УДК 519.876.5:628.97:711.3

МЕТОД ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО БІЛЬЯРДУ НА РЕШІТКАХ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОСВІТЛЕННЯ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОЇ ТЕРИТОРІЇ

Лисогор Василь Микитович *д.т.н., професор*
Вінницький національний аграрний університет
Шуллє Юлія Андріївна *к.т.н., доцент*
Вінницький національний технічний університет
Цимбал Марина Анатоліївна *здобувач*
Вінницький національний аграрний університет
Lisogor V.
Vinnitsa National Agrarian University
Shulle Y.
Vinnytsya National Technical University
Tsymbal M.
Vinnitsa National Agrarian University

Анотація: *стаття присвячена використанню математичного більярду на решітках для визначення оптимального освітлення сільськогосподарської території, на якій розташоване підприємство та поселення для проживання працівників. Новизна запропонованого авторами підходу отримана за рахунок вдалого зуміщення використання складного теоретичного матеріалу – математичного більярду на решітках з виконанням практичних вимог забезпечення ефективної роботи цього підприємства.*

Ключові слова: *сільськогосподарська територія, математичний більярд на решітках, оптимальне освітлення, підприємство, працівники.*

Вступ. Обгрунтування підходу досліджень

Метод математичного більярду на решітках доцільно використовувати у випадку, коли необхідно визначити мінімальну кількість джерел освітлення певної території. Вказане дозволяє вірно розмістити лампи на досліджуваній території так, щоб за допомогою мінімізації кількості ламп освітити задану територію.

У випадку, коли територія є опуклою, то для освітлення її може бути достатньо наявності однієї лампи. При чому лампа може знаходитись у довільному місці досліджуваної території. У випадку неовуклої території необхідність освітлення перетворюється в достатньо складну задачу, яка потребує використання відповідних методів досліджень.

Математичні задачі на решітках пов’язані з творчістю великої кількості професійних математиків, освітян, аматорів. Напрацювання на цьому терені пов’язані з іменами Леонардо Пізанського (Фібоначчі), Кардано, Тарталья, Ферма, Лейбніца, Ейлера, Монжа, Гауса, Гамільтона та ін

Починаючи з останнього двадцятиріччя дев’ятнадцятого століття, значний доробок у розвиток літератури по математичним розвагам внесли професори Едуард Люк (Франція), В. Болл (Англія), Г. Шуберт (Німеччина), вчителі В. І. Обреїмов і Є. І. Ігнатьєв (Росія), академік Я. В. Успенський (Росія), професор М. Крайчик (Бельгія), Я. І. Перельман (Росія).

ISSN 2306-756X

Опису руху більярдної кулі присвячена книга фізика Г.Коріоліса, що написана ним у 1835 році. Властивості більярдів обговорювалися в наукових працях А. Пуанкаре, Г. Біркгофа і Ж. Адамара. Великий внесок в розуміння математичних задач більярдів зробив фізик Н. С. Крилов. Математичний апарат для вивчення властивостей більярдів з'явилися в 70-х роках, після того, як в працях Д.В.Аносова, Я.Г.Сіная, С. Смейла та інших було створено новий напрямок теорії динамічних систем, які отримали назву теорії гіперболічних динамічних систем. Праця Сіная, тобто динамічних систем з частинними похідними, відкрила двері для проникнення динамічних систем у математичну теорію більярдів. У монографії Гальперіна Г. А., Землякова А. Н. розкривається поведінка більярдного шару на столі довільної форми без луз. Опис такої поведінки приводить до розв'язку різноманітних проблем математики та механіки, задач на переливання рідин, освітлення дзеркальних кімнат, особливостей поведінки фігур Ліссажу [1].

У наступній публікації конструюється, досліджується, оптимізується загальна задача розробки методу використання математичного більярду на решітках для оптимального освітлення довільної території с Наша територія маєсвої особливості, бо вона є сільськогосподарською площею.

Слідуюча публікація характеризує розбір задачі «Освітлення міста», точніше розглядає питання «Світло у лабіринті» [3]. Результати цих досліджень ми також використаємоу рішенні своєї задачі.

Якщо перших три публікації відображають частину нашої статті, то слідуючі посилання [4, 5, 6, 7] пояснюють практичну сторону ефективго функціонування нашого об'єкта дослідження. Зауважимо, що незважаючи на наголос практичності, тут розглядаються роботи достатньо глибокого теоретичного рівня.

