

ДЕКОДИРОВАНИЕ КРАТНЫХ ПАКЕТОВ ОШИБОК В ЦИКЛИЧЕСКИХ КОДАХ

В. П. Семеренко, доцент.

Для учета изменения уровня помех в реальных каналах связи известны различные подходы. Например, можно использовать кодеры-декодеры с настраиваемыми параметрами на основе биномиальных [1], циклических [2] или других видов кодов. Другой подход, рассматриваемый в настоящей работе, состоит в различной интерпретации возникающих ошибок в зависимости от характеристик канала в конкретные интервалы времени.

В математической теории кодирования, как правило, отдельно рассматриваются методы исправления независимых отдельных ошибок и методы исправления пакетов ошибок [3]. Для каждого класса ошибок применяют либо соответствующие корректирующие коды, либо соответствующие методы поиска ошибок. Однако, в реальных системах передачи данных могут чередоваться как редко расположенные отдельные ошибки, так и группы близко расположенных ошибок. Поскольку во многих ситуациях затруднительно часто менять коды или стратегии декодирования, поэтому целесообразно разработать способы поиска разных видов ошибок одним кодом в рамках одной математической модели.

Для циклических кодов наиболее целесообразно использовать графовую модель, основанную на теории линейных последовательностных машин (ЛПМ). Эта модель, которая ранее использовалась для нахождения независимых ошибок [2,4], в данной работе исследуется для поиска кратных пакетов ошибок.

Согласно основополагающей монографии [5], ЛПМ над полем Галуа $GF(q)$ задается функцией состояний (переходов)

$$(1) \quad S(t+1) = A \times S(t) + B \times U(t), \quad GF(q)$$

и функцией выходов

$$(2) \quad Y(t+1) = C \times S(t) + D \times U(t), \quad GF(q)$$

где $S(t)$, $U(t)$ и $Y(t)$ – соответственно векторы состояний, входной и выходной; A – основная характеристическая матрица ЛПМ; B , C , D – характеристические матрицы ЛПМ.

Для ЛПМ с r элементами памяти, h входами, и m выходами матрицы ЛПМ имеют следующие размерности: $(r \times r)$ -матрица A , $(r \times h)$ -матрица B , $(m \times r)$ -матрица C , $(m \times h)$ -матрица D ($r=n-k$). В циклическом кодировании-декодировании наиболее часто используется r -мерная ЛПМ над полем Галуа $GF(2)$ в виде модели автомата Мура ($h=1$), для описания смены состояний в котором, вместо формул (1) и (2), удобно пользоваться следующими формулами:

$$S(t+1) = \begin{cases} A \times S(t) + B, & \text{если } U(t) = 1 \\ A \times S(t), & \text{если } U(t) = 0 \end{cases}, \quad GF(2). \quad (3)$$

Выбор характеристических матриц A и B определяется требованием r -управляемости ЛПМ, т. е. возможности перехода из любого состояния $S_i(t)$ в

состояние $S_i(t+1)$ не более, чем за r тактов работы автомата. Такому требованию, в частности, удовлетворяют следующие два вида матриц A и B [4], которые и будут рассматриваться в дальнейшем изложении:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{r-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

или

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{r-2} & p_{r-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Элементы последнего столбца матрицы A из (4) и элементы последней строки матрицы A из (5) представляют собой коэффициенты порождающего многочлена $p(x)$ циклического кода:

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_{r-1}x^{r-1} + p_r x^r, \quad GF(2). \quad (6)$$

Аппаратной реализацией ЛПМ для характеристических матриц вида (4) или вида (5) является регистр сдвига с обратными связями.

Важнейшей характеристикой порождающего многочлена (6) является значение показателя z , которому он принадлежит. В зависимости от этого значения получается различная структура графовой модели ЛПМ, что в конечном итоге и определяет корректирующие свойства циклического кода.

