SYSTEM MAPLE ADAPTATION TO ILLUSTRATE THE KEY STAGES GEOMETRIC SIMPLEX-METHOD

Mikhalevich Vladimir, Tyutyunnyk Oksana
Vinnitsa National Technical University, Ukraine

This article is devoted to exposition method development of tasks simplex decision basic concepts for the linear programming. The indicated method is based on application of modern information technologies to geometrical interpretation of the system of linear equalizations part decisions for evident explanation of such important simplex method concepts, as feasible solution, impermissible decision, base decision, not base decision, supporting decision, optimum decision.

АДАПТАЦІЯ СИСТЕМИ MAPLE ДО ГЕОМЕТРИЧНОЇ ІЛЮСТРАЦІЇ КЛЮЧОВИХ ЕТАПІВ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ

Михалевич В.М., Тютюнник О.І.
Вінницький національний технічний університет, Україна

Дана стаття присвячена розробці методики викладення основних понять симплекс-методу розв'язання задач лінійного програмування. Указана методика базується на застосуванні сучасних інформаційних технологій до геометричної інтерпретації частинних розв'язків системи лінійних рівнянь для наочної пояснення таких важливих понять симплекс методу, як допустимий розв'язок, недопустимий розв'язок, базисний розв'язок, небазисний розв'язок, опорний розв'язок, оптимальний розв'язок.

Симплекс метод – це універсальний метод розв'язання більшості оптимізаційних задач лінійного програмування. Викладення цього методу на різних рівнях складності висвітлено в сотнях, а той тисячах підручниках та навчальних посібниках.[1-2] Значна частина методичних розробок присвячена викладенню сучасних інформаційних технологій у навчанні розв'язування задач лінійного програмування, в першу чергу – симплекс-методом [3-6]. Сучасні програмні засоби надають можливість отримати розв'язок подібних задач за допомогою простого застосування стандартних команд. Це надає нові можливості, зокрема, ефективні прийоми внесення в процес навчання елементів дослідження. Разом з тим, такий підхід до викладення прийомів розв'язання задач лінійного програмування, який можна назвати "рецептурним", не дає можливість з’ясувати ключові етапи симплекс-алгоритму. Те саме відноситься й до подання цього методу за допомогою симплекс-таблиць, як це має місце в переважній більшості методичної літератури.

Метою даної статті є геометрична інтерпретація частинних розв’язків системи лінійних рівнянь засобами системи Maple для наочної інтерпретації таких важливих понять симплекс методу, як допустимий розв’язок, недопустимий розв’язок, базисний розв’язок, небазисний розв’язок, опорний розв’язок, оптимальний розв’язок.

Тому зрозуміти основні ідеї, що покладені в основу симплекс-методу неможливо без чіткого усвідомлення геометричної інтерпретації кожного із перерахованих розв’язків.

Розглянемо двовимірну задачу лінійного програмування.

Знайти розв’язок задачі

$$z=9x_1 + 12x_2 \rightarrow \max, \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ x_1 \leq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \tag{3}$$

Область допустимих значень задачі є багатокутником ABCD, що зображено на рис.

За допомогою введення додаткових змінних запишему систему обмежень (2) у канонічному вигляді

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 5, \\ x_1 + x_6 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_7 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Знайдемо загальний розв’язок системи (4). Робитимемо це за допомогою системи Maple.

```
> eq1:=x[1]+x[2]-x[3]=3;
```

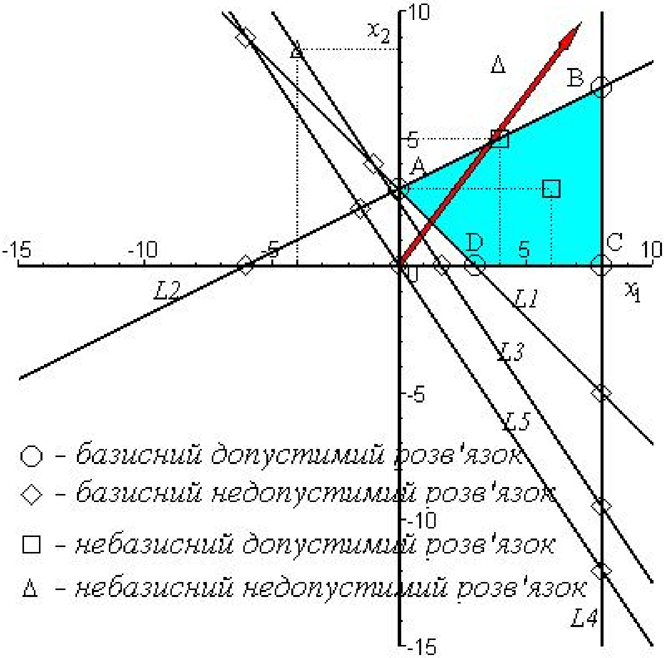

Рис. Геометрична інтерпретація частинних розв'язків систем лінійних рівнянь

eq2:=-x[1]+2*x[2]+x[4]=6; eq3:=3*x[1]+2*x[2]-x[5]=5;
eq4:=x[1] +x[6]= 8; eq5:=3*x[1]+2*x[2]-x[7]=0;