У навчальному посібнику Пліс О. І., Сливіної Н. О. розглядаються важливі для нас рівняння *f(x)=0* рівномірного ділення проміжку навпіл (метод біекцій), метод простих ітерацій, методи Ньютона, Гауса, Сімсона, Коші, лінійної регресії,найменших квадратів, градієнтного спуску. Особливо відмітимо, що у навчальному посібнику розгляжається задача нерівномірного розбитття проміжку на основі використання метожу золотого перетину і чисел Фібоначі. Знайшли своє місце також використання рівнянь з частинними похідними [4].

У навчальному посібнику Крутицької Н. Ч. та Шишкіна О. О. детально розглянуті питання по використанню визначників, алгебри матриц, лінійного та евклідового простору, лінійних операторів, квадратичних і білінійних форм, методом регуляризації Тихонова.

Навчальний посібник трьох авторів Косак О., Тумашової О., Косак О. розглядає методи наближених обчислень, пов'язаних з елементами теорії похибок, методами розв'язання нелінійних рівнянь, наближеної функції, наближеного обчислення означених інтегралів, наближене розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем, наближене розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними [6].

Аналіз показує, що наведені джерела [4, 5, 6] між собою пов'язані, наприклад у джерелі [6] розкритий метод використання золотого перетину та чисел Фібоначчі на основі використання сучасних прикладних програм.

Розкриємо суть і зміст останньої публікації. Студентка Крохмальова Т. П. та доцент Величко В. Є. Сумського державного педагогічного університету обублікували статтю високого рівня, що розкриває один з підходів розв'язання некоректно поставлених задач по

Тихонову А. Н. [5] з розробкою наближеногго метожу рішення та наведенням

ISSN 2306-756X

результатів чисельногго екперименту.

Мета публікації: розробити підхід та використати метод математичного більярду на решітках для визначення чисельних оцінок оптимального освітлення сільськогосподарської території.

Основний результат публікації

Дослідимо питання: якою найменшою кількістю джерел світла (ламп) можна освітити внутрішню частину місцевості Ω? Звичайно, якщо місцевість Ω *опукла* (тобто з кожними двома її точками A, B весь відрізок AB належить місцевості Ω), то достатньо одного світильника, який можна розмістити у довільному місці (Рис 1). Дійсно, якщо O – лампа, а A – довільна точка місцевості Ω, то промінь OA освітлює точку A; таким чином, всі точки місцевості Ω освітлені лампою O.

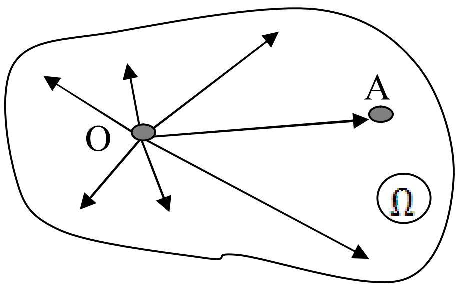

Рис. 1. Характер розташування світильника та сприймаючої точки

Якщо площа Ω *неопукла*, тоді одної лампи може і не вистачити: на рис. 2 лампа O не освітлює ні одної точки A, що лежить в заштрихованій області.

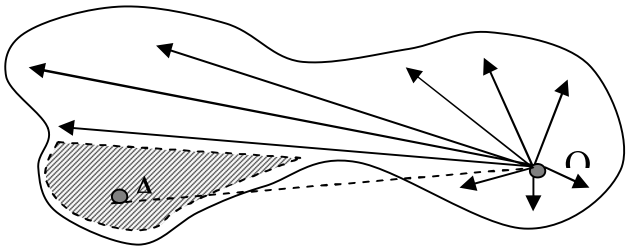

Рис. 2. Розташування світильника на неопуклій місцевості

На рис. 2 невдало обрано місце розташування лампи: точка на рис.3 обрана більш вдало, тому лампа O освітлює повну територію Ω.

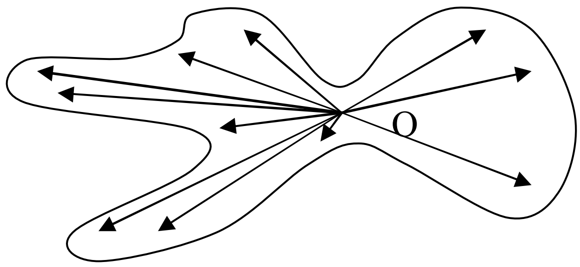

Рис. 3. Освітлення зіркової області

Якщо область Ω містить таку точку O, з якої видно всі інші її точки (як, наприклад,

ISSN 2306-756X

область на рис.3), то область Ω називають *зірковою*, а точку O – «точкою видимості». До зіркових областей відносяться, в тому числі, всі опуклі фігури. Будь-яку зіркову область можна освітити одною лампочкою. Тільки потрібно розрахувати у якому місці її краще помістити [1, с. 78].