Пусть диаграмма переходов ЛПМ представляет собой граф $G(V,E)$, где V - множество вершин, E - множество дуг, а порождающий многочлен (6) принадлежит максимальному показателю z_{\max} ($z_{\max} = 2^{n-k} - 1$). В общем случае из вершины v_i может выходить нулевая дуга e_{out}^0 и единичная дуга e_{out}^1 соответственно к вершинам v_{out}^0 и v_{out}^1 , а также могут входить нулевая дуга e_{in}^0 и единичная дуга e_{in}^1 соответственно от вершин v_{in}^0 и v_{in}^1 ($v_i, v_{in}^0, v_{in}^1, v_{out}^0, v_{out}^1 \in V, e_i, e_{in}^0, e_{in}^1, e_{out}^0, e_{out}^1 \in E$). Если вершинам $v_i, v_{in}^0, v_{in}^1, v_{out}^0, v_{out}^1$ поставить в соответствие состояния $S_i, S_{in}^0, S_{in}^1, S_{out}^0, S_{out}^1$ ЛПМ, тогда между указанными состояниями существуют следующие зависимости, повторяющие по сути формулы (3):

$$S_{out}^0 = A \times S_i, \quad S_i = A \times S_{in}^0, \quad GF(2). \quad (7)$$

$$S_{out}^1 = A \times S_i + B_i, \quad S_i = A \times S_{in}^1 + B_i, \quad GF(2). \quad (8)$$

Рассматривая поочередно взаимосвязь вершин графа $G(V,E)$ только по нулевым дугам, а затем только по единичным дугам, можно представить этот граф как сочетание двух связанных подграфов двумя способами.

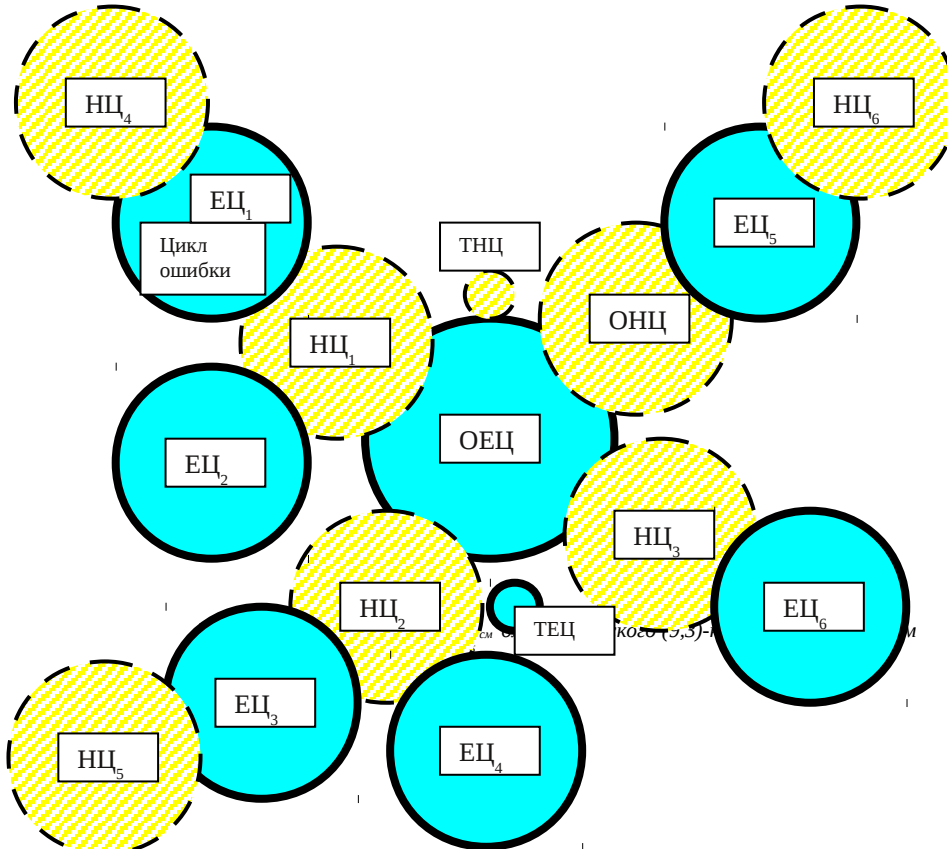
По первому способу, первый подграф – основной нулевой цикл (ОНЦ) – состоит из последовательно соединенных нулевыми дугами z_{\max} вершин графа G , а второй подграф – тривиальный нулевой цикл (ТНЦ) – состоит из оставшейся вершины, для которой входящая e_{in}^0 и выходящая e_{out}^0 нулевые дуги объединяются и образуют петлю. По второму способу, первый подграф – основной единичный цикл (ОЕЦ) – состоит из последовательно соединенных единичными дугами z_{\max} вершин графа G , а второй подграф – тривиальный единичный цикл (ТЕЦ) – состоит из оставшейся вершины для которой входящая e_{in}^1 и выходящая e_{out}^1 единичные дуги объединяются и образуют петлю.