$$eq1 := x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$eq2 := -x_1 + 2\,x_2 + x_4 = 6$$

$$eq3 := 3\,x_1 + 2\,x_2 - x_5 = 5$$

$$eq4 := x_1 + x_6 = 8$$

$$eq5 := 3\,x_1 + 2\,x_2 - x_7 = 0$$

За вільні виберемо змінні x_1, x_2:

> Vilni:=x[1],x[2];
sols_g1:=solve({seq(eq||k,k=1..5)},{x[k]$ k=1..7} minus {Vilni});

$$Vilni := x_1, x_2$$

$$sols\_g1 := \{x_6 = -x_1 + 8, x_7 = 3\,x_1 + 2\,x_2, x_3 = x_1 + x_2 - 3,$$
$$x_4 = x_1 - 2\,x_2 + 6, x_5 = 3\,x_1 + 2\,x_2 - 5\}$$

На основі отриманого загального розв'язку базисний розв'язок простіше всього отримати покладанням нулю вільних змінних x_1=0 та x_2=0

> sols_Baz0:=subs(x[1] = 0, x[2] = 0,sols_g1)union {x[1] = 0, x[2] = 0};

$$sols\_Baz0 := \{x_7 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_6 = 8, x_5 = -5, x_3 = -3, x_4 = 6\}$$

В отриманому базисному розв'язку є від'ємні значення змінних: x_3=-3, x_5=-5, отже маємо недопустимий базисний розв'язок. Будь-якому базисному розв'язку на графіку відповідає точка перетину,

принаймні, двох прямих, що відповідають нерівностям (2), (3). Розв'язок **sols_Baz0** відповідає початку координат. Оскільки через початок координат крім координатних осей, які задаються рівняннями x_1=0, x_2=0, проходить ще й пряма L5, то в даному базисному розв'язку нульове значення має і змінна x_7, яка дорівнює нулю в будь-якій точці цієї прямої.

Слід зауважити, що надання нульових значень вільним змінним це не обов'язковий і не єдиний спосіб отримання базисного розв'язку. Наприклад, якщо отримати загальний розв'язок, що відповідає вільним невідомим x_4, x_6 та надати їм значення x_4=6, x_6=8, то дістанемо базисний розв'язок **sols_Baz0**:

> Vilni:=x[4],x[6];

sols_g2:=solve({seq(eq||k,k=1..5)},{x[k]$ k=1..7} minus {Vilni});

sols_Baz0:=subs(x[4] = 6, x[6] = 8,sols_g2)union {x[4] = 6, x[6] = 8};

$$Vilni := x_4, x_6$$

$$sols\_g2 := \{x_1 = -x_6 + 8, x_3 = -\frac{3}{2}x_6 + 12 - \frac{1}{2}x_4, x_7 = -4\,x_6 + 38 - x_4, x_5 = -4\,x_6 + 33 - x_4,$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}x_6 + 7 - \frac{1}{2}x_4\}$$

$$sols\_Baz0 := \{x_7 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_6 = 8, x_5 = -5, x_3 = -3, x_4 = 6\}$$

Взагалі із загального розв'язку, незалежно від того, які змінні вибрані за вільні, можна отримати будь-який частинний розв'язок, в тому числі і будь-який базисний розв'язок. Це випливає з означення базисного розв’язку. Але очевидно, що вгадати ненульові значення вільних змінних, що відповідають тому або іншому базисному розв’язку, незрівнянно складніше, ніж отримувати базисні розв’язки наданням нульових значень певній сукупності змінних, які називаємо вільними. Отже, надання вільним невідомим нульових значень є зручний спосіб здобуття базисного розв’язку. Деякі автори дають означення базисного розв’яку на основі зручного способу його отримання. Таке означення некоректне і може збити з пантелику вдумливого читача.