Припустимо тепер, що Ω – *не зіркова* область: ніяка її точка O не є «точкою видимості». Тоді одна лампа, в яке б місце області її не помістили, повністю її не освітить; для освітлення Ω потрібно більше одної лампи.

Рух променя світла при відбитті від границі області відбувається по більярдному закону «кути падіння і відбивання рівні». Тому будемо вважати, що границя області Ω – дзеркальна, і будь-який промінь світла при попаданні на границю відбивається від неї по більярдному закону. При такій постановці задача, що розглядається, з одного боку,має спроститися, оскільки багато невипуклих областей, границі яких раніше «поглинали» світло і які не могли бути освітленими одною лампою, тепер, маючи дзеркальну границю, дозволяють променям проникати в «заборонені» зони і освітлювати їх; а з іншого боку, задача стане складнішою, так як тепер ми вимушені слідкувати за всіма нескінченними ходами кожного променя, що виходить з точкового джерела [1, с. 79].

Можна зробити припущення, що в такому випадку для освітлення будь-якої обмеженої області Ω достатньо одної лампи. Така відповідь, з великою ймовірністю, буде правильною для многокутників, але не правильна в загальному випадку – для областей з гладкою границею. Можна сформулювати таку властивість.

Властивість 1. Для будь-якого натурального n існує область з гладкою границею, для освітлення якої необхідно більше ніж n точкових джерел (ламп) [1, с. 80].

Розглянемо розв'язання цього питання на прикладі формулювання і рішення задач.

Задача 1. [1, с. 83]. Чи можна освітити область Ω одною лампою?

Розв'язання.

На рисунку зображена область. Потрібно визначити чи можна її освітити однією лампою. Зробимо це методом більярду.

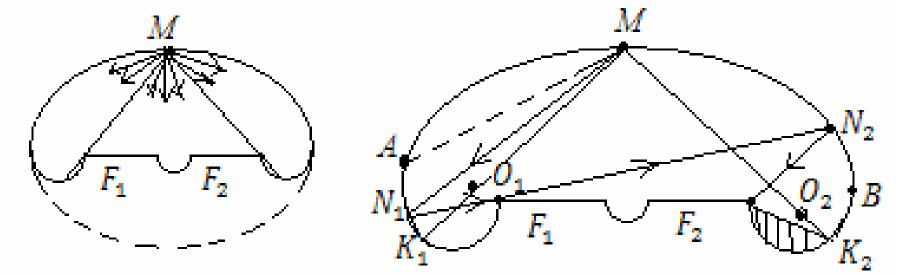

Рис. 4. Освітлення області однієї лампою

Для доведення того, що лампа, поставлена в середину M дуги еліпса , освітить всю область Ω, достатньо довести, що повністю будуть освітлені два закутки області; все інше освітлюється лампою на пряму.

Розглянемо для доведення набір спеціально вибраних променів, які виходять з точки M. Перший промінь обираємо таким, що виходить з M в сторону центра O_1 лівого кутка (рис.4). Проходячи через центр півкола O_1, промінь MO_1 відбивається від неї в точці K_1 і рухається в протилежному напрямку K_1M, потрапляє в точку M, відбивається від дуги еліпса

ISSN 2306-756X

в цій точці, проходить потім через центр O_2 правого кутка (півкола) і, відбившись від правого півкола в точці K_2, рухається знову в зворотньому напрямку K_2M, щоб після відбиття в точці M знову почати рухатися по MK_1. Таким чином, $MK_1M\ K_2M$– періодична більярдна траєкторія.

В якості другого променя, випущеного з лампи M, виберемо такий, який після відбиття в точці N_1 лівого кутка пройде через лівий фокус еліпса F_1. Такий промінь γ знайдеться, оскільки промінь, що йде з M в A– лівий кінець великої вісі (рис.4), після відбиття попаде в деяку точку лівого кутка, а промінь, що йде з M в K_2, відбивається в K_2 в зворотньому напрямку; таким чином деякий промінь $\gamma = MN_1$, який лежить між променями MA *і* MK_1, після відбиття потрапить в F_1.

Далі, промінь γ відіб'ється від дуги еліпса в точці N_2 і потрапить в другий фокус еліпса F_2.