Если порождающий многочлен (6) принадлежит показателю z_{\min} ($z_{\min}=n$), тогда граф G разбивается на большое количество нулевых циклов (НЦ) и единичных циклов (ЕЦ). Аналогичную структуру имеют также диаграммы переходов для порождающих многочленов, представляющие собой произведение нескольких неприводимых многочленов.

Выбор способа представления графа G зависит от постановки задачи декодирования. При поиске независимых кратных ошибок в кодовом векторе наиболее целесообразно рассматривать граф G как сочетание НЦ, соединенных между собой единичными дугами [4]. При поиске одиночных пакетов ошибок в кодовом векторе более предпочтительнее выделить ОЕЦ в графе G [6].

Наконец, при поиске кратных пакетов ошибок в кодовом векторе также необходимо выделить ЕЦ в графе G , однако представление их взаимосвязи с помощью отдельных нулевых дуг будет неэффективным с позиций сложности задачи декодирования. Поэтому для таких типов ошибок необходима новая графовая модель. На основе графа G сконструируем граф смешанных циклов $G_{см}(V_{см}, E_{см})$, где $V_{см}$ - множество вершин, $E_{см}$ - множество дуг ($V \subset V_{см}$, $E \subset E_{см}$). Граф $G_{см}$ будет состоять из НЦ и ЕЦ графа G , упорядоченных следующим образом. На нулевом уровне будет располагаться ТНЦ, состоящий из вершины v_0 , которая соответствует нулевому начальному состоянию $S(0)$ ЛПМ. На первом уровне располагается ОЕЦ длины n . На втором уровне будут располагаться все НЦ, имеющие общие вершины с ОЕЦ. Поскольку каждый такой НЦ имеет по две общих вершины с ОЕЦ, поэтому второй уровень будет всегда содержать $(n-1)/2$ НЦ. На третьем уровне будут располагаться все ЕЦ, имеющие общие вершины с НЦ второго уровня. Далее формируются уровни графа $G_{см}$ таким образом, что на нечетных (четных) уровнях будут располагаться ЕЦ (НЦ), до тех пор, пока еще имеются неиспользованные НЦ и ЕЦ в графе G . Под w -полным смешанным графом будем понимать такой смешанный граф $G_{см}$, который содержит только неповторяющиеся циклы графа G , причем на $(w-1)$ -ом уровне все вершины являются общими с одним циклом $(w-2)$ -ого уровня и с остальными циклами w -ого уровня. Поскольку все НЦ и все ЕЦ содержат в себе полное множество V вершин графа G , поэтому граф $G_{см}$ будет содержать почти в два раза больше вершин, чем граф G .

На рис.1 приведен граф $G_{см}$ для циклического (9,3)-кода, с порождающим



многочленом $p(x) = 1 + x^3 + x^6$, который содержит ТНЦ, ТЕЦ, четыре НЦ на втором уровне, шесть ЕЦ на третьем уровне и три НЦ длины на четвертом уровне, причем каждый цикл, кроме ТНЦ и ТЕЦ, содержит по 9 вершин.

