

В. О. Корнієнко, С. Г. Денисюк, А. А. Шиян  
(Вінницький національний технічний університет)

## ДВОПАРТІЙНА МОДЕЛЬ ІЗ ОДНОВЕРШИННОЮ ПЕРЕВАГОЮ ВИБОРЦІВ

*Розглядаються індивідуальні переваги людини з метою їх використання для аналізу соціального вибору та політики. Аналізується т. з. «функція корисності», яка дозволяє здійснювати аналіз різних альтернатив.*

**Ключові слова:** двопартійна модель, математичне моделювання, функція корисності.

Використання математичного моделювання в політології робить необхідним глибоке осмислення даного методу пізнання об'єктивних закономірностей функціонування і розвитку суспільства, що дає можливість отримати різні форми організації навчального процесу і забезпечують міждисциплінарне дослідження актуальних суспільно-політичних предметів<sup>1</sup>.

Для політичних потреб ми можемо функцію корисності<sup>2</sup> окремого індивіда представити як опуклу догори, і як таку, яка має «один пік». Це означає, що наш індивід із усіх можливих для свого вибору параметрів вибирає всього *одне-єдине* значення, яке для цього є найбільш «корисним». Фактично, це значення і буде відповідати значенню того параметра, який для нього означає *політичний вибір*.

Звернемо увагу, що ми будемо розглядати функцію переваг  $V(q)$  як задану на *одновимірному* просторі: в загальному вигляді задача для випадку, коли переваги виборця зосереджені на *двохвимірному* просторі ще не вирішена.

Що може відповідати «одновимірній перевазі» для виборця? Це може бути, наприклад, ставка податку, яку планує запровадити та чи інша партія, це може бути термін вступу країни до певної коаліції або термін початку певних дій уряду (наприклад, закінчення мораторію на продаж землі), це може бути метраж квартири або літраж двигуна автомобіля, починаючи із якого будуть введені «підвищені податки»... Це може бути і розмір «мінімальної» зарплати чи пенсії, — що більш знайомо українцям за поза строковими виборами 2007 року до Верховної Ради.

Математично «одно-пікову» функцію переваг можна визначити наступним чином. По-перше, нехай позначено  $q$  як політичний вибір даного виборця, а через  $Q$  – множину можливих виборів усіх виборців. Цю множину ми розглядаємо як «впорядковану», тобто на множині  $Q$  встановлена операція «<», «=» та «>». Це значить, що виборець здатний порівнювати партійні програми між собою. Позначимо через  $V^i(q)$  – *непряму* функцію корисності для  $i$ -того виборця. Ця функція переваг дозволяє виборцю визначити, яка саме партійна програма є для нього найпривабливішою. Для кожного із  $n$  виборців існує своя функція корисності.

Кожен із виборців, наприклад виборець  $i$ , має свою так звану «ідеальну

точку», тобто саме таке значення характеристики  $q_i$ , яке надає максимальне значення для його непрямої функції корисності  $V^i(q_i)$ . Іншими словами, це така точка для  $i$ -того виборця, що для довільного значення *іншого* політичного вибору  $q$  має місце співвідношення  $V^i(q_i) \geq V^i(q)$  для всіх  $q \in Q$ .

Саме це і є визначення для «одно-пікової» функції корисності виборця, яку ще називають *однопіковою* функцією переваг при здійсненні виборцями соціального вибору.

Введемо поняття так званого «медіанного виборця». Медіанним виборцем називається індивід  $M$ , якщо кількість виборців із індивідуальними перевагами, які задовольняють співвідношенню  $q_i < q_M$  є такою ж самою, як і кількість виборців індивідуальні переваги яких задовольняють співвідношенню  $q_i > q_M$ . Іншими словами, «медіанний» виборець поділяє всіх виборців на «дві рівні по кількості половини», одна із яких має перевагу *меншу* по величині, а друга – *більшу* по величині за той вибір, який здійснює медіанний виборець.

Коли ми пишемо, що виборці мають «однопікову» функцію переваг, мимаємо на увазі наступне. Звичайно, це припущення не є природною формою вираження всіх можливих переваг індивіда. Це припущення стосується лише інтер'єру саме «соціального» вибору індивіда, коли він здатний *упорядкувати* ті Програми, ту інформацію, яку надають йому політичні партії. Більш того: наше припущення про те, що має місце *одномірне* впорядкування переваг можливо тільки за умови, коли індивід здатний *агрегувати* багатовимірну сукупність переваг до *одного числа*. Насправді, звичайно, партійні програми та політичні партії відрізняються одне від одного за досить великою кількістю параметрів, і тому наше припущення не може повністю описати все багатство ситуацій. Більш того: на вибір індивіда впливають багато факторів – навколишнє середовище, близькі та рідні, референтні групи тощо.

