УДК 519.8, 621.77

В. О. Краєвський, В. М. Михалевич
Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна

ОПТИМІЗАЦІЯ ШВИДКІСНОГО РЕЖИМУ БАГАТОСТУПЕНЕВОГО ГАРЯЧОГО ДЕФОРМУВАННЯ ПРИ ОДНАКОВІЙ ТРИВАЛОСТІ СТУПЕНІВ

При розв'язанні задачі оптимізації швидкісного режиму багатоступеневого гарячого деформування з метою зменшення впливу кількості ступенів на структуру задачі нелінійного програмування, розв'язок пропонується шукати у вигляді багатоступеневої зміни швидкості із однаковою тривалістю ступенів та із зміною швидкості за траєкторією, що задається певною функцією із параметрами.

Ключові слова: гаряче деформування, пластичність, варіаційна задача, математичне програмування, руйнування.

При гарячому деформуванні на граничну деформацію, яку здатний витримати без руйнування матеріал, суттєво впливає швидкість деформування [1]. Враховуючи, що підтримка необхідної температури зразка при гарячому деформуванні вимагає затрат енергії (якщо температуру не підтримувати, то з її зменшенням будуть погіршуватися пластичні характеристики матеріалу та зростати опір деформуванню, що в результаті знову призведе до збільшення роботи деформування), є зміст у скороченні часу процесу деформування шляхом варіювання швидкості. Очевидно при цьому не повинна постраждати якість виробу, відповідно поставлена задача повинна вирішуватися з урахуванням пластичних можливостей матеріалу.

З метою оптимізації режиму гарячого пластичного деформування запропоновано варіаційну задачу [2]: визначити закон зміни швидкості деформації $\dot{\varepsilon}_u = \dot{\varepsilon}_u(t)$, при якому за заданий час t_* матеріал набуває найбільшої деформації $\varepsilon_{\max}$

$$\varepsilon_{\max} = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau \to \max,$$
$$\begin{cases} \int_0^{t_*} \phi\big(t_* - \tau; I(\tau)\big)\cdot f\big(\dot{\varepsilon}_u(\tau)\big)\cdot d\tau = 1, \\ 0 < \psi(t) = \int_0^{t} \phi\big(t - \tau; I(\tau)\big)\cdot f\big(\dot{\varepsilon}_u(\tau)\big)\cdot d\tau < 1,\ \forall t \in (0, t_*), \end{cases} \tag{1}$$

де t_* – граничний час, що відповідає руйнуванню зразка; $t,\ \tau$ – час; $\phi\big(t-\tau, I(\tau)\big)$ – ядро спадковості; f – деяка функція.

У попередніх роботах [3,4] була поставлена задача знаходження розв'язку задачі (1) для класу кусково-сталих функцій. Технологічно такий клас функцій відповідає гарячому деформуванню із незмінними показником «жорсткості» напруженого стану η і напрямним тензором приростів швидкостей деформацій β_{ij}, тобто, згідно з класифікацією, що запропонована в роботі [1], простому багатоступеневому гарячому деформуванню

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1},\ 0 \le t \le t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2},\ t_1 \le t \le t_2; \\ \ldots \\ \dot{\varepsilon}_{uk},\ t_{k-1} \le t \le t_*. \end{cases} \tag{2}$$

Було показано, що сформульована варіаційна задача (1) за цих умов зводиться до задачі нелінійного програмування. В результаті було сформульовано, досліджено та розв’язано низку подібних задач [3, 4].

Відповідний напрям фактично дійшов свого логічного завершення, коли було сформульовано і програмно реалізовано випадок k-ступеневого деформування [4]. Основна проблема такого представлення полягає у тому, що цільова функція задачі нелінійного програмування залежить від $2k-1$ параметрів, при цьому формується k умов, одна з яких – строге нелінійне рівняння, інші –

нелінійні нерівності, які формують множину можливих значень відповідних параметрів. Тоді в загальному випадку для знаходження оптимального розв'язку необхідно визначити екстремуми на кожній межі ($2k-2$)-мірного простору. Так за умов 2-х ступеневої зміни швидкості при знаходженні точок можливого оптимуму необхідно розв'язати дві системи нелінійних рівнянь, для 3-х ступеневого деформування таких систем чотири, для k -ступеневого деформування – $1+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(k-1)!}{i!(k-i-1)!}=2^{k-1}$.

Кількість рівнянь в кожній системі від k-1 до $2(k-1)$ із відповідною кількістю невідомих. Тобто складність структури отриманої задачі, а, отже, і складність отримання розв'язку, однозначно визначається попередньо заданою кількістю ступенів зміни швидкості деформування k .

