УДК 519.622

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ И ПРИМЕНЕНИЯХ ГИБРИДНЫХ МЕТОДОВ

Мехтиева Галина[1], *Ибрагимов Вагиф*[2], *Иманова Мехрибан*[1]

[1]Бакинский Государственный Университет, кафедра Вычислительная математика
[2]Иститут Систем управления НАНА

Аннотация

Как известно, существуют два основных класса численных методов для решения ОДУ, которые обычно называют одно и многошаговыми методами. Каждый из этих методов имеет некоторые преимущества и недостатки. Очевидно, что метод, обладающий лучшими свойствами этих методов, должен быть построен на стыке этих методов. В середине XX века Гир и Батчер построили методы на стыке методов Рунге-Кутты и Адамса, которые называли гибридным методом. Здесь рассмотрено построение некоторых обобщений гибридных методов, имеющих высокую точность и исследовать их применение к решению как ОДУ, так и интегральных, интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. А также построены некоторые конкретные гибридные методы имеющие точности $p \le 10$.

Abstract

As is known, there are two main classes of numerical methods for solving ODE, which is commonly called single and multistep methods. Each of these methods has certain advantages and disadvantages. It is obvious that the method which has better properties of these methods should be constructed at the junction of these methods. In the middle of the twentieth century, Gear and Butcher constructed at the junction of the methods of Runge-Kutta and Adams, which is called as hybrid method. Here considers the construction of some generalizations of hybrid methods with high accuracy and investigated their application to solving of the ODE, Integral and integro-differential equations of Volterra type. Also constructed some specific hybrid methods with higher accuracy.

Введение

Рассмотрим следующую задачу:

$$y'(x) = f(x, y), y(x_0) = y_0, x \in [x_0, X], \tag{1}$$

которую обычно называют начальной задачей или задачей Коши для ОДУ первого порядка. Предположим, что функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов и определена в некоторой замкнутой области $G = \{x_0 \le x \le X, |y| \le a\}$ и там же удовлетворяет условию Липшица по аргументу y. Тогда по известной теореме Коши получаем, что задача (1) имеет единственное решение, определенное на отрезке $[x_0, X]$ $(\forall x \le X)$. С целью нахождения численного решения задачи (1), отрезок $[x_0, X]$ разбиваем на N равных частей с помощью точек $x_i = x_0 + ih \quad (i = 0,1,...N)$. Здесь параметр $0 < h$ является шагом разбиений отрезка $[x_0, X]$. Обозначим через y_i - приближенное, а через $y(x_i)$ -точное значение решения задачи (1) в точке x_i.

Цель данной работы заключается в применение гибридных методов к решению задачи (1) очевидно, что методы Гира и Батчера в одном варианта можно обобщить в следующей форме

$$\sum_{i=0}^{k} \overline{\alpha}_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} (\overline{\beta}_i f_{n+i} + \overline{\gamma}_i f_{n+i+\nu_i}), \ (|\nu_i| \le 1; i = 0,1,2,...,k) \tag{2}$$

где коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \ (i = 0,1,2,...,k)$ некоторые действительные числа, причем $\alpha_k \ne 0$

Предположим, что функция $f(x, y)$ в области G имеет частные производные любого порядка p, включительно. Отметим, что целочисленная величина p обычно выбирается как порядок точности рассматриваемого метода.

Для решения некоторых проблем, часто возникает необходимость построения методов с более высокой точностью, чем точность метода (2). Для этой цели можно использовать следующее:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i} = h\sum_{i=0}^{k}(\beta_i f_{n+i} + \gamma_i f_{n+i+\nu_i}) + h\sum_{i=0}^{k}(\gamma_i g_{n+i} + \gamma_i g_{n+i+\nu_i}),\ (k \le 1; |\nu_i| \le 1; i = 0,1,2,...,k) \qquad (3)$$

где $g_m = g(x_m, y_m),\ (m \ge 0)$. Функция $g(x,y)$ может быть записана в следующем виде:

$$g(x,y) = f'_x(x,y) + f(x,y)f'_x(x,y)$$

Очевидно, что из метода (3) можно получить метод (2), как частный случай. Исходя из этого, некоторые специалисты считают, что методы типа (3) более перспективные, чем методы (2). Методы типа (3) обычно являются более точными, чем методы типа (2). Однако каждый из этих методов имеет некоторые преимущества и недостатки. Поэтому каждый из них является самостоятельным объектом исследования.

