УДК

В. М. Михалевич, V. M. Mykhalevych

Винницкий национальный технический университет, г. Винница, Украина

Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine

ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ
HISTORY AND CURRENT STATE TENSOR THEORY OF DAMAGE ACCUMULATION

Предлагается краткое освещение истории становления раздела механики повреждений, который предлагается называть теорией суммирования повреждений. Сформулированы сущность, цели и задачи данного подхода к построению предельных состояний материала. Проведена аналогия построения теории длительной прочности и теории предельных пластических деформаций. Отмечены основные результаты, полученные А. А. Ильюшиным и их развитие. Ключевые слова:суммирование повреждений, тензор повреждений, нелинейный закон.

A brief history of the development section of damage mechanics, which was being proposed to called the theory of summation of damage - is presented. Essence, aims and problems of this approach to the construction of the material limit state - formulated. The analogy between the theory of long-term strength and ultimate plastic strain theory - draw. The main results obtained by Il'yushin and their development are described.

Keywords: summation of damage, tensor damage, nonlinear law.

Возникновение механики повреждений или теории рассеянного разрушения обычно связывают с именами Пальмгрена-Майнера, Ю.Н. Работнова, Л.М. Качанова, А.А. Ильюшина и др. Однако в существующих обзорах отличия в результатах, полученных основателями этого направления освещены достаточно фрагментарно. Это создает и определенные трудности в анализе многочисленных современных работ, в которых центральным понятием является поврежденность макрочастицы.

Направление, берущее начало с гипотезы линейного суммирования повреждений, высказанной Пальмгреном [1] в 1924 г., предлагается называть **теорией суммирования повреждений**. Краткому освещению истории становления именно этого направления в механике повреждений и посвящена данная работа.

Сущность подхода, основанного на различных гипотезах относительно закона суммирования повреждений заключается в возможности прогнозирования предельного состояния макрочастицы находящейся в условиях нестационарного деформирования или нагружения на основе данных по достижению предельного состояния в стационарных условиях. Теория суммирования повреждений решает две основные задачи: Первая заключается в описании предельных состояний в виде построения зависимостей для исследуемой величины от ряда факторов в условиях неизменности величин, характеризующих указанные факторы в течение испытания данного образца. Величины, характеризующие ряд факторов, в данном случае являются аргументами некоторой функции. На практике более распространенными являются ситуации, при которых указанные аргументы не остаются постоянными в изучаемом процессе, например, условия нестационарного нагружения или деформирования. Построение предельных состояний при подобных условиях и относится ко второй задаче.

Для теории длительной прочности первая задача заключается в построении зависимости времени до разрушения от величины напряжения, показателей напряженного состояния, температуры и т.д. При этом полагается, что все указанные факторы являются неизменными при испытании данного образца – стационарное изотермическое нагружение. Такую зависимость предлагается называть поверхностью длительной прочности и для плоского напряженного состояния представлять ее в координатах [2, 3]

$$t_{*c} = t_{*c}\left(\sigma_i, \eta, T\right), \tag{1}$$

где t_{*c} – время до разрушения; σ_i, T, η, - соответственно интенсивность напряжений, температура и безразмерный инвариантный показатель напряженного состояния, равный отношению первого инварианта тензора напряжений к интенсивности напряжений. Вторая задача состоит в определении времени до разрушении при изменении, по крайней мере, одного из аргументов зависимости (1) в процессе испытания. Первую подобную модель связывают с именами Пальмгрена и Майнера, первый из которых предложил, а второй в 1945 г. - обосновал гипотезу линейного суммирования повреждений [4]. Поэтому гипотезу линейного суммирования повреждений называют иногда гипотезой Пальмгрена-Майнера [5]. Обобщение данной гипотезы на случай непрерывного изменения параметров нагрузки выполнено Бейли [6] в 1939 г. К процессам ползучести принцип линейного суммирования был применен впервые Робинсоном [7] в 1952 г., а к процессам пластического деформирования - В.Л. Колмогоровым [8] в 1970 г.