Сформульована нами гіпотеза, що деформування на кожному ступені відбувається до моменту, що передує граничному стану надала можливість суттєво зменшити кількість обчислень - замість розв'язання 2^{k-1} систем нелінійних рівнянь знаходиться розв'язок лише однієї.

Проте, навіть із застосуванням цієї гіпотези та потужностей сучасних систем комп'ютерної математики Maple та MathCad було отримано розв'язки сформульованих задач для випадків кількості ступенів, що не перевищує 6.

Спробуємо зменшити вплив кількості ступенів на структуру задачі нелінійного програмування. Надалі шукатимемо розв'язок задачі багатоступеневого деформування з такими додатковими умовами:

а) тривалість кожного ступеня є незмінною: $\Delta t_i=\Delta t=const$;

б) зміна швидкості деформації з переходом до наступної ступені відбувається за траєкторією, що задається функцією $f\left(c_0,c_1,...,c_n,t\right)$, де $c_0,c_1,...,c_n$ – параметри функції.

Тоді зміна швидкості деформації відбуватиметься за законом (мал. 1)

$$\dot{\varepsilon}_u\left(t\right)=\begin{cases} f\left(c_0,c_1,...,c_n,0\right),\ 0\le t<\Delta t; \\ f\left(c_0,c_1,...,c_n,\Delta t\right),\ \Delta t\le t<2\Delta t; \\ ... \\ f\left(c_0,c_1,...,c_n,\left(i-1\right)\Delta t\right),\ \left(i-1\right)\Delta t\le t<i\cdot\Delta t; \\ ... \\ f\left(c_0,c_1,...,c_n,\left(k-1\right)\Delta t\right),\ \left(k-1\right)\Delta t\le t\le k\cdot\Delta t. \end{cases} \tag{3}$$

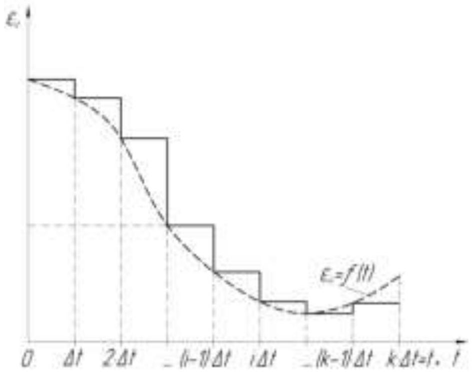


Рис. 1. Зміна швидкості деформації

Із врахуванням (3) та низки інших гіпотез [1] задача (1) набуває вигляду

$$\varepsilon_u\left(c_0,c_1,...,c_n\right)=\Delta t\cdot\sum_{i=1}^{k}f\left(c_0,c_1,...,c_n,\left(i-1\right)\Delta t\right)\to\max,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta t^n}{\gamma^n}\sum\limits_{i=1}^{k}\Big(\left(k-i+1\right)^n-\left(k-i\right)^n\Big)f\left(c_0,c_1,...,c_n,\left(i-1\right)\Delta t\right)=1, \\ \dfrac{\Delta t^n}{\gamma^n}\sum\limits_{i=1}^{q}\Big(\left(q-i+1\right)^n-\left(q-i\right)^n\Big)f\left(c_0,c_1,...,c_n,\left(i-1\right)\Delta t\right)\le 1,\ q=\overline{1,k-1}. \end{cases} \tag{4}$$

Аналіз співвідношення (4) показує, що цільова функція залежить від параметрів $c_0, c_1, ..., c_n$, тобто від параметрів функції. Отже, ми позбулися залежності кількості шуканих невідомих від кількості ступенів деформування.

Проте повністю позбутись впливу кількості ступенів на складність структури задачі нелінійного програмування не можливо, тому що кожній ступені у системі обмежень відповідає нерівність, яка пов'язана із досягненням граничного стану матеріалу.

Аналіз результатів моделювання шестиступеневого деформування [4] дозволяє зробити припущення, що оптимальний закон зміни швидкості деформації, що відповідає значенню ε_*, є монотонно спадною функцією на проміжку $[0; t_*)$. Саме з цих міркувань оберемо траєкторію зміни швидкості деформації. Розглянемо траєкторію, що задається експоненціальною функцією

$$f(c_0, c_1, t) = c_0 e^{c_1 t} \tag{5}$$

Тоді згідно (3) швидкість деформації визначається за формулою

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} c_0,\ 0 \le t < \Delta t; \\ c_0 \lambda,\ \Delta t \le t < 2\Delta t; \\ c_0 \lambda^2, 2\Delta t \le t < 3\Delta t; \\ ... \\ c_0 \lambda^{(i-1)},\ (i-1)\Delta t \le t < i \cdot \Delta t; \\ ... \\ \alpha \lambda^{(k-1)},\ (k-1)\Delta t \le t \le k \cdot \Delta t, \end{cases} \tag{6}$$