1. Построение гибридных многошаговых методов со второй производной.

Методы типа (2) исследованы многими авторами, а методы типа (3) исследованы сравнительно мало. Поэтому рассмотрим исследование метода (3), из которого в частности получаются методы типа (2).

Отметим что, не смотря на то, что метод (2) получается из метода (3), как частный случай, эти методы являются самостоятельными объектами исследований. Для подтверждения этого, рассмотрим сравнение точности устойчивых методов из (2) и (3). С этой целью положим $\hat{\gamma}_i = \bar{\gamma}_i = \hat{\beta}_i = 0 \quad (i = 0,1,2,...,k)$. В этом случае устойчивые методы, полученные из (3), имеют максимальную точность $p = 2k + 2$, а устойчивые методы, полученные из метода (2), имеют степень $p = 2[k/2] + 2$. Следовательно, максимальная точность устойчивого метода типа (2) зависит от чётности и нечётности порядка к. Отсюда следует, что использование механического переноса результатов, полученных в исследовании метода (2) при $\bar{\gamma}_i = 0\,(i = 0,1,...,k)$ к методам типа (3) при $\hat{\gamma}_i = \hat{\beta}_i = 0\ (i = 0,1,...,k)$, не всегда оправдывается. Поэтому каждый из этих методов является отдельным объектом исследований. Рассмотрим исследование метода (3) и определим понятие устойчивости степени для метода типа (3).

Определение 1. Будем говорить, что метод (3) устойчив, если все корни характеристического многочлена $\rho(\lambda) = \alpha_k\lambda^{k-1} + \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} ... + \alpha_1 + \alpha_0$ лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней.

Но если $\beta_i = \gamma_i = 0 (i = 0,1,...,k)$, то метод (3) называют устойчивым, если все корни многочлена $\rho(\lambda)$ лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней за исключением двукратного корня $\lambda = 1$.

Устойчивость метода (3) является необходимым и достаточным условием для его сходимости. Одним из основных показателей численного метода является его точность, которую можно определить в следующей форме.

Определение 2. Целочисленная величина p является степенью метода (3), если имеет место следующее:

$$\sum_{i=0}^{k}(\alpha_i y(x+i) - h(\beta_i y'(x+ih) + \hat{\beta}_i y'(x+(i+\nu_i)h)) - h^2(\gamma_i y''(x+ih) + \hat{\gamma}_i y''(x+ih+\nu_i h))) = O(h)^{p+\nu},\ h \to 0.$$

Здесь $\nu = 1$ если $\sum_{i=0}^{k}(|\hat{\beta}_i| + |\beta_i|) \ne 0$ и $\nu = 2$, если $\sum_{i=0}^{k}(|\hat{\beta}_i| + |\beta_i|) = 0$.

Обычно при исследовании многошаговых методов с постоянными коэффициентами, налагают некоторые условия на его коэффициенты, которые можно считать естественными. Поэтому, здесь на коэффициенты метода (3) налагаем следующие условия.

A. Коэффициенты метода (3) величины $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 0,1,2,...,k)$ -некоторые действительные числа, причем $\alpha_k \neq 0$.

B. Характеристические многочлены метода (3)

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i;\ \nu(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \beta_i \lambda^i;\ \hat{\nu}(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \hat{\beta}_i \lambda^i;\ \ \gamma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \lambda^i;\ \hat{\gamma}(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \hat{\gamma}_i \lambda^{i+\nu_i};$$

не имеют общих множителей, отличных от константы.

C. $p \geq 1$ при $\gamma_i = \beta_i = \hat{\beta}_i = 0$ $(i = 0,1,...,k)$, и $|\gamma(1)| + |\hat{\gamma}(1)| \neq 0$. Если $|\nu(1)| + |\hat{\nu}(1)| \neq 0$, то $p \geq 2$ в случае, когда $|\gamma(1)| + |\hat{\gamma}(1)| \neq 0$.

