - Винница,2005. – Веб-сайт http://soctech.narod.ru.
16. Шиян А.А. Формирование иерархических социальных структур как способ проведения избирательных кампаний. Теория и результаты апробации. Анализ одной избирательной кампании по одномандатному избирательному округу на выборах в государственную Думу России в 1999 году // Политический маркетинг (Москва, Россия). - 2000. - №3. - с.9-43.
17. Шиян А.А. Выборы в Украине: технологический тупик // Политический маркетинг (Москва). – 2006. - №5. – С.31-38.