Припустимо, нам потрібно дістати розв’язок, що відповідає т. B (рис.). Вибираємо за вільні ті змінні ті, які дорівнюють нулю в цій точці. Точка B є перетином двох прямих L2, L4. Отже,, за вільні приймаємо невідомі x_4, x_6. Загальний розв’язок **sols_g2**, що відповідає такому вибору вільних невідомих, у нас уже є. Знайдемо відповідний базисний розв’язок:

> sols_Baz_B:=subs(x[4] = 0, x[6] = 0,sols_g1)union {x[4] = 0, x[6] = 0};

$$sols\_Baz\_B := \{x_6 = 0, x_4 = 0, x_1 = 8, x_3 = 12, x_7 = 38, x_5 = 33, x_2 = 7\}$$

Звідси, зокрема, можемо отримати координати т. B (x_1=8, x_2=7).

Користуючись тим, що ми маємо геометричну інтерпретацію задачі (1)-(3) отримаємо на основі загального розв’язку декілька частинних розв’язків та охарактеризуємо їх.

Дані зведемо в табл. Кожний розв’язок, що визначається значеннями змінних x_1, x_2, отримували за допомогою команди

> subs(x[1] = x1, x[2] = x2,sols_g1)union {x[1] = x1, x[2] = x2};

Таблиця

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**Характер розв’язку**	**Відповідна точка на рисунку**
1.	0	0	-3	6	-5	8	0	Базисний недопустимий	Початок координат
2.	8	7	12	0	33	0	38	Базисний допустимий, оптимальний	B

3.	4	5	6	0	17	4	22	Небазисний допустимий	Належить відрізку AB
4.	6	3	6	6	19	2	24	Небазисний допустимий	Лежить в сер. багатокутника ABCD
5.	4	8	9	-6	23	4	28	Небазисний недопустимий	Лежить поза межами багатокутника ABCD
6.	-4	8,5	1,5	-15	0	12	5	Небазисний недопустимий	Лежить поза межами багатокутника ABCD, належить прямій L3
7.	-6	0	-9	0	-23	14	-18	Базисний недопустимий	Точка перетину прямої L2 та осі абсцисс
8.	8	-12	-7	38	-5	0	0	Базисний недопустимий	Точка перетину прямих L4 та L5

де **x1**, **x2** – значення змінних x_1, x_2, які наведені в табл.

Дамо більш детальнішу характеристику частинним розв’язкам, що представлені в табл. та на рис., для цього дамо означення цим розв'язкам.

Будь-який набір змінних x_i, $i=\overline{1,n}$, що задовольняє систему рівнянь (4), називається **частинним розв’язком** або **розв’язком** системи.

Між точками площини X(x_1, x_2) та частинними розв’язками системи (4) існує взаємно однозначна відповідність.

Базисним розв’язком називають будь-який частинний розв’язок системи (4), в якому кількість невідомих, що відмінні від нуля, не перевищує рангу матриці системи.

Допустимим розв’язком називають будь-який частинний розв’язок системи (4), в якому відсутні від’ємні значення невідомих.

Частинний розв’язок, який є базисним та допустимим, також називають **опорним планом** (**розв’язком**).

В даній задачі всі п’ять рівнянь системи (4) – лінійно незалежні, отже кількість вільних змінних дорівнює двом. Зручною ознакою базисного розв’язку є наявність у частинному розв’язку, принаймні, двох змінних, що мають нульові значення.

Отже, при $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$ ми отримали точку, що відповідає початку координат, яка розташована поза межами многокутника допустимих значень ABCD, що видно на рис. Ця точка буде базисною, адже будь-якому базисному розв’язку на графіку відповідає точка перетину принаймні двох прямих, що відповідають нерівностям (2), (3). Оскільки через початок координат крім координатних осей, які задаються рівнянням x_1=0, x_2=0, проходить ще й пряма L5, то в даному базисному розв’язку нульове значення має і змінна x_7, яка дорівнює нулю в будь-якій точці цієї прямої (це свідчить про наявність виродженої задачі). Отже, з геометричної інтерпретації розв’язку, що відповідає т. початку координат, випливає, що цей розв’язок є базисним недопустимим. Аналіз значень змінних в даному розв’язку показує, що є від’ємні значення, а це означає, що він є недопустимим. Кількість змінних, що мають нульові значення – три (не менше ніж 2), отже це – базисний розв’язок.

При $x_1 = 8$, $x_2 = 7$ ми маємо точку B, точка B є перетином прямих L2, L4 і є вершиною багатокутника допустимих значень (див. рис.). Отже, даній точці відповідає опорний розв’язок. Вздовж прямих L2, L4 нульових значень набувають, відповідно, невідомі x_4, x_6. Отже, для здобуття розв’язку, що відповідає т. B, зручно при знаходженні загального розв’язку за вільні вибрати указані змінні і далі покласти їх рівними нулю. Аналіз значень невідомих в отриманому розв’язку показує, що маємо базисний (дві змінні дорівнюють нулю) допустимий розв’язок (відсутні від’ємні змінні), тобто - опорний розв’язок. Спосіб перевірки поточного опорного розв'язку на оптимальність, що базується на застосуванні сучасних інформаційних технологій, висвітлено в [7].