В теории длительной прочности принцип линейного суммирования повреждений для случая ступенчатого изменения аргументов функции (1) можно записать в следующщм виде

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\Delta t_k}{t_{*c}\left(\left(\sigma_i\right)_k, \eta_k, T_k\right)} = 1, \tag{2}$$

где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ - длительность k – ой ступени; t_{k-1} – момент перехода к k - ой ступени; t_k – момент завершения k – ой ступени; $\left(\sigma_i\right)_k, \eta_k, T_k$ - соотвественно значения интенсивности напряжений, показателя напряженного состояния и температуры, сохраняющиеся неизменными на k - ой ступени; N – количество ступеней нагружения.

При известных значениях

$$\Delta t_k, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{3}$$

и

$$t_{*k} = t_{*c}\left(\left(\sigma_i\right)_k, \eta_k, T_k\right), \quad k = \overline{1, N}, \tag{4}$$

соотношение (2) позволяет прогнозировать момент наступления предельного состояния, т.е. длительность последней ступени $\Delta t_N \equiv \Delta t_{*N}$

$$\Delta t_{*N} = \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Delta t_k}{t_{*c}\left((\sigma_i)_k, \eta_k, T_k \right)} \right) \cdot t_{*c}\left((\sigma_i)_N, \eta_N, T_N \right), \qquad (5)$$

Применительно к одноосному изотермическому (T=T_0) растяжению обобщение соотношения (2) на случай непрерывного изменения величины напряжения во времени имеет вид интеграла Бейли

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{t_{*c}\left[\sigma_i(\tau), 1, T_0 \right]}, \qquad \psi(0) = 0, \qquad \psi(t_*) = 1, \qquad (6)$$

где ψ - величина поврежденности, характеризующая степень изменения свойств материала; t_* - расчетное время до разрушения при заданном законе изменения σ_i= $\sigma_i(t)$ в процессе испытания.

Первый шаг на пути приложения данного подхода к анализу процессов обработки давлением был сделан В.Л. Колмогоровым, который фактически не построил новую математическую модель, а предложил координаты для записи интеграла Бейли

$$\psi(E) = \int_0^E \frac{dE}{E_{*c}\left[\eta(E) \right]}, \ \psi(0) = 0, \qquad \psi(E_*) = 1, \qquad (7)$$

где E – накопленная пластическая деформация; E_{c*} = $E_{c*}(\eta)$- кривая предельных деформаций, аналогичная кривой длительной прочности; E_* - величина, аналогичная t_*. Координаты E-η по-видимому впервые были введены Г.А. Смирновым-Аляевым для построения траектории деформаций. Указанные замечания никоим образом не умаляет значимости модели (7), получившей уникальную востребованность, цитируемую и используемую в сотнях, а скорее - в тысячах научных работ. Следует заметить, что в работах В.Л. Колмогорова и его учеников вместо показателя η используется величина, равная $\eta/\sqrt{3}$, что конечно же не имеет принципиального значения.

Линейный принцип (2), описывающий процессы ступенчатого и, в частности, циклического нагружения получил обобщение в виде огромного количества нелинейных соотношений при описании малоцикловой и многоцикловой усталости. Некоторое представление об этих работах содержится в [9-11].

В [9] для описания усталостной долговечности в условиях ступенчатого изменения амплитуды напряжения предлагается степенной закон нелинейного суммирования повреждений

$$\sum_{k=1}^{N_*} \left(\frac{m_k}{M_{*c}(\sigma_k)} \right)^{\rho(\sigma_k)} = 1, \qquad (8)$$

где m_k - количество циклов на k – ой ступени; σ_k – амплитуда напряжений на k – ой ступени; $M_{*c}(\sigma_k)$– предельное количество циклов, соответствующее достижению предельного состояния под действием неизменного уровня напряжений σ_k; N_* – число циклов до разрушения при заданном нестационарном нагружении; $\rho(\sigma_k)$ – параметр модели, являющийся функцией амплитуды напряжений.

По аналогии с указанным подходом к построению моделей суммирования повреждений А.А. Богатовым [12] было предложено соотношение

$$\sum_{k=1}^{N_*}\left(\frac{\Delta E_k}{E_{*c}\left(\eta_k\right)}\right)^a = 1, \tag{9}$$

позволяющее удовлетворительно описать уникальные на тот момент опыты по многоэтапному знакопеременному пластическому закручиванию сплошных цилиндрических образцов, а также опыты по определению остаточной пластичности на кручение (растяжение) образца, получившего предварительную пластическую деформацию растяжения (кручения).