де $\lambda = e^{c_1 \cdot \Delta t}$. У результаті задача (4) із врахуванням (6) набуває вигляду

$$\begin{gathered} \varepsilon_u(c_0, \lambda) = c_0 \cdot \Delta t \sum_{i=1}^{k} \lambda^{(i-1)} \to \max, \\ \begin{cases} \dfrac{c_0 \cdot \Delta t^n}{\gamma^n} \sum_{i=1}^{k} \left((k-i+1)^n - (k-i)^n \right) \lambda^{i-1} = 1, \\ \dfrac{c_0 \cdot \Delta t^n}{\gamma^n} \sum_{i=1}^{q} \left((q-i+1)^n - (q-i)^n \right) \lambda^{i-1} \le 1, \\ q = \overline{1, k-1}. \end{cases} \end{gathered} \tag{7}$$

Отже, цільова функція залежить від двох параметрів c_0 та λ.

Далі використовуватиме таку теорему.

Теорема 1. Якщо умова

$$\frac{c_0 \cdot \Delta t^n}{\gamma^n} \sum_{i=1}^{q} \left((q-i+1)^n - (q-i)^n \right) \lambda^{i-1} \le 1 \tag{8}$$

виконується при $q = j$, то вона також виконується при $q = j - 1$ $\forall n \in (0;1)$.

Доведення.

Враховуючи, що $\dfrac{c_0 \cdot \Delta t^n}{\gamma^n} > 0$ умову (8) можна переписати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{q} \left((q-i+1)^n - (q-i)^n \right) \lambda^{i-1} \le M, \tag{9}$$

де $M = \dfrac{\gamma^n}{c_0 \cdot \Delta t^n} > 0$.

При $q = j$ ліва частина нерівності (9) матиме вигляд:

$$\left(j^n-(j-1)^n\right)+\left((j-1)^n-(j-2)^n\right)\lambda+\ldots+\left(2^n-1^n\right)\lambda^{j-2}+\lambda^{j-1} \tag{10}$$

При $q=j-1$

$$\left((j-1)^n-(j-2)^n\right)+\left((j-2)^n-(j-3)^n\right)\lambda+\ldots+\left(1^n-0^n\right)\lambda^{j-2} \tag{11}$$

Кожний доданок виразу (10) більший за відповідний доданок виразу (11), крім того вираз (10) має на один додатній доданок більше $\left(\lambda^{j-1}\right)$, тому очевидно

$$\begin{gathered}\left((j-1)^n-(j-2)^n\right)+\left((j-2)^n-(j-3)^n\right)\lambda+\ldots+\left(1^n-0^n\right)\lambda^{j-2}< \\ <\left(j^n-(j-1)^n\right)+\left((j-1)^n-(j-2)^n\right)\lambda+\ldots+\left(2^n-1^n\right)\lambda^{j-2}+\lambda^{j-1}\end{gathered} \tag{12}$$

Розглянувши разом (9) та (12), отримаємо

$$\sum_{i=1}^{j-1}\left((j-i)^n-(j-i-1)^n\right)\lambda^{i-1}\le M\,, \tag{13}$$

тобто умова (8) виконується при $q=j-1$. *Теорему доведено.*

Застосування теореми 1 надає можливість спростити задачу (7)

$$\begin{gathered}\varepsilon_u\left(c_0,\lambda\right)=c_0\cdot\Delta t\sum_{i=1}^{k}\lambda^{(i-1)}\to\max, \\ \begin{cases}\dfrac{c_0\cdot\Delta t^n}{\gamma^n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n-(k-i)^n\right)\lambda^{i-1}=1, \\ \dfrac{c_0\cdot\Delta t^n}{\gamma^n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\left((k-i)^n-(k-i-1)^n\right)\lambda^{i-1}\le 1.\end{cases}\end{gathered} \tag{14}$$

Тобто $k-1$ нерівностей в системі обмежень замінено лише одною нерівністю (!). Знайдемо c_0 з рівняння системи обмежень

$$c_0=\frac{\gamma^n}{\Delta t^n\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n-(k-i)^n\right)\lambda^{i-1}} \tag{15}$$

та отримаємо задачу оптимізації функції однієї змінної λ

$$\varepsilon_u\left(\lambda\right)=\frac{\gamma^n\Delta t^{1-n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\lambda^{(i-1)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n-(k-i)^n\right)\lambda^{i-1}}\to\max \tag{16}$$

лише з одною додатковою умовою у вигляді нерівності

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\left((k-i)^n-(k-i-1)^n\right)\lambda^{i-1}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n-(k-i)^n\right)\lambda^{i-1}}\le 1 \tag{17}$$

Теорема 2. При $\gamma>0$ та $0<n<1$ функція $\varepsilon\left(\lambda\right)$ є монотонно спадною на проміжку $\lambda\in[0,+\infty]$.