При $x_1 = 4$ та $x_2 = 5$ отримали точку, що лежить на прямій L2. Як видно з рис., указана точка належить області допустимих значень, отже їй відповідає допустимий розв'язок. Із додаткового аналізу видно, що вздовж прямої L2, якій належить досліджувана точка, нульове значення має змінна x_4 (в [7] необхідність додаткового аналізу усувається приведенням зручної таблиці даних). Для здобуття розв'язку, що відповідає деякій точці прямої L2, при знаходженні загального розв'язку за вільні можна вибрати змінні x_1, x_4 і далі покласти $x_4 = 0$, а змінній x_1 надати значення абсциси даної точки прямої L2. Аналіз значень невідомих в отриманому розв'язку показує, що маємо небазисний (тільки одна змінна дорівнює нулю) допустимий розв'язок (відсутні від'ємні змінні).

При $x_1 = 6$ і $x_2 = 3$ ми отримали внутрішню точку многокутника допустимих значень, отже їй відповідає допустимий розв'язок. З іншої сторони значення всіх невідомих у відповідному розв'язку є додатними, що свідчить про ознаку допустимості цього розв'язку.

Слід зазначити, що в контексті симплекс-методу не розрізняються розв'язки, що відповідають як внутрішнім точкам, так і точкам межі многокутника допустимих значень, які не є його вершинами. І перші і другі другі відносяться до множини допустимих розв'язків, які неє базисними й інших ознак не мають.

Точка з координатами $x_1 = 4$ і $x_2 = 8$ лежить за межами многокутника допустимих значень ABCD і не належить жодній прямій, що відповідають заданим нерівностям (2), (3). Із цього випливає, що відповідний частинний розв'язок повинен мати, принаймні, одну від'ємну невідому і жодної нульової невідомої. Саме це і можемо спостерігати у відповідному розв'язку, що приведений в табл.

Аналогічно визначаємо, що точка ($x_1 = -4$, $x_2 = 8{,}5$) відповідає частинному розв'язку, який не є ні допустими ні базисним. Точки (x_1=-6, x_2=-0) і (x_1=-8, x_2=--12) відповідають частинним розв'язкам, які є базисними та недопустимим.

Якщо цільова функція має оптимальні значення, то ці значення досягаються обов'язково в одній із кутових точок області допустимих значень. Але це не означає, що оптимального значення цільова функція не може набувати в точці, що не є кутовою. Якщо цільову функцію задачі (1)-(3) замінити новою $z=-x_1 + 2x_2$, то опорна лінія нової задачі буде параллельною відрізку АВ і оптимальний розв'язок цільова функція буде набувати в будь-якій точці цього відрізка, а не тільки в кутових точках А та В. Тобто оптимальними будуть і всі небазисні розв'язки, що відповідають точкам відрізка АВ.

Висновок

Застосування інформаційних технологій надає можливість і спонукає до перегляду акцентів при висвітлені змісту симплекс-методу та формуванні відповідних знань, умінь та навичок. Акценти переносяться від технічної роботи із симплекс-таблицями до усвідомленного опанування ключових ідей, що покладено в основу цього методу.

Література

1. Акулич И.Л. Математическое програмирование в примерах и задачах/ Акулич И.Л. – М.: Высшая школа, 1986.

2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач/ Васильев Ф.П.. – М.: Наука – 1980.- 520с.

3. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика/ Дьяконов В.П. – М.:Новидж, 2001. – 1296с.

4. Триус Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін/ Триус Ю.В. – Черкаси: Брама – Україна, 2005. – 400с.

5. Наконечний С.І. Математичне програмування. Навч. посіб./ Наконечний С.І., Савіна С.С.- К.: КНЕУ, 2003. 452с.

6. Михалевич В.М.Математичне програмування разом із Maple.Частина І. Методи розв'язання задач лінійного програмування. Навч. посіб./Михалевич В.М. – Вінниця : ВНТУ, 2008.-158с.

7. Михалевич В.М. Використання системи комп'ютерної алгебри Maple для висвітлення ключових ідей симплекс-алгоритму/ В.М.Михалевич, О.І.Тютюнник// Теорія та методика навчання

математики, фізики, інформатики: збірник наукових праць. Випуск IX. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2011. – 625с.