С помощью кодера, в котором используется ЛПМ вида (4) или вида (5), из заданного k -разрядного информационного вектора $I(x)$ будет получен n -разрядный кодовый вектор $C(x)$. В процессе передачи данных по каналу связи в исходном векторе $C(x)$ могут произойти искажения определенных разрядов, в результате чего на выходе канала связи получим кодовый вектор с ошибками $C_{\text{ош}}(x)$. При подаче вектора $C_{\text{ош}}(x)$ на вход декодера, т. е. на вход ЛПМ той же структуры, которая использовалась в кодере, произойдет переход ЛПМ из нулевого начального состояния $S(0)$ в некоторое другое состояние $S_{\text{ош}}(n)$, которое будем именовать синдромом ошибки. Для исправления имеющихся ошибок в векторе $C_{\text{ош}}(x)$ необходимо определить вектор ошибок $F(x)$:

$$F(x) = C(x) + C_{\text{ош}}(x), \quad GF(2).$$

На графовой модели ЛПМ состояние $S_{\text{ош}}(n)$ будет соответствовать вершине $v_{\text{ош}}$ в одном из циклов, который будем именовать циклом ошибок. В [3] было доказано, что с позиций математического аппарата полей Галуа синдромный многочлен может быть вычислен как остаток от деления на порождающий многочлен как кодового многочлена, так и многочлена ошибки. Поскольку теория ЛПМ базируется на математическом аппарате полей Галуа, поэтому приведенный выше тезис можно сформулировать и в таком виде: под воздействием как вектора $C_{\text{ош}}(x)$, так и вектора $F(x)$, ЛПМ перейдет из нулевого начального состояния $S(0)$ в одно и то же состояние $S_{\text{ош}}(n)$.

Следовательно, вектор $F(x)$ можно рассматривать как путь длины n по графу G . Каждый нулевой разряд вектора $F(x)$ соответствует переходу по нулевой дуге графа G , а каждый единичный разряд - переходу по единичной дуге графа G .

Тогда задачу декодирования ошибок можно интерпретировать как поиск пути по исходному графу G от вершины $v_{\text{ош}}$ к вершине v_0 . Используя особенности структуры циклов графа G можно заменить NP-полную задачу поиска пути по этому графу, имеющую переборный характер, на менее сложную задачу направленного поиска пути в в смешанном графе $G_{\text{см}}$.

В общем случае задача декодирования по графу состоит из двух этапов:

- нахождение цикла ошибки, содержащего вершину $v_{\text{ош}}$;
- нахождение кратчайшего пути от цикла ошибки к ОЕЦ, содержащего вершину v_0 .

Переход между двумя циклами соседних уровней можно осуществить через их общие вершины. Эти вершины могут также служить представителями соответствующих циклов. Имея хотя бы одну общую вершину $v_{\text{общ}}$ в НЦ или в ЕЦ и соответствующий ей вектор общего состояния $S_{\text{общ}}(i)$, далее можно по формулам (7) и (8) легко восстановить весь этот НЦ или ЕЦ.

Например, для декодирования двойных пакетов ошибок для рассмотренного ранее циклического (9,3)-кода достаточно хранить по одному общему состоянию всех НЦ 2-го уровня с ЕЦ 3-го уровня. Конкретные значения массива общих состояний для первых двух НЦ имеют вид:

$$\text{Для ОНЦ: } \begin{pmatrix} M(1) = 010000 \\ M(2) = 001000 \\ M(3) = 000100 \\ M(4) = 000010 \end{pmatrix} \cdot \text{Для НЦ}_1: \begin{pmatrix} M(5) = 011000 \\ M(6) = 000110 \\ M(7) = 100101 \\ M(8) = 101001 \end{pmatrix} \cdot \quad (9)$$

Рассмотрим особенности декодирования циклических пакетов ошибок в циклических кодах. Под циклическим пакетом (далее – просто пакетом) ошибок кратности t будем понимать циклически непрерывную последовательность искаженных разрядов в кодовом векторе $C_{\text{ош}}(x)$, т.е. циклически непрерывную последовательность из t единиц в векторе ошибок, который обозначим как $F_{\text{ПК}}^t(x)$.

Теоретической базой для поиска пакетов ошибок служат следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. При наличии в кодовом векторе $C_{\text{ош}}(x)$ пакетов ошибок кратности t цикл ошибки будет находиться на уровне $2t-1$ в смешанном графе $G_{\text{см}}$.

