УДК 512.81

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ОБОБЩЕННОЙ АЛГЕБРЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Касимов Вагиф Али-Мухтар, Велиева Кемале Муталим

Бакинский Государственный Университет

Аннотация

Приводится определение Лиевой алгебры $\mathfrak{g}$ - блочно треугольных матриц, называемое обобщенной алгеброй Гейзенберга. Рассматривается группа $Aut(\mathfrak{g})$ -всех автоморфизмов этой алгебры. Нашей целью является описание этой группы автоморфизмов.

Abstrakt

It provides definitions of Lie algebra $\mathfrak{g}$- block triangular matrices, called the generalized Heisenberg algebra. All consider the group $Aut(\mathfrak{g})$ -of automorphisms of this algebra. Our aim is to describe the group of automorphisms .

Введение

Пусть задана конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ [1]. Рассмотрим группу всех автоморфизмов $Aut(\mathfrak{g})$. Это группа является подгруппой в группе всех обратимых матриц $\Phi \in GL(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$, которые удовлетворяют тождеству

$$\Phi[u, v] = [\Phi(u), \Phi(v)], \text{ где } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}.$$

Значит, это группа является группой Ли. Нашей целью является описание $Aut(\mathfrak{g})$ - группы всех автоморфизмов этой алгебра Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathbf{R}$ поле вещественных чисел, $\mathbf{R}^n$ -пространство столбцов, а $\mathbf{R}_n$ - пространство строк соответственно. Рассмотрим вектор строку - $\overline{a} \in \mathbf{R}_n$, вектор столбец - $\overline{b} \in \mathbf{R}^n$ и число- $c \in \mathbf{R}$. Пусть алгебра $\mathfrak{g}$ является обобщенной алгеброй Гейзенберга. Элементами алгебры $\mathfrak{g}$ являются матрицы вида $X = \begin{pmatrix} 0 & \overline{a} & c \\ 0 & 0 & \overline{b} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а алгебраической операцией является коммутирование матриц. Мы представим матрицы $X = \begin{pmatrix} 0 & \overline{a} & c \\ 0 & 0 & \overline{b} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в виде столбцов длины $2n+1$:

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto \overline{X} = \begin{pmatrix} {}^t\overline{a} \\ \overline{b} \\ c \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2n+1}.$$

Обозначим столбец $\begin{pmatrix} {}^t\overline{a} \\ \overline{b} \\ c \end{pmatrix}$ через $\overline{X} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, где $A = {}^t\,\overline{a}$, $B = \overline{b}$, $C = c$.

Тогда коммутатор двух столбцов $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ будет, имеет следующий вид:

$$\left[\overline{X}_1, \overline{X}_2\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^t A_1 B_2 - {}^t B_1 A_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Рассмотрим автоморфизмы алгебры g. Пусть автоморфизм $\Phi : \mathsf{g} \to \mathsf{g}$ задается матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1^1 & \Phi_2^1 & \Phi_3^1 \\ \Phi_1^2 & \Phi_2^2 & \Phi_3^2 \\ \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & \Phi_3^3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Так как $\Phi : \mathsf{g} \to \mathsf{g}$ автоморфизм Лиевой алгебры g, то для произвольно двух элементов (столбцов) $\overline{X}_1, \overline{X}_2 \in \mathsf{g}$ должно выполнятся условие

$$\Phi\left[\overline{X}_1, \overline{X}_2\right] = [\Phi(\overline{X}_1), \Phi(\overline{X}_2)]. \tag{3}$$

Удобней представить столбец $\overline{X} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ в виде $\overline{X} = \begin{pmatrix} U \\ C \end{pmatrix}$, где $U = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Тогда выражение ${}^t A_1 B_2 - {}^t B_1 A_2$ перепишем в виде ${}^t A_1 B_2 - {}^t B_1 A_2 = {}^t\, U_1 F U_2$, где матрица F имеет вид $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Значит, для $\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} U_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ и $\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} U_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$ имеем

$$\left[\overline{X}_1, \overline{X}_2\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ {}^t U_1 F U_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матрицу Φ представим в блочном виде - $\Phi = \begin{pmatrix} \Psi_1^1 & \Psi_2^1 \\ \Psi_1^2 & \Psi_2^2 \end{pmatrix}$, где блоки определены следующим образом:

$$\Psi_1^1 = \begin{pmatrix} \Phi_1^1 & \Phi_2^1 \\ \Phi_1^2 & \Phi_2^2 \end{pmatrix},\ \Psi_2^1 == \begin{pmatrix} \Phi_3^1 \\ \Phi_3^2 \end{pmatrix},\ \Psi_1^2 = \begin{pmatrix} \Phi_1^3 & \Phi_2^3 \end{pmatrix} \text{ и } \Psi_2^2 = \Phi_3^3.$$