Тепер розглянемо всі промені, що розташовані між променем $\gamma = MN_1$ і променем MK_1. Оскільки промені γ і MK_1 визначають у правому кутку точки F_2 *і* K_2, то всі промені між ними повністю заповнюють дугу F_2K_2 півкола. З'єднавши F_2 *і* K_2 відрізком, отримуємо, що всі розглянуті промені освітлюють повність сегмент круга F_2K_2 (вона заштрихована на рис. 4).

Отже, весь правий куток області Ω повністю освітлений лампою M. Із симетрії випливає, що аналогічними міркуваннями можна показати повну освітленість лівого кутка. Тому область Ω повністю освітлена одною лампою, яка знаходиться в точці M.

Тепер розглянемо складніші задачі, у яких потрібно визначити мінімальну кількість ламп.

Задача 2. [3, с. 48]. Розставити у сільськогосподарському поселенні із заданою схемою найменшу кількість ліхтарів, які б повністю освітлювали вулиці.

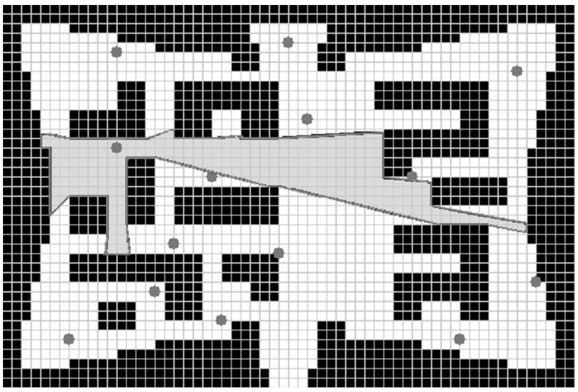

Рис. 5. Визначення оптимальної кількості світильників сільськогосподарського поселення

Зобразивши план поселення на решітці та застосувавши аналогічно до першої задачі метод більярду, знаходимо мінімальну кількість ліхтарів. На Рис.5 зображено границі освітлення одним світильником,темна область відповідає будинкам, а світла – вільному простору.

На рис.6 зображена мінімальна кількість ліхтарів для повного освітлення. Можна довести, що 12 ліхтарів для цього буде не достатньо, 14 повністю вистачає, а для питання для

ISSN 2306-756X

13 повністю не досліджене, для багатьох математиків воно й досі залишається відкритим.

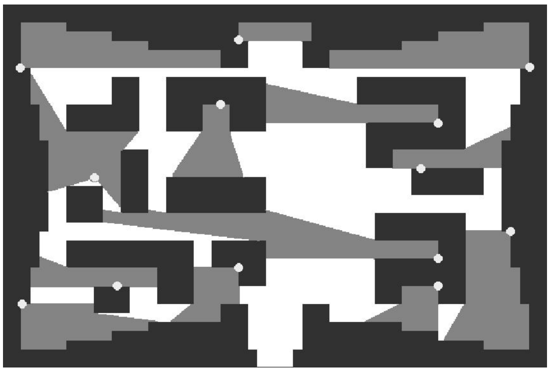

Рис. 6. Освітлення поселення мінімальною кількістю ліхтарів

Задача 3. [4, с. 32]. Знайти мінімальну кількість світильників потрібних для повного освітлення лабіринту.

Розв'язання.

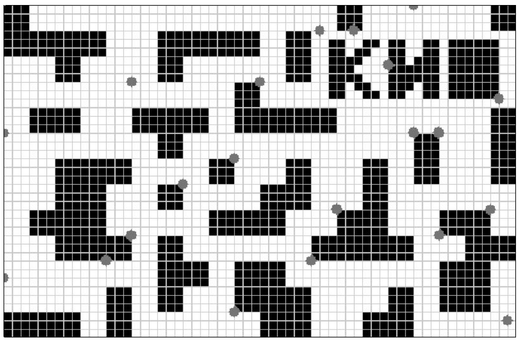

Рис. 7. Мінімальна кількість світильників для освітлення лабіринту

Аналогічно до попередньої задачі, розв'язавши задачу методом більярду на решітці, отримали результат, зображений на рис.7. Отже, потрібен 21 світильник.

Висновки

У статті розроблений метод використання математичногго більярду на решітках, з допомогою якого визначено оптимальне освітлення сільськогосподарської території. Всі розглянуті вище питання свідчать про актуальність використання методу математичного більярду для розв'язування задач знаходження мінімальної кількості ламп на певній території для її задовільнюючого освітлення. За допомогою методу математичного більярду було визначено мінімальну кількість ламп для повного освітлення кімнати, поселення, лабіринту. Отже, метод математичного більярду на решітках дозволяє визначити оптимальну освітленість на будь-якій території.