ТЕОРЕМА 2. В кодовом векторе $C_{\text{ош}}(x)$ можно исправить пакеты ошибок кратности t , если можно построить w -полный смешанный граф $G_{\text{см}}(w=2t)$.

Например, в графе $G_{\text{см}}$ на рис.1 каждый цикл i -уровня может быть связан не менее, чем с тремя циклами $(i+1)$ -уровня, поэтому, уже начиная с 3-го уровня, имеющихся циклов будет недостаточно. Следовательно, данный код позволяет исправлять только одиночные пакеты ошибок, и лишь обнаруживать пакеты ошибок кратности 2 и более.

ТЕОРЕМА 3. При наличии в кодовом векторе пакетов ошибок кратности t , и, если первый пакет ошибок начинается с первого разряда вектора $C_{\text{ош}}(x)$, тогда цикл ошибки будет находиться на уровне $2t-1$ в смешанном графе $G_{\text{см}}$.

Введем понятие инверсного вектора ошибки

$$\overline{F}_{\text{ПК}}^t(x) = C(x) + \overline{C}_{\text{ош}}^t(x), \quad \text{GF}(2),$$

где i -ый разряд вектора $\overline{C}_{\text{ош}}^t(x)$ является дополнением до 2 i -го разряда вектора $C_{\text{ош}}^t(x)$ ($i=1 \div n$). Тогда i -ый разряд вектора $\overline{F}_{\text{ПК}}^t(x)$ будет также являться дополнением до 2 i -го разряда вектора $F_{\text{ПК}}^t(x)$.

ТЕОРЕМА 4. К одному ненулевому синдрому ошибки может привести подача на вход ЛПМ с нулевым начальным состоянием $S(0)$ любого из векторов: $C_{\text{ош}}^t(x)$, $\overline{C}_{\text{ош}}^t(x)$, $F_{\text{ПК}}^t(x)$ или $\overline{F}_{\text{ПК}}^t(x)$.

Справедливость Теоремы 4 для $t=1$ была показана в [6]. Используя метод математической индукции можно доказать справедливость Теоремы 4 и в общем случае, когда $t>1$.

Таким образом, анализируя полученный кодовый вектор мы всегда будем иметь дело с двумя неразличимыми между собой вариантами пакетов ошибок кратности t .

СЛЕДСТВИЕ. Если известен один вариант вектора ошибок $F_{\text{ош}}^t(x)$ кратности t , тогда второй пакет ошибок можно определить путем инверсии разрядов этого вектора.

Используя последнее свойство циклических кодов в поле $GF(2)$ можно значительно упростить поиск кратных пакетов ошибок. Наиболее целесообразно вначале определить такой вариант t -кратных пакетов ошибок, когда первый пакет ошибок начинается с первых разрядов кодового вектора. В этом случае, согласно Теоремы 3, необходимо анализировать только $(2t-1)$ уровней графа $G_{\text{см}}$. Если учесть, что число циклов на каждом уровне графа $G_{\text{см}}$ растет в геометрической прогрессии, можно получить существенную экономию во время вычислений.

Предложенная графовая модель для любого циклического (n,k) -кода позволяет заранее определить его корректирующие свойства, исходя из конкретных значений n и k . В [6] было доказано, что для выявления одиночных пакетов ошибок в (n,k) -коде над полем $GF(2)$, задаваемом многочленом r -й степени $(r=n-k)$, который принадлежит показателю n , необходимо выполнение условия:

$$r \geq \log_2((n^2 - n + 2)/2).$$

Аналогичная оценка для таких же циклических кодов, только для локализации пакетов ошибок кратности t , будет следующей:

$$r \geq \log_2((n^2 - n)/2) \left(\sum_{m=0}^{2t} (n-2)^m \right), \quad (10)$$

где m – текущий уровень в смешанном графе $G_{\text{см}}$.

Формула (10) задает лишь верхнюю границу, на практике она будет меньше.