Так чому ж *однопікова* функція переваг так часто використовується в сучасних математичних моделях політичних процесів, — і, передовсім, при опису здійснення політичного вибору? Як правило, гарантією для нас є те, що кожен із виборців здійснює певне *впорядкування альтернатив*, розглядаючи політичні партії чи політиків. Дійсно: *всі* політичні партії є об'єктами одного рівня ієрархії, і саме тому вони *можуть* бути, по перше, «названі» характеристиками оного роду, і, по-друге, впорядковані. Застосовуючи таке припущення ми, по суті, використовуємо так званий «принцип Оккама»: вибираємо *мінімальну* кількість припущень, які, тим не менше, *дозволяють* нам отримати рішення задачі. Подальший розвиток може проходити в напрямі розробки математичних моделей, які дозволяють більш адекватно урахувати вплив різних обставин на прийняття рішення індивідом. Але ці *точні* моделі ми зможемо тоді *зістикувати* із нашою моделлю, — тому описана нами модель може бути інтегрована у більш точні моделі нового покоління.

### **Теорема про медіанного виборця.**

Широке застосування описаного вище підходу до опису соціального вибору ґрунтується на так званій Теоремі про медіанного виборця (ТМВ)<sup>3</sup>.

Ця теорема широко використовується при аналізі так званої «прямої демократії» з *відкритим* списком (коли виборці приймають *спільне* рішення – наприклад, при виборах в Парламент, при референдумах тощо). При такій технології організації виборів виборець проводить вибір із *пар альтернатив*,

попарно порівнюючи їх та визначаючи альтернативу-переможця.

**Теорема.** Розглянемо набір політичних виборів  $Q \square R$ , нехай  $q \square Q$  є політика, яка вибирається виборцем, і нехай  $M$  є медіанний виборець, який вибирає ідеальну точку  $q^M$ . Якщо всі виборці мають одно-пікові функції переваг на  $Q$ , тоді (1)  $q^M$  завжди перемагає любую іншу альтернативу  $q' \square Q$  при  $q' \square q^M$ , в парному змаганні, (2)  $q^M$  є завжди переможцем в прямій демократії з відкритим списком.

*Доведення.* Розглянемо індивіда, який має функцію переваг, пік якої припадає на значення  $q_i < q_M$ . Подивимося, чи зможе він перемогти у змаганні альтернатив нашого медіанного виборця із його перевагою в  $q_M$ . «За» медіанного виборця проголосують *всі* ті виборці, піки яких розташовані в області  $q_i > q_M$ . Таких виборців – рівно половина. Додаємо ще нашого медіанного виборця – і маємо, що *понад* половину виборців «голосує *проти*» вибору  $q_i$ . Таким чином, розглянутий нами виборець виявився *переможеним* медіанним виборцем. Для випадку  $q_i > q_M$  – доведення є аналогічним. Таким чином, ми бачимо, що політика, яка перемагає в рамках прямої демократії, повинна бути  $q_M$ , тобто повинна бути ідеальною точкою для медіанного виборця.

Якщо громадяни мають однопікові переваги та їх колективний вибір є одновимірним (тобто урахується лише одна *політична* характеристика), не дивлячись на те, що *індивідуальні* переваги людей різняться між собою, має випадок *детермінованого*, тобто «запрограмованого» колективного вибору. Дійсно, певним значенням  $q$  люди розділяються на 2 групи, одна із яких віддає перевагу *меншим*, а інша – *більшим* значенням політики. Переваги будуть агрегуватися в рішення, тому що люди, які надають перевагу  $q_i < q_M$ , не мають нічого спільного із людьми, які надають перевагу значенням політики  $q_i > q_M$ . Ці дві групи людей просто не можуть об'єднатися в єдину групу – а без цього об'єднання вони не мають ніяких шансів «перемогти» медіанного виборця.

*Довнсіанське змагання партій та конвергенція партійних програм*<sup>4,5</sup>.

Попередні розгляд базувався на прямій демократії, коли люди здійснювали свій вибір і приймали безпосереднє рішення.