Список літератури

1. Гальперин Г. А. Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики)./ Г.А. Гальперін, А. Н. Земляков – М.: Наука, 1990.– 290 с.

2. Посов И. А. О конкурсе «Конструируй, исследуй, оптимизируй». / И. А. Посов// Полином. – 2009. - №4. – С.48-53.

3. Посов И. А. Разбор задач «Освещение города» или «Свет в лабиринте» конкурса КИО-2009./ И. А.

ISSN 2306-756X

Посов// Компьютерные инструменты в школе. – 2009. – №3. – С.32-36.

4. Плис А. И. Лабораторный практикум по высшей математике: Учебное пособме для ВУЗов. /А. И. Плис, Н А. Сливина. – М.: Высшая школа, 1983. – 208 с.

5. Крутицкая Н. Ч. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие для ВУЗов./ Н. Ч. Крутицкая, А. А. Шишкин. – М.: Высшая школа, 1985. – 120с.

6. Коссак О. Методи наближених обчислень: Навчальний посібник./ О. Коссак, О. Туманцова, О. Коссак. – Львів: БаК, 2003. –168с.

7. Крохмальова Т. П. Розв'язання некоректно поставлених задач./ Т.П. Крохмальова, В. Є. Величко.// Збірник наукових працб фізико-математичного факультету Сумського ДПУ, 2011. – С. 44-48.

References

1. Gal'perin G. A. Matematicheskiye bil'yardy (bil'yardnyye zadachi i smezhnyye voprosy matematiki i mekhaniki) ./ G.A. Gal'perín , A. N. Zemlyakov - M .: Nauka , 1990.- 290 s .

2. Posov I. A. O konkurse « Konstruiruy , issleduy , optimiziruy » . / I. A. Posov // Polinom . - 2009 - №4 . - S.48-53

3. Posov I. A. Razbor zadach « Osveshcheniye goroda » ili « Svet v labirinte » konkursa KIO - 2009 . / I. A. Posov // Komp'yuternyye instrumenty v shkole . - 2009 - №3 . - S.32-36 .

4. Plis A. I. Laboratornyy praktikum po vysshey matematike : Uchebnoye posobme dlya VUZov . / A . I. Plis , N A. Slivina . - M .: Vysshaya shkola , 1983 - 208 s .

5. Krutitskaya N. CH. Lineynaya algebra v voprosakh i zadachakh : . Uchebnoye posobiye dlya VUZov / N. CH. Krutitskaya , A. A. Shishkin . - M .: Vysshaya shkola , 1985 - 120s .

6. Kossak O. Metody nablizhenikh Obchyslennya :. Navchalnyy posibnyk / O. Kossak, O. Tumantsova, O. Kossak. - Lviv: BaK, 2003 -168s.

7. Krokhmalova T. P. Rozv'yazannya nekorektno postavlenykh zadach. / T.P. Krokhmalova, V. YE. Velychko .// Zbirnyk naukovykh pratsb fizyko-matematychnoho fakultetu Sumskoho DPU, 2011 - S. 44-48.

МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО БИЛЬЯРДУ НА РЕШОТКАХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОСВЕЩЕНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ТЕРРИТОРИИ

Аннотация: *статья посвящена использованию математического бильярда на решетках для определения оптимального освещения сельскохозяйственной территории, на которой расположено предприятие и поселение для проживания работников. Новизна предложенного подхода получена за счет нужного совмещения использования сложного теоретического материала – математического бильярда на решетках с выполнением практических требований обеспечения эффективной работы предприятия.*

Ключевые слова: *сельскохозяйственная территория, математический бильярд на решетках, оптимальное освещение, предприятие, работники.*

METHOD OF MATHEMATICAL BILLIARDS ON THE GRID TO DETERMINE THE OPTIMAL LIGHTING AGRICULTURAL AREAS

Summary: *the article is devoted to the use of mathematical billiards on on the grid to determine the best lighting agricultural territory where your business is located and settlement workers to stay. The novelty of the approach proposed by the authors is received by the right combination of the use of sophisticated theoretical material - mathematical billiards on lattices with the implementation of the practical requirements to ensure the effective operation of the company.*

Keywords: *agricultural areas, mathematical billiards in grids, optimal lighting enterprise workers.*

ISSN 2306-756X