Можно предложить следующий алгоритм декодирования двойных пакетов ошибок в кодовом векторе $C_{\text{ош}}^t(x)$. Исходными данными для алгоритма являются характеристические матрицы A и B , массив M из δ общих состояний НЦ второго уровня и ЕЦ третьего уровня, а также ненулевой синдром ошибок $S_{\text{ош}}(n)$.

АЛГОРИТМ .

1. Положить индексы $i=1, j=1$.

2. Начальному состоянию $S^0(j)$ ЛПМ присвоить значение полученного синдрома ошибок: $S^0(j) = S_{\text{ош}}(n)$.

3. Ввести вспомогательный вектор $Z_1(i)$ и присвоить ему значение характеристической матрицы B : $Z_1(i) = B$.

4. Если выполняется равенство $S^0(j) = Z_1(i)$, то перейти к п.9.

5. Вычислить значение вектора $Z_1(i+1)$:

$$Z_1(i+1) = A \times Z_1(i) + B, \quad GF(2). \quad (11)$$

6. Вычислить $i = i + 1$. Если $i < n$, то перейти к п. 4.

7. Положить $i=1$. Вычислить значение вектора состояния ЛПМ $S(j+1)$:

$$S^0(j+1) = A \times S^0(j), \quad GF(2). \quad (12)$$

8. Вычислить $j=j+1$. Если $j < n$, то перейти к п. 4.

9. В векторе $C_{\text{ош}}^t(x)$ возможен пакет ошибок длины $\beta_1=i+1$, начиная с разряда $\eta_1 = (j - i)$, $GF(n)$.

10. Вычислить длину β_2 и начальный разряд η_2 инверсного пакета ошибок по формулам

$$\begin{aligned} \beta_2 &= n - \beta_1; \quad (\text{mod } n), \\ \eta_2 &= \beta_1 + \eta_1, \quad (\text{mod } n). \end{aligned}$$

Перейти к п. 28.

11. Положить $k=1$.

12. Положить $j=1$. Начальному состоянию $S^1(j)$ ЛПМ присвоить значение полученного синдрома ошибок: $S^1(j) = S_{\text{ош}}(n)$.

13. Вычислить значение вектора $S(j+1)$:

$$S^1(j+1) = A \times S^1(j) + B, \quad GF(2) \quad (13)$$

14. Если выполняется равенство $S^1(j+1) = M(k)$, то перейти к п.17.

15. Вычислить $j=j+1$. Если $j < n$, то перейти к п. 13.

16. Перейти к п. 26.

17. В кодовом векторе $C_{\text{ош}}^t(x)$ возможен двойной пакет ошибок (обозначим вектор ошибок как $F_{\text{пк}}^2(x)$). Первый пакет ошибок в векторе ошибок $F_{\text{пк}}^2(x)$ имеет длину $\beta_1=j$, начиная с разряда $\eta_1 = 1$.

18. Положить $j=1, i=1$.

19. Присвоить вспомогательному вектору $Z_2(j)$ значение k -го вектора массива M : $Z_2(j) = M(k)$.

20. Если выполняется равенство $Z_2(j) = Z_1(n-i)$, то перейти к п.24.

21. Вычислить $i = i + 1$. Если $i < n$, то перейти к п. 20.

22. Положить $i=1$. Вычислить значение вектора $Z_2(j+1)$:

$$Z_2(j+1) = A \times Z_2(j), \quad GF(2). \quad (14)$$

23. Вычислить $j=j+1$. Если $j < n$, то перейти к п. 20.

24. Второй пакет ошибок в векторе ошибок $F_{\text{пк}}^2(x)$ имеет длину $\beta_2=n-i-1$, начиная с разряда $\eta_2 = \beta_1 + j + 1 \pmod{n}$.

25. Вычислить параметры инверсного пакета ошибок инверсией разрядов вектора ошибок $F_{\text{ош}}^2(x)$.

26. Вычислить $k=k+1$. Если $k \leq \delta$ ($\delta=(n-1)/2$), то перейти к п. 12.

27. В векторе $C_{\text{ош}}^t(x)$ возможно более двух пакетов ошибок.

28. Конец.

