

УДК 621.7:519.85

Михалевич В. М.
Добранюк Ю. В.**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НА СВОБОДНОЙ БОКОВОЙ
ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ
ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОСАДКЕ**

Осесимметричная осадка цилиндрических образцов является не только распространенной технологической операцией обработки давлением, но и одним из основных видов лабораторных исследований для определения важнейших технологических свойств материалов.

Процесс осесимметричной осадки цилиндрических образцов при разных условиях трения на торцах.

В работе [1] разработана экспериментально-аналитическая методика определения напряженно-деформированного состояния на боковой поверхности цилиндрических образцов при осесимметричной осадке между плоскими плитами. Отдельные части этой методики использовались и совершенствовались во многих работах, прежде всего в [2–4]. При этом развивая и совершенствуя, в первую очередь экспериментальную часть методики, а также применяя более сложные модели разрушения, авторы стремились упростить расчетную часть, что было, в некоторой степени, оправданно уровнем вычислительных средств того времени. В результате, по мнению авторов, представляющая научный и практический интерес аналитическая часть методики определения напряженно-деформированного состояния осталась фактически незамеченной. Таким образом, до настоящего времени образовался значительный разрыв между современными возможностями информационных технологий и существующими методиками определения напряженно-деформированного состояния и предельных пластических деформаций материала при нестационарных процессах, которые имеют место на свободной боковой поверхности цилиндрического образца, осаживаемого между плоскими плитами. Подобная ситуация приводит, как к неоправданным интеллектуальным и часовым затратам исследователей и инженеров при решении указанных задач, так и к появлению в конечных результатах погрешности неопределенной величины, которая порождается субъективизмом конкретного специалиста.

Целью данной работы является детальный анализ и усовершенствование известной методики [1], а также разработка информационных технологий определения зависимостей между деформациями материала и напряженно-деформированного состояния на свободной боковой поверхности цилиндрического образца при осадке между плоскими плитами.

Для экспериментально-аналитического исследования технологического процесса осесимметричной осадки на боковую поверхность цилиндрического образца в средней по высоте зоне наносится сетка. Сетка наносится типографическим способом [1] или с помощью алмазных отпечатков, выполненных на твердомере «Виккерс» [2]. По результатам измерений искаженной делительной сетки на промежуточных стадиях деформирования устанавливается зависимость между осевой ε_z и окружной ε_φ деформациями:

$$\varepsilon_z = f(\varepsilon_\varphi) \quad (1)$$

в виде таблично заданной функции. Деформации ε_z и ε_φ определяются как натуральные логарифмы отношений текущих размеров к начальным [1].

Зависимость между деформациями (1) аналитически можно аппроксимировать в виде дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, которое должно удовлетворять следующим условиям:

– начальному условию: $\varepsilon_z(\varepsilon_\varphi = 0) = 0$;

– дополнительным условиям:

1) в начальный момент, при $\varepsilon_\varphi = 0$ имеет место простое сжатие $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -2$;

2) на любой стадии осадки, в том числе и при неограниченном увеличении деформации, должно выполняться неравенство $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} < -\frac{1}{2}$.

Таким образом, в течение процесса осадки на свободной боковой поверхности должны выполняться условия:

$$-2 \leq \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} < -\frac{1}{2}, \quad (2)$$

причем значение производной $\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi}$ монотонно увеличивается с ростом деформаций, что является следствием постепенного увеличения бочкообразности боковой поверхности в процессе осадки цилиндрического образца.

Для анализа напряженно-деформированного состояния заготовки нужно вычислить накопленную деформацию, или интенсивность логарифмических деформаций.