Але в більшості країн люди використовують демократію *представницьку*, вибираючи не те чи інше рішення, — а вибираючи *агреговану* Програму дій. Іншими словами, люди спочатку вибирають політичну партію, а вже вона здійснює цілий комплекс дій – імплементуючи-впроваджуючи свою Програму дій. Очевидно, що політична партія «хоче» досягти перемоги. Також зрозуміло, що результати теореми про медіанного виборця повинні бути використані партією, яка прагне перемоги. Яким же чином це можна зробити? Відповідь дається теоремою, яка впливає із піонерських результатів Хотелінга (1929р)<sup>4</sup> та Довнса (1957р)<sup>5</sup>.

Розглянемо ситуацію, коли ми маємо дві партії:  $A$  та  $B$ . Вони реалізують дві альтернативні політики  $q_A \square Q$  та  $q_B \square Q$ . Під «політиками» ми розуміємо *кредитоздатні обіцянки*: наприклад, рівень податків, виплату певних коштів певним групам населення тощо. Таким чином, партія  $A$  буде впроваджувати політику  $q_A$ .

Позначимо через  $P(q_A, q_B)$  ймовірність того, що партія  $A$  переможе за умови, що вона вибирає політику  $q_A$ , а партія  $B$  – вибирає політику  $q_B$ , відповідно. Перемога для партії  $B$ , відповідно, задається формулою  $1-P(q_A, q_B)$ .

Таким чином, кожна партія вирішує наступну задачу:

$$\begin{aligned} \text{Party A: } & \max_{q_A \in Q} P(q_A, q_B) \\ \text{Party B: } & \max_{q_B \in Q} (1 - P(q_A, q_B)) \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо більшість популяції виборців надає перевагу вибору політики  $q_A$ , то  $P(q_A, q_B)=1$  і перемагає партія  $A$ . Якщо ж більша частина надає перевагу політиці  $q_B$ , то  $P(q_A, q_B)=0$ . Якщо ж однакова кількість людей надає перевагу кожній із партій, то, очевидно,  $P(q_A, q_B)=1/2$ .

Так як ми вважаємо, що переваги є одно-піковими, то, використовуючи Теорему про медіанного виборця, ми доходимо висновку, що перемога буде за тією партією, яку *вибере* медіанний виборець. Але медіанний виборець вибирає ту партію, яка буде проводити політику, яка є «ближчою» до його «потреб». Позначивши функцію переваг медіанного виборця індексом  $M$ , із Теорему про медіанного виборця отримаємо наступний висновок: якщо  $V^M(q_A) > V^M(q_B)$ , то перемагає партія  $A$ , а якщо  $V^M(q_A) < V^M(q_B)$ , то перемагає партія  $B$ , а коли  $V^M(q_A) = V^M(q_B)$ , то одна із партій перемагає з ймовірністю  $1/2$ . Таким чином, отримуємо:

$$P(q_A, q_B) = \begin{cases} 1 & \text{if } V^M(q_A) > V^M(q_B) \\ 1/2 & \text{if } V^M(q_A) = V^M(q_B) \\ 0 & \text{if } V^M(q_A) < V^M(q_B) \end{cases} \quad (2)$$

Використовуючи це, тепер ми можемо побудувати наступну *політичну* гру, використовуючи стандартний математичний апарат теорії ігор. Гра має наступні стадії:

- 1) Дві політичні партії некооперативно (нескоординована, кожна окремо) вибирають свої політичні платформи  $(q_A, q_B)$ .
- 2) Індивіди голосують за ту партію, якій вони надають перевагу.
- 3) Партія – переможець отримує політичну силу і впроваджує ту політику, яку вона обіцяла на першій стадії.

Це є гра для  $n+2$  гравців:  $n$  виборців із функціями переваг («виграшами»)  $V^i(q_i)$  та 2-х партій із виграшами (1) в цій моделі досконалою рівновагою Неша в під-іграх є  $n+2$  стратегій: по одній для кожної із партій та  $n$  стратегій для кожного із виборців, — цей набір стратегій і визначає, яка із партій переможе і як саме виборці будуть голосувати.

Загалом кажучи, ця гра є досить складною для того, щоб її можна було рішити у загальному випадку. Але ми можемо скористатися Теоремою про медіанного виборця, яка дає нам можливість зосередитися виключно на грі

двох партій. Більш детально, досконала рівновага Неша в підіграх задається наступною теоремою.