Рассмотрим применение Алгоритма для определения пакетов ошибок для циклического (9,3)-кода, задаваемого порождающим многочленом $p(x) = 1+x^3+x^6$. Пусть в результате декодирования получен синдром ошибок $S_{\text{ош}}(n)=100110$.

После выполнения первых 8 пунктов Алгоритма были получены по формуле (11) следующие векторы, представляющие по сути ОЕЦ для этого кода:

$$\begin{array}{ll} Z_1(1) = B = 100000, & GF(2), \\ i=1 & Z_1(2) = A \times Z_1(1) + B = 110000, & GF(2), \\ i=2 & Z_1(3) = A \times Z_1(2) + B = 111000, & GF(2), \\ i=3 & Z_1(4) = A \times Z_1(3) + B = 111100, & GF(2), \\ i=4 & Z_1(5) = A \times Z_1(4) + B = 111110, & GF(2), \\ i=5 & Z_1(6) = A \times Z_1(5) + B = 111111, & GF(2), \\ i=6 & Z_1(7) = A \times Z_1(6) + B = 011011, & GF(2), \\ i=7 & Z_1(8) = A \times Z_1(7) + B = 001001, & GF(2), \\ i=8 & Z_1(9) = A \times Z_1(8) + B = 000000, & GF(2). \end{array}$$

Поскольку синдром ошибки не совпал ни с одним из векторов ОЕЦ, поэтому определяем векторы состояний ЛПМ $S^0(j+1)$ по формуле (12):

$$\begin{array}{ll} j=1 & S^0(2) = A \times S^0(1) = 010011, & GF(2), \\ j=2 & S^0(3) = A \times S^0(2) = 101101, & GF(2), \\ j=3 & S^0(4) = A \times S^0(3) = 110010, & GF(2), \\ j=4 & S^0(5) = A \times S^0(4) = 011001, & GF(2), \\ j=5 & S^0(6) = A \times S^0(5) = 101000, & GF(2), \\ j=6 & S^0(7) = A \times S^0(6) = 010100, & GF(2), \\ j=7 & S^0(8) = A \times S^0(7) = 001010, & GF(2), \\ j=8 & S^0(9) = A \times S^0(8) = 000101, & GF(2). \end{array}$$

Среди вычисленных векторов состояний ЛПМ ни один не совпал с векторами ОЕЦ. Следовательно, в кодовом векторе отсутствуют одиночные пакеты

ошибок и далее следует искать возможные двойные пакеты ошибок, хотя они уже находятся за границей корректирующей способности этого кода.

Начальное состояние ЛПМ снова равно синдрому ошибок: $S^1(1) = S_{\text{ош}}(n)$. Согласно (13) вычисляем значения векторов состояний:

$$j=1 \quad S^1(2) = A \times S^1(1) + B = 110011, \quad \text{GF}(2),$$

$$j=2 \quad S^1(3) = A \times S^1(2) + B = 011101, \quad \text{GF}(2),$$

$$j=3 \quad S^1(4) = A \times S^1(3) + B = 001010, \quad \text{GF}(2),$$

$$j=4 \quad S^1(5) = A \times S^1(4) + B = 100101, \quad \text{GF}(2).$$

Сравнение с массивом общих состояний M показывает совпадение $S^1(5)$ с вектором $M(7)$. Следовательно, обнаружен первый возможный пакет ошибок длины $\beta_1=4$, начиная с первого разряда $\eta_1=1$. Это означает, что синдром ошибки попал в один из ЕЦ 3-го уровня. После нахождения цикла ошибки необходимо найти путь к ОЕЦ через общие состояния с тем НЦ 2-го уровня, который соединяет ОЕЦ и цикл ошибки. Последовательно вычисляем значения векторов $Z_2(j+1)$ по формуле (14):

$$j=1 \quad Z_2(2) = A \times M(7) = 110110, \quad \text{GF}(2),$$

$$j=2 \quad Z_2(3) = A \times Z_2(2) = 011011, \quad \text{GF}(2).$$

Совпадение векторов $Z_2(3)$ и $Z_1(7)$ свидетельствует о нахождении общего состояния НЦ 2-го уровня с ОЕЦ. Теперь можно определить параметры второго возможного пакета ошибок: длина $\beta_2=9-6-1=2$, начиная с разряда $\eta_2=4+2+1=7$.