Накопленная пластическая деформация определяется известным соотношением [1–6]:

$$\varepsilon_u(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_u(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где t, τ – время; $\dot{\varepsilon}_u$ – интенсивность скоростей деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_u = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\dot{\varepsilon}_z^2 + \dot{\varepsilon}_z \cdot \dot{\varepsilon}_\varphi + \dot{\varepsilon}_\varphi^2}; \quad (4)$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{d\varepsilon_z}{dt}; \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{d\varepsilon_\varphi}{dt}. \quad (5)$$

С учетом выражений (4) и (5) получим следующее выражение для определения накопленной деформации:

$$\varepsilon_u(\varepsilon_\varphi) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \int_0^{\varepsilon_\varphi} \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi}\right)^2 + \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} + 1} \cdot d\varepsilon_\varphi. \quad (6)$$

Интенсивность логарифмических деформаций определяется по формуле:

$$e_u(\varepsilon_\varphi) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\varepsilon_z^2(\varepsilon_\varphi) + \varepsilon_z(\varepsilon_\varphi) \cdot \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\varphi^2}. \quad (7)$$

Рассмотрим некоторые варианты аппроксимации зависимости между осевой ε_z и окружной ε_φ деформациями.

В работе [1] предложена аппроксимация зависимости (1) в виде решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2}{\varepsilon_\varphi^2 + m^2}, \quad (8)$$

где $m > 0$ – константа, которая определяется экспериментально.

Альтернативной аппроксимацией является соотношение, аналогичное соотношению (8), но в котором в качестве параметра процесса выбрана осевая деформация:

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{p^2}{\varepsilon_z^2 + p^2}. \quad (9)$$

В данном случае параметр аппроксимации p аналогичен параметру m .

К качестве еще одной альтернативы выражению (8) авторами предложена следующая аппроксимация:

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\varphi} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot e^{-m \cdot \varepsilon_\varphi}, \quad m > 0. \quad (10)$$

Решением дифференциальных уравнений (8)–(10), с учетом начального условия $\varepsilon_z|_{\varepsilon_\varphi=0} = 0$, получим следующие выражения:

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\varphi - \frac{3}{2} \cdot m \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_\varphi}{m}\right). \quad (11)$$

$$\varepsilon_\varphi = -2 \cdot \varepsilon_z + 3 \cdot p \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_z}{2 \cdot p}\right). \quad (12)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_\varphi - \frac{3}{2 \cdot m} \cdot (e^{-m \cdot \varepsilon_\varphi} - 1). \quad (13)$$

При определении численного значения параметра m на основании экспериментальных данных возникает несколько принципиальных вопросов.

На рис. 1 приведены результаты экспериментальных данных и их аппроксимация как соотношением (8) так и соотношением (11). Следует обратить внимание на то, что речь идет не о разных аппроксимациях, а о разных формах представления одной и той же зависимости.

На каждом этапе деформирования, используя результаты измерения высоты и ширины делительной сетки, определяются значения логарифмических деформаций. Ординаты экспериментальных точек, указанных на рис. 1, а, определялись как отношение $\frac{((\varepsilon_z)_i - (\varepsilon_z)_{i-1})}{((\varepsilon_\varphi)_i - (\varepsilon_\varphi)_{i-1})}$; абсциссы определялись как $(\varepsilon_\varphi)_i$ для точек, обозначенных квадратиками (кривая 1) и $0,5 \cdot ((\varepsilon_\varphi)_i - (\varepsilon_\varphi)_{i-1})$ (кривая 2).