Для построения конкретных методов положим $k = 1$, тогда из (3) получим следующий метод:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(\beta_0 y'_n + \beta_1 y'_{n+1}) + h(\hat{\beta}_0 y'_{n+\nu_0} + \hat{\beta}_1 y'_{n+\nu_1}) + \\ &+ h^2(\gamma_0 y''_n + \gamma_1 y''_{n+1}) + h^2(\hat{\gamma}_0 y''_{n+l_0} + \hat{\gamma}_1 y''_{n+l_1}). \end{aligned} \tag{4}$$

При применении метода (4) возникает необходимость определения значения величин $y_{n+\nu_i}$ и y_{n+l_i} $(i = 0,1)$. Некоторые авторы предпочитают строить методы типа (3), для которых выполняется следующее условие: $\nu_i = l_i$ $(i = 0,1)$. Легко можно показать, что коэффициенты метода (4) удовлетворяют следующей системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&\beta_1 + \beta_0 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_0 = 1, \\
&\gamma_1 + \gamma_0 + \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_0 + \beta_1 + l_1\hat{\beta}_1 + l_0\hat{\beta}_0 = \frac{1}{2}; \\
&2(\gamma_1 + l_1\hat{\gamma}_1 + l_0\hat{\gamma}_0) + \beta_1 + l_1^2\hat{\beta}_1 + l_0^2\hat{\beta}_0 = \frac{1}{3}; \\
&3(\gamma_1 + l_1^2\hat{\gamma}_1 + l_0^2\hat{\gamma}_0) + \beta_1 + l_1^3\hat{\beta}_1 + l_0^3\hat{\beta}_0 = \frac{1}{4}; \\
&4(\gamma_1 + l_1^3\hat{\gamma}_1 + l_0^3\hat{\gamma}_0) + \beta_1 + l_1^4\hat{\beta}_1 + l_0^4\hat{\beta}_0 = \frac{1}{5}; \\
&5(\gamma_1 + l_1^4\hat{\gamma}_1 + l_0^4\hat{\gamma}_0) + \beta_1 + l_1^5\hat{\beta}_1 + l_0^5\hat{\beta}_0 = \frac{1}{6}; \\
&6(\gamma_1 + l_1^5\hat{\gamma}_1 + l_0^5\hat{\gamma}_0) + \beta_1 + l_1^6\hat{\beta}_1 + l_0^6\hat{\beta}_0 = \frac{1}{7}; \\
&7(\gamma_1 + l_1^6\hat{\gamma}_1 + l_0^6\hat{\gamma}_0) + \beta_1 + l_1^7\hat{\beta}_1 + l_0^7\hat{\beta}_0 = \frac{1}{8}; \\
&8(\gamma_1 + l_1^7\hat{\gamma}_1 + l_0^7\hat{\gamma}_0) + \beta_1 + l_1^8\hat{\beta}_1 + l_0^8\hat{\beta}_0 = \frac{1}{9}; \\
&9(\gamma_1 + l_1^8\hat{\gamma}_1 + l_0^8\hat{\gamma}_0) + \beta_1 + l_1^9\hat{\beta}_1 + l_0^9\hat{\beta}_0 = \frac{1}{10}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Решая полученную систему, можно построить различные методы со степенью $p \leq 10$. Например следующий метод:

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = 0.1399856910166386, && \hat{\beta}_0 = 0.33029911601732503, \\
&\beta_1 = 0.03595912697178637, && \hat{\beta}_1 = 0.4937560659942499, \\
&\gamma_0 = 0.00651536104151689, && \hat{\gamma}_0 = -0.0001791537505939, \\
&\gamma_1 = 0.00027051939103296, && \hat{\gamma}_1 = -0.05085979694583521, \\
&m_0 = 0.29924504389157963, && \nu_0 = -0.15683180906968663, \\
&m_1 = 0.8292628648473289, && \nu_1 = 0.7112214657593782.
\end{aligned} \tag{6}$$

Этот метод имеет степень $p = 10$.

Более подробную информацию о гибридных методах можно найти в работах [1]-[2].

Список использованных источников:

1.Mehdiyeva G., Imanova M., Ibrahimov V. A way to construct an algorithm that uses hybrid methods. Applied Mathematical Sciences, HIKARI Ltd, Vol. 7, 2013, no. 98, p.4875-4890.

2.Mehdiyeva G., Imanova M., Ibrahimov V. An Application of Mathematical Methods for Solving of Scientific Problems, British Journal of Applied Science & Technology2016 - Volume 14 , issue 2, 1-15.