Для найденного вектора ошибок $F_{\text{ПК}}^2(x) = 111100110$ находим инверсный вектор $\overline{F}_{\text{ПК}}^2(x) = 000011001$ с параметрами: $\beta_1=2$, $\eta_1=5$, $\beta_2=1$, $\eta_2=9$. Аналогично можно определить другие варианты двойных пакетов ошибок.

Полученный синдром ошибок $S_{\text{ош}}(n)$ можно рассматривать и как следствие независимых ошибок в кодовом векторе. Применяя метод поиска таких ошибок, изложенный в [6], можно определить наличие двух ошибок в разрядах 3 и 5.

ВЫВОДЫ

Каждая вершина исходного графа принадлежит одновременно, как одному из НЦ, так и одному из ЕЦ. Поэтому любой синдром ошибки $S_{\text{ош}}(n)$ можно рассматривать и как следствие независимых ошибок, так и пакетов ошибок. Соответственно для циклического (n,k) -кода с кодовым расстоянием $d=2\tau+1$, можно определить как вектор независимых ошибок $F_{\text{НЗ}}^\tau(x)$ кратности τ , так и вектор пакетов ошибок $F_{\text{ПК}}^t(x)$ кратности t . Кроме того, синдром ошибки $S_{\text{ош}}(n)$ можно рассматривать и как следствие векторов ошибок $\overline{F}_{\text{ПК}}^t(x)$ и $\overline{F}_{\text{НЗ}}^\tau(x)$, инверсным векторам $F_{\text{ПК}}^t(x)$ и $F_{\text{НЗ}}^\tau(x)$. Следовательно, даже в границах корректирующей способности кода мы всегда будем иметь дело с неразличимыми между собой четырьмя видами ошибок двух классов. Если же производить декодирование ошибок за границей корректирующей способности кода, тогда количество вариантов ошибок еще более возрастает. Различить все возможные виды ошибок только методами жесткого декодирования невозможно в принципе. Для точной локализации ошибок необходима дополнительная информация. Во-первых, необходимо знать характеристики канала передачи данных. Выбор математической модели канала и определит класс наиболее вероятных ошибок в рассматриваемый отрезок времени: независимые ошибки или пакеты ошибок. Во-вторых, следует извлечь максимум информации из этапа модуляции-демодуляции кодового вектора, что позволит методами мягкого декодирования [7] значительно сузить количество вариантов ошибок.

Таким образом, предлагаемая графовая модель позволяет находить постоянные ошибки различной природы с помощью одного кода. После получения перечня всех допустимых вариантов ошибок управляющая система более высокого уровня должна принять окончательное решение.

SUMMARY

New graphic model for the cyclic codes on the base of the theory of linear sequential machine are proposed. The corrective properties of the cyclic codes are investigated. The algorithm and example of the search of the double burst errors in the communication channel with the changeable noise are considered.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

REFERENCES

1. Борисенко А.А., Бережная О.В., Кулик И.А. Устройство помехоустойчивого кодирования на основе биномиальных кодов // "Вісник СумДУ", 1997. - № 2. - С.93-96.
2. Семеренко В. П. Разработка универсального кодера-декодера циклических кодов // Электронное моделирование. - 1995. - №4. - С.26-31.
3. Блейхут Р. Теория и практика кодов, исправляющих ошибки: Пер. с англ. - М.: Мир, 1986. - 576 с.
4. Семеренко В. П. Параллельное декодирование циклических кодов Боуза-Чоудхури-Хоквингема // Электронное моделирование. - 1998. - № 1. - С. 82-87.
5. Гилл А. Линейные последовательностные машины: Пер. с англ. - М.: Наука, 1974. - 288 с.
6. Семеренко В. П. Исправление пакетов ошибок в циклических кодах. // Математические машины и системы. - 1999. - № 1. - С. 30-42.
7. Кларк Дж., мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1987. - 392 с.