УДК 519.1

ДИСТАНЦІЙНІ АНТИМАГІЧНІ ГРАФИ ЯК МОДЕЛІ НЕПОВНИХ КРУГОВИХ ТУРНІРІВ

Семенюта Марина[1], *Петренюк Дмитро*[2]

[1]Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету
[2]Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Анотація

Розглянуто задачу планування чесного неповного кругового турніру, яка є еквівалентною задачі побудови регулярного врівноваженого дистанційного d-антимагічного графа. Авторами застосовано дві стратегії побудови врівноважених дистанційних d-антимагічних графів.

Abstract

We consider the problem of fair incomplete round-robin tournament planning, which is equivalent to the problem of regular balanced distance d-antimagic graph construction. Two different strategies of constructing balanced distance d-antimagic graphs are used.

Вступ

Вважається, що засновником теорії розміток графів є А. Роса, який в 1967 році запропонував 4 типи розміток при розв'язанні проблем теорії розкладів графів. Але передумовами її виникнення і розвитку послужили наступні практичні задачі: «мінімізація безладу» в створенні кодів для цифрових комп'ютерів; оптимальне планування радіоантен для сканування видимих областей небосхилів; кодування радарних імпульсів в радіолокації; побудова кодів для наведення реактивних снарядів. Наприклад, проблема ефективної системи адресації зводиться до задачі знаходження напів-граціозної розмітки, а реберно-магічна тотальна розмітка забезпечує додаткову інформацію про адресу посилання. Ця проблема, піднята ще в 1978 році в роботі [1], залишається актуальною в сучасних умовах. Системний огляд по розмітках оновлюється кожні два роки в електронному журналі Д. Галліана [2]. Дана доповідь присвячена задачі планування неповних кругових турнірів, для розв'язання якої авторами роботи [3] запропоновано дистанційні магічні і антимагічні розмітки.

Основний результат

Будемо розглядати скінчені неорієнтовані графи без кратних ребер та петель.

Розмітки поділяються на вершинні, реберні та тотальні, в залежності від області відображення функції, яка їх задає. Далі мова йде про вершинні розмітки графа.

Вивчення врівноважених дистанційних антимагічних графів мотивовано плануванням неповних турнірів кругового типу з різними властивостями. Потреба в проведенні такого типу турнірів виникає при браку часу або коштів.

Розглянемо задачу планування чесного неповного кругового турніру з наступними властивостями: кожна команда грає з однаковим числом противників; складність турніру для кожної команди імітує складність повного кругового турніру.

Виконаємо ранжування n команд від 1 до n, в залежності від потужності кожної команди, скориставшись даними їх гри в минулому році. Таким чином, визначимо силу i-ої команди в турнірі з n противниками, як $s_n(i)=n+1-i$. Загальна сила противників i-ої команди в повному круговому турнірі буде дорівнювати $S^*_{n,n-1}(i)=(n+1)(n-2)/2+i$. Ці загальні сили утворюють зростаючу арифметичну прогресію.

Чесний неповний круговий турнір n команд з g турами $FIT(n,g)$ – це турнір, в якому кожна команда грає з g командами і загальна сила противників для i-ої команди дорівнює $S^*_{n,g}(i)=(n+1)(n-2)/2+i-c$ для кожного i та деякої сталої c. Позначимо $EIT(n,n-g-1)$

доповнення $FIT(n,g)$ до повного кругового турніру. $FIT(n,g)$ існує тоді і тільки тоді, коли існує $EIT(n,n–g–1)$.

Відомо, що задача знаходження $EIT(n,n–g–1)=EIT(n,r)$ еквівалентна задачі знаходження дистанційної магічної розмітки r-регулярного графа на n вершинах, а для доповнення $FIT(n,g)=FIT(n,n–r–1)$ – дистанційної антимагічної розмітки графа.

Дистанційною магічною розміткою графа $G=(V, E)$ порядку n називається бієкція $f: V(G)\to\{1, 2, \dots, n\}$, для якої існує натуральне число k таке, що для кожної вершини u справедлива рівність $k=\sum_{v\in N(u)} f(v)$, де суму $\sum_{v\in N(u)} f(v)$ називають вагою вершини u і позначають $w(u)$, а $N(u)$ – множина суміжності вершини u Величина k називається *магічною сталою розмітки f*, а граф, що допускає таку розмітку f – *дистанційним магічним*.

Дистанційною d-антимагічною розміткою графа $G=(V, E)$ порядку n називається бієкція $\overline{f}: V(G)\to\{1, 2, \dots, n\}$, для якої існує така впорядкованість вершин G, що послідовність ваг $w(u_1)$, $w(u_2)$, …, $w(u_n)$ утворює арифметичну прогресію з різницею d. Коли $d=1$, $\overline{f}$ називають *дистанційною антимагічною розміткою*.

Очевидно, якщо граф G є дистанційним магічним, то його доповнення $\overline{G}$ буде дистанційним антимагічним.

Врівноваженою (*впорядкованою*) *дистанційною d-антимагічною розміткою* графа $G=(V, E)$ порядку n називається бієкція $\vec{f}: V(G)\to\{1, 2, \dots, n\}$ з властивістю, що $\vec{f}(u_i)=i$ та послідовність ваг $w(u_1)$, $w(u_2)$, …, $w(u_n)$ утворює зростаючу арифметичну прогресію з різницею d. Коли $d=1$, таку розмітку називають *врівноваженою дистанційною антимагічною* (*або врівноваженою*).

Задача планування врівноважених неповних кругових турнірів еквівалентна задачі побудови регулярного врівноваженого дистанційного d-антимагічного графа.

В [3] сформульовано відкриту проблему, яка полягає в наступному: з'ясувати для якої пари (n,g) існує врівноважений турнір $HIT(n,g)$, тобто g-регулярний врівноважений дистанційний d-антимагічний граф порядку n. Іншим напрямком дослідження виступає задача існування врівноважених дистанційних d-антимагічних графів для $d>1$.

Авторами даної роботи застосовано дві стратегії побудови врівноважених дистанційних d-антимагічних графів. Одна полягає в використанні рекурсивного методу, друга – в побудові g-регулярних врівноважених дистанційних d-антимагічних графів порядку n для конкретних значень g и n.

Список використаних джерел:

1. Bloom G. S., Golomb S. W. Numbered complete graphs, unusual rulers, and assorted applications / G. S. Bloom, S. W. Golomb // In Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Math. – 1978. – № 642. – 53-65 p.
2. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling / J. A. Gallian // The Electronics Journal of Combinatorics. – 2015. – 389 p.
3. Froncek D. Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments / D. Froncek // AKCE Int. J. Graphs Comb. – 2013. – V.10, No 2. – 119-127 p.