Здесь ΔE_k - величина накопленной деформации на k – ом этапе; $E_{*c}\left(\eta_k\right)$ – величина накопленной деформации по кривой предельных деформаций, соответствующая значению показателя $\eta = \eta_к$; a_i – момент завершения k – ой ступени; $\left(\sigma_i\right)_k, \eta_k, T_k$ - соотвественно значения интенсивности напряжений, показателя напряженного состояния и температуры, сохраняющиеся неизменными на k – ой ступени; N - количество ступеней нагружения.

Следует отметить, что не случайно наравне с термином "ступень нагружения" используется термин "этап деформирования (нагружения)". Согласно предложенным трактовкам [3] "ступень" является частным случаем "этапа", когда заданный направляющий тензор остается неизменным при переходе от этапа к этапу.

Заметим, что подобный подход к построению моделей суммирования повреждений не всегда достаточно эффективен, поскольку основной целью является описание сравнительно узкого круга экспериментальных данных. И расширение выводов, следующих из подобных моделей на более широкий класс деформирования или нагружения может приводить к серьезным ошибкам. Так, разделяя процесс растяжения, кручения, сжатия или любой другой стационарный процесс деформирования на два гипотетических этапа, на основании (9) получим

$$\Delta E_{*2} = \left(1 - \left(\frac{\Delta E_1}{E_{*c}}\right)^a\right)^{1/a} \cdot E_{*c}, \tag{10}$$

где звездочка в обозначении ΔE_{*2} указывает на совпадение конца второго этапа с достижением предельного состояния.

Поскольку разделение на два этапа условное, то должно выполняться тождество

$$\Delta E_{*2} \equiv E_{*c} - \Delta E_1, \tag{11}$$

которое следует из (10) только при a=1, т.е. при условии вырождения нелинейного закона (9) в линейный закон суммирования повреждений.

Однако, согласно данным [9, 12] показатель степени в (8), (9) может быть как больше, так и меньше единицы при описании различных экспериментальных данных. Это означает, что нелинейный закон суммирования повреждений (8), (9), в отличие от линейного закона суммирования повреждений, обладает внутренней противоречивостью. Очевидно, что несоблюдение принципа внутренней непротиворечивости при построении моделей нелинейного суммирования повреждений снижает научную и практическую ценность полученных соотношений.

Ю.Н. Работновым понятие поврежденность используется прежде всего как одна из возможностей описать третий участок на кривой ползучести при растяжении. В работе [13] отмечается, что использование гипотезы, выражаемой уравнением

$$\dot{\psi} = \varphi(\sigma, \psi), \tag{12}$$

наряду с соотношением

$$\dot{e} = f(\sigma, \psi), \tag{13}$$

"не вносит каких-либо изменений в определение времени хрупкого разрушения, но позволяет описать третий участок ползучести, предшествующий разрушению. В статически неопределимых системах учет ускорения ползучести на третьем участке позволяет более правильно описать перераспределение напряжений в элементах системы и оценить долговечность более точно."

Здесь e – деформация ползучести; σ – начальная величина приложенного напряжения; $\dot{e}, \dot{\psi}$ - соотвествующие скорости.

Далее в [13] для получения обозримых результатов дифференциальное уравнение (11) принимается в следующем виде

$$\dot{\psi} = c \cdot \sigma^k \cdot (1 - \psi)^{-r}, \tag{14}$$

где c, k, r – некоторые материальные константы.

Здесь уместно отметить, что величину ψ Ю.Н. Работнов называет как поврежденностью материала так и параметром охрупчивания и указывает, что "… мы можем рассматривать величину ψ как один из структурных параметров, определяющих состояние материала... мы не будем пытаться установить прямую зависимость между количеством трещин на единицу объема, их размером и ориентацией, с одной стороны, и величиной параметра ψ, с другой. …совершенно условно мы выбираем это число в интервале (0, 1), при этом ... $\psi = 1$ соответствует образованию макроскопических трещин".