Доведення.

Враховуючи, що $\gamma^n>0$, знак похідної функції (16)

$$\frac{d\varepsilon_u}{d\lambda}=\frac{\gamma^n}{\Delta t^{n-1}}\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(i-1)\lambda^{i-2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n-(k-i)^n\right)\lambda^{i-1}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n-(k-i)^n\right)\lambda^{i-1}\right]^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(i-1)\left((k-i+1)^n-(k-i)^n\right)\lambda^{i-2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda^{i-1}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n-(k-i)^n\right)\lambda^{i-1}\right]^2}\right], \tag{18}$$

однозначно визначається знаком чисельника

$$\sum_{i=1}^{k}(i-1)\lambda^{i-2}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n-(k-i)^n\right)\lambda^{i-1}-$$
$$-\sum_{i=1}^{k}(i-1)\left((k-i+1)^n-(k-i)^n\right)\lambda^{i-2}\cdot\sum_{i=1}^{k}\lambda^{i-1}=\sum_{j=0}^{2k-3}r_j\lambda_j. \tag{19}$$

Коефіцієнти r_j визначаються:

при $j=\overline{0,k-2}$ як

$$r_j=\sum_{t=0}^{j}(j-t+1)\left((k-t)^n-(k-t-1)^n\right)-(t+1)\left((k-t-1)^n-(k-t-2)^n\right); \tag{20}$$

при $j=\overline{k-1,2k-3}$ як

$$r_j=\sum_{t=0}^{2k-3-j}(2k-2t-j-3)\left((2k-j-t-2)^n-(2k-j-t-3)^n\right). \tag{21}$$

Доведемо, що $\forall j\in[0;k-2]:r_j\le 0$.

Вираз (20) запишемо у вигляді

$$r_j=(j+1)k^n-2(k-1)^n-2(k-2)^n-\ldots-2(k-j-1)^n+(j+1)(k-j-2)^n \tag{22}$$

або перегрупувавши доданки отримаємо

$$r_j=\sum_{t=0}^{s}(j-2t+1)\left(\left((k-t)^n-(k-t-1)^n\right)-\left((k-j+t-1)^n-(k-j+t-2)^n\right)\right) \tag{23}$$

де $s=\frac{j+1}{2}$ для непарних j; $s=\frac{j}{2}+1$ для парних j.

Враховуючи, що при заданих s, j, t, k виконуються нерівності $j-2t+1\ge 0$ і $(k-t-1)>(k-j+t-1)$ і з огляду на графік функції $y=x^n$ при $0<n<1$ (швидкість зміни функції $y'=\frac{n}{x^{1-n}}$ – монотонно спадна функція) отримаємо (мал. 2)

$$\left((k-t)^n-(k-t-1)^n\right)-\left((k-j+t-1)^n-(k-j+t-2)^n\right)<0, \tag{24}$$

тоді з (23) r_j це сума від'ємних та рівних нулю доданків, тому отримаємо $r_j<0$.

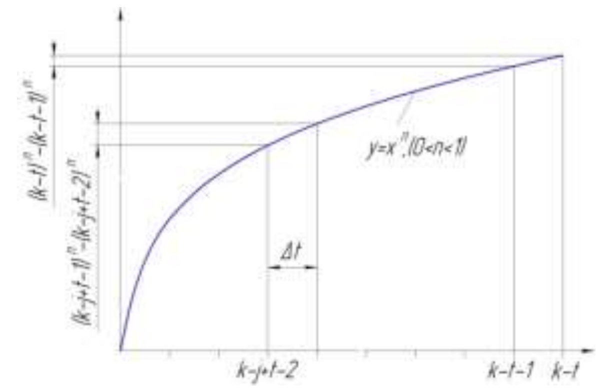


Рис. 2. Для визначення знака коефіцієнтів r_j

Аналогічно доводимо, що $\forall j \in [k-1, 2k-3] : r_j < 0$.