Левая часть формулы (6) в новых обозначениях имеет вид:

$\Phi\left[\overline{X}_1, \overline{X}_2\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_2^2({}^t U_1 F U_2) \end{pmatrix}$. Для правой части формулы (3), имеем

$[\Phi(\overline{X}_1),\Phi(\overline{X}_2)]=\begin{pmatrix}0\\ {}^tU_1\cdot{}^t\Psi_1^1\cdot F\cdot\Psi_1^1\cdot U_2\end{pmatrix}$. Поскольку блоки U_1 и U_2 произвольны, то для выполнения условия (6) и из следующего равенство

$$\begin{pmatrix}0\\ \Psi_2^2({}^tU_1FU_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ {}^tU_1\cdot{}^t\Psi_1^1\cdot F\cdot\Psi_1^1\cdot U_2\end{pmatrix}$$

получаем соотношение на матрицы Ψ_2^2 и Ψ_1^1:

$$\Psi_2^2F={}^t\Psi_1^1\cdot F\cdot\Psi_1^1. \qquad (5)$$

Таким образом, если автоморфизм $\Phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ задается матрицей $\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_1^1 & \Phi_2^1 & \Phi_3^1\\ \Phi_1^2 & \Phi_2^2 & \Phi_3^2\\ \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & \Phi_3^3\end{pmatrix}$ такой, что $\det\Phi\neq 0$, то выполняются условия:

1. матрица Φ имеет блочно треугольный вид $\Phi=\begin{pmatrix}\Psi_1^1 & 0\\ \Psi_1^2 & \Psi_2^2\end{pmatrix}$;

2. имеется соотношение на блоки Ψ_2^2 и Ψ_1^1 матрицы Φ

$$\Psi_2^2F={}^t\Psi_1^1\cdot F\cdot\Psi_1^1,$$

где, F имеет вид $F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Теперь покажем, что если выполняются условия **1** и **2** то, матрица Φ задает автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для этого проверим выполнения условия (3), покажем, что $\Phi\left[\overline{X}_1,\overline{X}_2\right]=[\Phi(\overline{X}_1),\Phi(\overline{X}_2)]$.

По формуле (7) имеем $\left[\overline{X}_1,\overline{X}_2\right]=\begin{pmatrix}0\\ {}^tU_1FU_2\end{pmatrix}$. Тогда, $\Phi\left[\overline{X}_1,\overline{X}_2\right]=\begin{pmatrix}0\\ \Psi_2^2({}^tU_1FU_2)\end{pmatrix}$.

Далее, коммутатор $[\Phi(\overline{X}_1),\Phi(\overline{X}_2)]$ столбцов $\Phi(\overline{X}_1)$ и $\Phi(\overline{X}_2)$ равняется $[\Phi(\overline{X}_1),\Phi(\overline{X}_2)]=\begin{pmatrix}0\\ {}^tU_1\cdot{}^t\Psi_1^1\cdot F\cdot\Psi_1^1\cdot U_2\end{pmatrix}$. Так как, выполняется условие **2** , то $\Phi\left[\overline{X}_1,\overline{X}_2\right]=[\Phi(\overline{X}_1),\Phi(\overline{X}_2)]$.

Итак, справедливо следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть автоморфизм* $\Phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ *задается матрицей* Φ*, такой, что* $\det\Phi\neq 0$. *Тогда, выполняются условия 1 и 2. Обратно, если матрица* Φ *обладает свойствами 1 и 2, то оно задает автоморфизм алгебры* $\mathfrak{g}$.

Список использованных источников:

1. Джекобсон Н. Алгебры Ли, М.: Мир, 1963. 358 с.