В [13] указывается, что представление (12) позволяет получить линейный принцип суммирования повреждений (6). В [14] показано, что линейный принцип является следствием более общего, в сравнении с (14), представления

$$\dot{\psi} = \varphi_1(\sigma) \cdot \varphi_2(\psi). \tag{15}$$

В [15] сформулированы и доказаны необходимое и достаточное условия для получения линейного принципа суммирования повреждений на основе представления поврежденности линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Одно из следствий заключается в формулировке достаточного условия получения, на основе линейного дифференциального уравнения первого порядка, нелинейного принципа суммирования повреждений.

Подводя итог обзору результатов, касающихся развития механики поврежденности, полученным в [13], отметим, что основные результаты относятся к построению определяющих соотношений с учетом поврежденности. Модель (6), базирующаяся на линейном принципе суммирования повреждений, рассматривается как дополнительный аспект. Никакие другие модели нелинейного суммирования повреждений, как и результаты длительной прочности при программном нагружении в [13] практически не рассматриваются. Аналогичные замечания в определенной степени можно сделать и относительно результатов, полученных Л.М. Качановым [16].

Таким образом, основы теории суммирования повреждений, берущей начало с гипотезы линейного суммирования и получившей некоторое развитие в классических трудах Ю.Н. Работнова и Л.М. Качанова, были заложены А.А. Ильюшиным [17]. Им же построен тензорно линейный вариант наследственной теории длительной прочности, скалярный вариант которой получил широкое развитие и приложение, в частности, в работах В.В. Москвитина [18, 19].

Здесь уместно обратить внимание на следующий факт. Статья А. А. Ильюшина [17] является одной из наиболее цитируемых работ по механики повреждений в период 1967-2000 гг. Причем объяснить это только авторитетностью автора нельзя, поскольку имеются другие работы А.А. Ильюшина, которые не пользуются такой известностью. С другой стороны, не меньшей популярностью пользуется монография Л. М. Качанова [16], однако редко упоминается работа этого же автора [20], в которой излагается подход к построению модели разрушения для описания сложного нагружения. Тем не менее, несмотря на проявленный интерес к тензорной теории длительной прочности, в течение более четверти века не только не предпринимались попытки развития этой теории, но тензорные свойства развитиых моделей не использовались и даже не были исследованы.

В этот же период динамично развивалась теория суммирования повреждений применительно к большим пластическим деформациям. После появления модели (7) следующим ключевым шагом в построении теории деформируемости явилось появление в 1975 г. нелинейной модели суммирования повреждений В.А. Огородникова [21]

$$\psi(E)=\int_0^E\left(1+a\cdot arctg\left(\frac{d\eta}{d\varepsilon_u}\right)\right)\cdot\frac{E^{a\cdot arctg\left(\frac{d\eta}{d\varepsilon_u}\right)}dE}{E_{*c}^{1+a\cdot arctg\left(\frac{d\eta}{d\varepsilon_u}\right)}\left[\eta(E)\right]},\ \psi(E_*)=1, \quad (16)$$

где для обоснования достоверности и определения параметра a данной модели была разработана методика и получены соответствующие экспериментальные данные на совместное кручение с растяжением по различным программам сплошных цилиндрических образцов.

В 1982 Г. Д. Делем [22] была предложена тензорно-линейная модель суммирования повреждений

$$\psi_{ij}(E)=\int_0^E\left(\frac{1-c}{E_{*c}\left[\eta(E)\right]}+\frac{2\cdot c\cdot E}{E_{*c}^2\left[\eta(E)\right]}\right)\cdot\beta_{ij}(E)\cdot dE, \qquad (17)$$

$$\psi_{ij}(E_*)\cdot\psi_{ij}(E_*)=1, \qquad (18)$$

где c – параметр модели, определяемый экспериментально; β_{ij} - направляющий тензор приращений деформаций.

В рамках данной модели был решен ряд задач, в частности, задачи двухэтапного, циклического и сложного деформирования, задача определения предельной деформации растяжения в определенном направлении предварительно деформированного материала. В большинстве случаев полученные результаты были сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными и известными закономерностями.

В работе [23] была разработана тензорно-нелинейная модель суммирования повреждений, в рамках которой были получены решения новых задач и обобщены решения ряда известных задач.