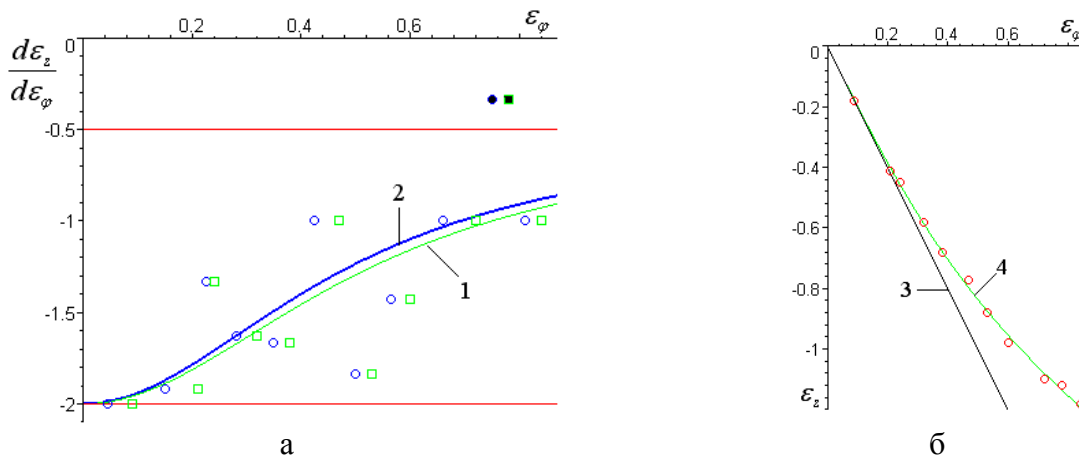


Рис. 1. Определение параметра m методом наименьших квадратов:

а – соотношение (8); б – соотношение (11); 1, \square – $m = 0,53$; 2, \circ – $m = 0,49$;
3 – $\varepsilon_z = -2 \cdot \varepsilon_\varphi$; 4, \circ – $m = 0,49$

Как видно из графика на рис. 1, а одна точка выходит за пределы возможных значений (обозначенная через \circ или \square). Данную точку логично принять за выброс. После ее исключения на основании зависимости (2) методом наименьших квадратов получили значение параметра $m = 0,5$. Отметим, что определение параметра m методом наименьших квадратов как для соотношения (8), так и для соотношения (11) приводит к необходимости решения трансцендентного уравнения сложной структуры. Поэтому значения параметра m находили непосредственной минимизацией суммы квадратов отклонений с помощью стандартной команды дополнительного пакета Optimization системы Maple и проверяли полученное значение с помощью надстройки Microsoft Excel Solver.

Рассмотрим соотношения для определения накопленной деформации и интенсивности логарифмических деформаций с учетом предложенных выше аппроксимаций.

Для аппроксимации (8), предложенной Смирнов-Аляевым Г. А. [1], выражения (6) и (7) приобретают вид:

$$\varepsilon_u(\varepsilon_\varphi) = \int_0^{\varepsilon_\varphi} \sqrt{1 + \frac{3 \cdot m^4}{(\varepsilon_\varphi^2 + m^2)^2}} \cdot d\varepsilon_\varphi; \quad (14)$$

$$e_u(\varepsilon_\varphi) = \sqrt{\varepsilon_\varphi^2 + 3 \cdot m^2 \cdot \arctg^2\left(\frac{\varepsilon_\varphi}{m}\right)}. \quad (15)$$

Используя аппроксимацию зависимости между деформациями, которая выражается дифференциальным уравнением (9), для накопленной деформации и интенсивности логарифмических деформаций получим выражения:

$$\varepsilon_u(\varepsilon_z) = \int_0^{\varepsilon_z} \sqrt{1 + \frac{3 \cdot m^4}{(\varepsilon_z^2 + m^2)^2}} \cdot d\varepsilon_z; \quad (16)$$

$$e_u(\varepsilon_z) = 2 \cdot \sqrt{\varepsilon_z^2 - 3 \cdot \varepsilon_z \cdot m \cdot \arctg\left(\frac{\varepsilon_z}{m}\right) + 3 \cdot m^2 \cdot \arctg^2\left(\frac{\varepsilon_z}{m}\right)}. \quad (17)$$

Аналогично, для аппроксимации (10) выражения (6) и (7) приобретают вид:

$$\varepsilon_u(\varepsilon_\varphi, m) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \left[4 + \ln \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + 3 \cdot e^{-2 \cdot m \cdot \varepsilon_\varphi}} + 1}{3 \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot e^{-2 \cdot m \cdot \varepsilon_\varphi}} - 1} \right) - 2 \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot e^{-2 \cdot m \cdot \varepsilon_\varphi}} \right]; \quad (18)$$

$$e_u(\varepsilon_\varphi) = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\varepsilon_\varphi^2 \cdot m^2 + 3 \cdot e^{-m \cdot \varepsilon_\varphi} \cdot (e^{-m \cdot \varepsilon_\varphi} - 2) + 3}. \quad (19)$$

Переходя к параметрическому представлению выражений (11)–(13) получим:

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = m \cdot \operatorname{tg}(x); \\ \varepsilon_z = -\frac{m}{2} \cdot (\operatorname{tg}(x) + 3 \cdot x) \end{cases} x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad (20)$$

где x – параметр.

$$\begin{cases} \varepsilon_z = -2 \cdot p \cdot \operatorname{tg}(x); \\ \varepsilon_\varphi = p \cdot (4 \cdot \operatorname{tg}(x) - 3 \cdot x) \end{cases} x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]. \quad (21)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = -\frac{\ln(x)}{m}; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot [3 \cdot (x-1) + \ln(x)] \end{cases} \quad x \in (0,1]. \quad (22)$$

С учетом (20) выражения для накопленной деформации (6) и интенсивности логарифмических деформаций (7) приобретают следующий вид [6]:

$$\varepsilon_u(x, m) = m \cdot \int_0^x \sqrt{3 + \frac{1}{\cos^2 x}} dx; \quad (23)$$

$$e_u(x, m) = m \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2(x) + 3 \cdot x^2}. \quad (24)$$

В работе [6] выполнен сравнительный анализ значений накопленной деформации и интенсивности логарифмических деформаций. В результате было отмечено, что для сложного деформирования, которым сопровождается осесимметричная осадка цилиндрических образцов, значения ε_u и e_u отличаются, при чем накопленная деформация является более полной характеристикой закономерностей изменения приращений деформаций.

На основе соотношений (21) и (22) выражения для определения накопленной деформации приобретают вид:

$$\varepsilon_u(x, p) = p \cdot \int_0^x \sqrt{\frac{4}{\cos^2 x} - 3} dx; \quad (25)$$

$$e_u(x, m) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \left[4 + \ln \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{1+3 \cdot x^2} + 1}{3 \cdot \sqrt{1+3 \cdot x^2} - 1} \right) - 2 \cdot \sqrt{1+3 \cdot x^2} \right]. \quad (26)$$

Согласно соотношениям (23), (25) накопленная деформация линейно зависит от параметра, который характеризует условия трения на торцах. В этом смысле структура данных соотношений является более простой в сравнении с (14), (16). С другой стороны здесь имеем несобственные интегралы второго рода с переменным верхним пределом, численные методы вычисления которых, при решении основной задачи теории деформируемости, приводят к дополнительным сложностям [4].

Существенное преимущество соотношений (18), (26) заключается в значительно меньшей вычислительной сложности за счет исключения необходимости вычисления неэлементарной функции. Естественно, что данным преимуществом можно воспользоваться только при условии сохранения степени адекватности исходных аппроксимирующих выражений экспериментальным данным. Поэтому целесообразно сравнить траектории деформаций в координатах $\eta - \varepsilon_u$, которые порождаются вышеупомянутыми аппроксимациями при осесимметричной осадке, и значения предельных деформаций.

На рис. 2 представлены соответствующие траектории и расчетные значения предельной накопленной деформации согласно линейному принципу накопления повреждений [4].

Приведенные результаты нам важны для демонстрации и анализа связи начальных и конечных результатов. Как следует из сравнения приведенных данных, траектории деформаций отличаются заметно, причем дополнительный анализ показывает, что происходит это за счет значений показателя напряженного состояния. Однако расчетные значения предельных деформаций по этим траекториям практически не отличаются. Из этого следуют два важных вывода. Основной результат – расчетные значения предельной деформации мало чувствительны к разбросу экспериментальных данных по определению деформаций. Траектории деформаций не могут быть восстановлены однозначно при наличии рассмотренных погрешностей экспериментальных данных. В то же время обнаруженное отличие в траекториях деформаций не имеет принципиального значения с точки зрения определения предельных деформаций.