**Теорема (Довнсіанське сходження (конвергенція) політичних програм).** Розглянемо вектор політичного вибору  $(q_A, q_B) \in Q \times Q$ , де  $Q \subseteq R$ , дві партії  $A$  і  $B$ , які хочуть бути обраними, і можуть обіцяти політичну платформу. Нехай  $M$  є медіанний виборець, який має свою «ідеальну точку» вибору політики,  $q^M$ . Якщо всі виборці мають одно-пікові функції переваг на  $Q$ , тоді в унікальній досконалій в підіграх рівновазі Неша обидві політичні партії повинні вибрати наступні політичні платформи:  $q^*_A = q^*_B = q^M$ .

*Доведення.* Доводити будемо від зворотного.

Розглянемо наступний випадок:  $q_A < q_B \leq q^M$ . Для цього випадку ми маємо  $V^M(q_A) < V^M(q_B)$  внаслідок того факту, що функція переваг для медіанного виборця є одно-піковою. Тому ясно, що партія  $B$  буде мати перевагу, і  $P(q_A, q_B) = 0$ , тобто партія  $B$  переможе на виборах. Очевидно, що партія  $A$  має мотивацію збільшувати значення  $q_A$  для своєї політики (політичної платформи) до  $q_A \in (q_B, q^M)$ , якщо  $q_B < q^M$  (і вигравши тим самим вибори), або до  $q_A = q^M$ , якщо  $q_B = q^M$  (і отримуючи шанс в 1/2 виграти ці вибори). Внаслідок цього конфігурація  $q_A < q_B \leq q^M$  не може бути рівновагою: одному із гравців вигідно відхилитися від неї. Аналогічно розглядаються всі інші можливі випадки:  $q_B < q_A \leq q^M$  тощо.

Тепер розглянемо наступну конфігурацію:  $q_A = q_B < q^M$ . Чи може вона бути рівновагою? Відповідь очевидна: *ні!* В цьому стані обидві партії мають шанс в 1/2 стати переможцем. Але коли одна із партій, наприклад, партія  $A$ , змінить свою політику до  $q_A \in (q_B, q^M)$ , вона отримає перемогу на виборах!

Таким чином, залишається тільки випадок  $q_A = q_B = q^M$ . Це є дійсно *рівновага*, від якої жодному із гравців не вигідно відхилитися. Дійсно, нехай, наприклад, партія  $A$  вибрала *інше* значення для своєї політики. Тоді вона *зменшить* свої шанси виграти до 0!

Теорема доведена.

Ми й окреслили той напрямок, в рамках якого сьогодні проводяться інтенсивні дослідження в сучасному політичному моделюванні, хоча в цьому розділі ми розглядали найпростіші випадки. Звичайно, в реальності виборець використовую не одномірний простір для політичних характеристик, та й його функція переваг часто не є однопіковою. Крім того, є ще так звані «ідеологічні» партії, які мають досить малий простір для зміни політичних платформ (такі партії часто називають «партизанськими»).

Проте навіть отримані результати дають нам можливість описати ряд процесів, які мають місце в сучасній Україні. Наприклад, на дострокових виборах до Верховної Ради в 2007 р. мало місце сходження політичних програм кількох політичних сил.

Так, партійні програми, рекламні ролики, гасла та поведінка для блоків БЮТ і НУНС мали надзвичайну схожість саме внаслідок тієї обставини, що ці блоки орієнтувалися на один і той же електоральний сегмент. А сходження це – наочний наслідок теореми про Довнсіанське сходження (конвергенція) політичних програм.

Цілком за аналогічною причною схожими були і політичні програми СПУ та Блоку Литвина, які теж «грали» на одному електоральному полі.

Також внаслідок цієї теореми, а також наявності «прохідного бар'єру» в 3% для проходження до Верховної Ради «малі» партії повинні щезнути із політичної арени: вони будуть змушені вибирати ті ж самі політичні платформи, що й партії «великі», — але їх «впізнаваність» для електорату є досить малою.

### Література

1. Корнієнко В. О. Моделювання процесів у політико-комунікативному просторі [Текст] : Монографія / В. О. Корнієнко, С. Г. Денисюк, А. А. Шиян. — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. — 185 с.
2. Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. Oxford: Oxford University Press, 1995. — 977p.
3. Black Duncan On the Rationale of Group Decision-making. — The Journal of Political Economy, 56, P. 23-34.
4. Downs Antony An Economic Theory of Democracy, New York; Harper & Row.
5. Hotelling, Harold Stability in Competition // Economic Journal/ - № 39. — P/ 41-57