Существенным развитием тензорной теории суммирования повреждений явилась работа [3]. Одним из ключевых результатов этой работы явилось установление общих концепций и имеющихся различий в тензорной модели длительной прочности А.А. Ильюшина и моделях предельных деформаций. Это позволило объединить два указанных направления в рамках единного методологического подхода, что, в свою очередь, привело как к обогащению самой теории, так и ее приложений.

Среди важнейших следствий указанного объединения следует отметить, значительное усиление прикладной направленности тензорных моделей длительной прочности, новые результаты по формулировке предельных состояний [24], решение новых задач в рамках известных моделей и разработку новых моделей, в частности модели наследственного типа, учитывающей зависимость предельной деформации от закона изменения скорости деформации. Данная модель послужила источником нового направления в теории суммирования повреждений, которое обозначено постановкой и решением оптимизационных задач (вариационной и нелинейного программирования) [25].

Список литературы

1. Palmgren A. Die Lebensdaner von Kugellagem // Z. Vereines Dentscher tag. – 1924. - 68, N14. - P. 339-341.

2. Михалевич В.М. Тензорные модели длительной прочности. Сообщение 1. Длительная прочность при стационарном нагружении // Пробл. прочности. - 1995. - N8. - С. 76-90.

3. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень. - Вінниця: УНІВЕРСУМ–Вінниця, 1998. — 195 с.

4. Miner M. A. Cumulative damage in fatique // J. Appl. Mech. - 1945. - N12.-p. A159-A164.

5. Голуб В.П., Погребняк А.Д., Романов А.В. О применимости гипотезы линейного суммирования в задачах ползучести и усталости //Пробл. прочности. - 1993. - N 10. - С. 20-29.

6. Baily J. Atlempt to correlate some tensile strength mesurement of glass. - "Glass Industry". - 1939. - v.20, N1-3. - p.26-28.
7. Robinson E.L. Effect of temperature variation on the long time rupture strength of steels. - Trans. ASME. – 1952. – 74, N5. - p. 774-781.
8. Колмогоров В. Л. Напряжения, деформации, разрушение. - М.: Металлургия, 1970. - 229 с.
9. Серенсен С. В. Накопление усталостного повреждения при нестационарной напряженности: Докл. на совещании по мех. вопросам усталости. М.: ВИНИТИ. – 1962. – 42 с.
10. Трощенко В. Т., Лебедев А. А., Стрижало В. А. и др. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения. НАН Украины. Ин-т пробл. прочности. – Киев: 2000. - 366 с.
11. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. - 272 с.
12. Богатов А. А., О. И. Мижирицкий, С. В. Смирнов. Ресурс пластичности при обработке давлением. - М.: Металлургия, 1984. - с. 144.
13. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. - М.: Наука, 1966. - 752 с.
14. Голуб В. П. Определяющие уравнения в нелинейной механике поврежденности // Прикл. механика. - 1993. - 29, № 10. - С. 37-49.
15. Михалевич В.М. До лінійного принципу накопичення пошкоджень // Вісник Вінницького політехнічного інституту. - 1998. - №1. - С. 117-121.
16. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. - М.: Наука, 1974. - 312 с.
17. Ильюшин А.А. Об одной теории длительной прочности // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1967. - N 3. – С. 21-35.
18. Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов. - М.: Наука, 1972.- 327 с.
19. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. - М.: Наука, 1981.- 344с.
20. Качанов Л.М. Ползучесть и разрушение при сложном нагружении // Пробл. прочности. - 1977. - N 6. - С. 3-5
21. Огородников В. А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением. - К.: Выща шк., 1983. - 200 с.
22. Дель Г.Д. Пластичность при немонотонном деформировании. Воронеж. - 1982. - 10с. - Деп. в ВИНИТИ 13.04.82, N 1813-82.
23. Мишулин А.А., Михалевич В.М. Совершенствование технологии ковки на основе описания деформационной анизотропии пластичности // В сб. Оптимизация ковки на автоматизированных ковочных комплексах. - М., 1982.-С. 144-161.
24. Лебедев А. А., Михалевич В. М. О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов // Пробл. прочности. – 2003. – № 3. – С. 5–14.
25. Михалевич В. М., Краевский В. А. Постановка и решение оптимизационных задач в теории деформируемости // Вісник національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія машинобудування. – Київ: НТУУ "КПІ". - 2010. – С. 142-145.