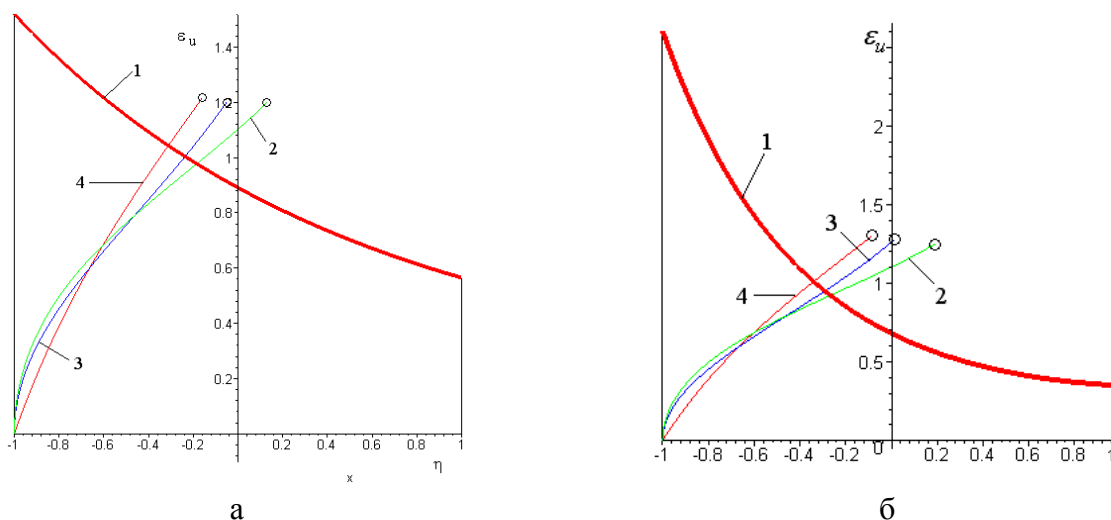


Рис. 2. Траектории деформаций и предельные деформации:
 а – сталь 10; б – сталь ЭИ-961; 1 – кривая предельных деформаций при стационарном деформировании; 2, 3, 4 – траектории деформаций, рассчитанные по соотношениям (11) ($m = 0,5$), (12) ($p = 0,857$), (13) ($m = 1,154$) соответственно; \circ – расчетные значения предельной накопленной деформации по соответствующим траекториям

ВЫВОДЫ

Математический аппарат, представленный в данной работе, положен в основу разработанных информационных технологий экспериментально-аналитического моделирования деформированного состояния материала на свободной боковой поверхности цилиндрических образцов при осесимметричной осадке. Предложенная методика может быть положена в основу построения моделей для описания более широкого круга процессов [2, 6, 7], чем осесимметричная осадка цилиндрических образцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Инженерные методы расчета операций пластической обработки материалов / Г. А. Смирнов-Аляев. – М. – Л. : Машгиз, 1961. – 463 с.
2. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении / В. А. Огородников. – К. : УМК ВО, 1989. – 152 с.
3. Огородников В. А. Механіка процесів холодного формозмінювання з однотипними схемами механізму деформації : монографія / В. А. Огородніков, В. І. Музичук, О. В. Нахайчук. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007. – 179 с.
4. Матвийчук В. А. Совершенствование процессов локальной ротационной обработки давлением на основе анализа деформируемости металлов : монография / В. А. Матвийчук, И. С. Алиев. – Краматорськ : ДГМА, 2009. – 268 с.
5. Михалевич В. М. Побудова ефективних обчислювальних схем у Maple під час розв'язання задачі визначення граничних деформацій за умов складного деформування [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, О. В. Михалевич // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2009. – № 2. – 7 с. – Київ : Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського. – Режим доступу до журн.: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2009_2/2009-2.htm.
6. Михалевич В. М. Накопичена деформація та інтенсивність логарифмічних деформацій при осадці циліндричних зразків з бочкоутворенням / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк // Обработка металлов давлением : сборник научных трудов. – Краматорськ : ДГМА, 2009. – № 1 (20). – С. 129–134.
7. Алиев И. С. Формоизменение при радиально-прямом выдавливании на оправке / И. С. Алиев, Л. И. Алиева, Я. Г. Жбанков // Обработка металлов давлением : сборник научных трудов. – Краматорск : ДГМА, 2008. – № 1 (19). – С. 171–176.

Михалевич В. М. – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой ВНТУ;
 Добранюк Ю. В. – аспирант ВНТУ.

ВНТУ – Винницкий национальный технический университет, г. Винница.

E-mail: vmykhal@gmail.com