Тоді $\sum_{j=0}^{2k-3} r_j \lambda^j < 0$ на інтервалі $\lambda \in [0;+\infty)$, тобто $\frac{d\varepsilon_u}{d\lambda} < 0$ і, отже, $\varepsilon_u(\lambda)$ є монотонно спадною. *Теорему доведено.*

Згідно з теоремою 2 найбільше значення функції $\varepsilon_u(\lambda)$ отримаємо при найменшому значенні λ, що задовольняє нерівність (17).

Функція

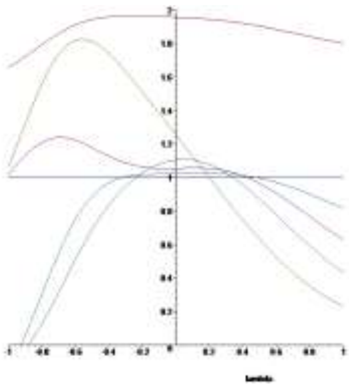
$$f(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{k-1}\left((k-i)^n - (k-i-1)^n\right)\lambda^{i-1}}{\sum_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n - (k-i)^n\right)\lambda^{i-1}}$$

є монотонно спадною при $\lambda \in [0;+\infty]$, тому мінімальне невід'ємне значення λ, при якому виконується умова (17) знайдемо з нелінійного відносно λ рівняння

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\left((k-i)^n - (k-i-1)^n\right)\lambda^{i-1}}{\sum_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n - (k-i)^n\right)\lambda^{i-1}} = 1 \tag{25}$$

Отже, розв'язок задачі (7) (тобто значення параметрів c_0 та λ) для довільної кількості етапів (!) знайдемо із одного співвідношення і одного рівняння:

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{\gamma^n}{\Delta t^n \sum_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n - (k-i)^n\right)\lambda^{i-1}}, \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{k-1}\left((k-i)^n - (k-i-1)^n\right)\lambda^{i-1}}{\sum_{i=1}^{k}\left((k-i+1)^n - (k-i)^n\right)\lambda^{i-1}} = 1. \end{cases} \tag{26}$$



Мал. 3. Розрахунок граничних кривих, що визначаються нерівностями (7)

Задачу розв'язали для неперервного кручення зразків із сталі 14Х17Н2 при температурі 1150^{0}С при $k = 1000$ за допомогою додатку Maple. У результаті отримали значення параметрів експоненціальної функції (5)

$$\begin{cases} c_0 = 0.2190141371; \\ c_1 = -0.1112120832 \end{cases}$$

і накопичену деформацію $\varepsilon_u = 1.91$, що на 6.2% більше ніж при деформуванні із сталою швидкістю.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Михалевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В.М. Михалевич. – Вінниця: "УНІВЕРСУМ-Вінниця", 1998. – 195 с.
2. Mikhalevich V.M. Variational problems for damage accumulation models heritable type / V.M. Mikhalevich, V.O. Kraevsky // The nonlinear analysis and application 2009: international scientific conference, April 02-04 2009. – Kyiv: NTUU "KPI", 2009. – P. 109-110.
3. Краєвський В.О. Вариационные задачи в теории деформируемости / В.О. Краєвський, В.М. Михалевич // Конструкційна міцність матеріалів і ресурс обладнання АЕС: міжнар. наук.-техн. конф: тези доп. – С. 95-97.
4. Михалевич В.М. Определение оптимальных параметров многоступенчатой схемы изменения скорости деформаций / В.М. Михалевич, В.О. Краєвський // Обработка материалов давленим. – 2011. – Т.27, №2 – С. 10-13.

ОПТИМИЗАЦИЯ СКОРОСТНОГО РЕЖИМА МНОГОСТУПЕНЧАТОГО ГОРЯЧЕГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ ОДИНАКОВОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ СТУПЕНЕЙ

В.А. Краевский, В. М. Михалевич

РЕЗЮМЕ

При решении задачи оптимизации скоростного режима многоступенчатого горячего деформирования с целью уменьшения влияния количества ступеней на структуру задачи нелинейного программирования решение предлагается искать в виде многоступенчатого изменения скорости с одинаковой продолжительностью ступеней и с изменением скорости по траектории, задаваемой функцией с параметрами.

Ключевые слова: горячее деформирование, пластичность, вариационная задача, математическое программирование, разрушение.

OPTIMIZATION SPEED MULTI-STAGE HOT DEFORMATION FOR THE SAME LENGTH OF STEPS

V.O. Krasicki, V. M. Mikhalevich

SUMMARY

When solving the optimization problem of speeding multistage hot deformation in order to reduce the influence of the number of stages in the structure of non-linear programming problem solution it is offered to seek a multi-speed change with the same duration of steps and speed of change in the trajectory, defined by a function with parameters.

Keywords: hot deformation, plasticity, variational problem, mathematical programming, destruction.