УДК 004.932

О.Н. Романюк, д-р. техн. наук, проф.,
О. В. Мельник, аспірант
О. В. Романюк, канд. техн. наук, доцент
Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна
vinncei@gmail.com

# Формування відрізків прямих на гексагональному растрі

*Модифіковано метод оцінювальної функції для інтерполяції відрізків прямих на гексагональному растрі. Отримано формули для розрахунку оцінювальної функції для інтерполяції відрізків прямих. Розглянуто особливості генерації векторів на гексагональному растрі.*

***Ключові слова: оцінювальна функція, піксел, гексагональний растр.***

## Вступ

Дослідники все частіше звертають увагу на переваги застосування гексагонального растру при формуванні та відтворенні зображень [1]. Такі переваги в багатьох випадках дозволяють підвищувати реалістичність формування графічних зображень [2]. Переваги обумовлені здатністю гексагона замощувати площину екрану без розривів і накладань, а, також, геометричними особливостями гексагона, такими як рефлекційна симетрія, шестизв'язність гексагонального растру.

## Аналіз літературних джерел

Відрізки прямих у сукупності графічних примітивів мають найбільшу питому вагу. В зв'язку з цим, при розробці графічних пристроїв алгоритмам лінійної інтерполяції приділяють особливу увагу [3].

При виборі методу лінійного інтерполювання основними критеріями є швидкодія формування крокової траєкторії, похибка інтерполювання, обчислювальна складність, тип формування крокової траєкторії (програмний, апаратний, програмно-апаратний).

Серед способів завдання відрізків прямих в машинній графіці найбільшого поширення набули такі: координатами початкової та кінцевої точки; приростами координат [3].

Залежно від типу формованих крокових переміщень на дискретній прямокутній сітці розрізняють алгоритми з чотирьох та восьми векторною направленістю крокових приростів [3]. Алгоритми з чотирьохвекторною направленістю крокових приростів забезпечують похибку інтерполяції, яка не перевершує кроку дискретизації, а з восьмивекторною направленістю - вдвічі меншу.

Більшість методів лінійної інтерполяції призначені для формування траєкторії в одному з квадрантів прямокутної системи координат. При формуванні траєкторії в будь-якому квадранті використовують спеціальні прийоми переключення знаків змінних.

Лінійна інтерполяція містить два етапи: цикл підготовки і цикл інтерполяції. У циклі підготовки визначають мажоритарність [3] відрізка прямої, а також його орієнтацію по відношенню до координатних осей, що дозволяє встановити, в якому з октантів розміщено заданий відрізок прямої. У циклі інтерполяції за алгоритмічними залежностями знаходять значення крокових приростів, здійснюють їх видачу і аналізують закінчення формування траєкторії [3].

Серед методів формування відрізків прямих найбільшого поширення знайшли метод "прямий" метод, метод цифрового диференційного аналізатора, метод оцінювальної функції.

Згідно "прямого" методу координати точок траєкторії знаходять з рівняння прямої:

$$Y = Y_н + \Delta Y \cdot \frac{X}{\Delta X}$$

При $\Delta X \geq \Delta Y$ у рівняння підставляють поточну координату X і знаходять координату Y, а при $\Delta X<\Delta Y$ – навпаки. Похибка інтерполяції при реалізації методу визначається обраним методом округлення.

Необхідність виконання "довгих" операцій , що визначає швидкодію формування векторів, суттєво обмежує застосування методу.

При використанні методу ЦДА відношення $P=\Delta Y/\Delta X$ знаходять в циклі підготовки, а операцію множення на X заміняють накопичуючим додаванням [3].

На практиці, в переважній більшості випадків, для лінійної інтерполяції використовують метод оцінювальної функції [4]. Це пов'язано з високою точністю інтерполяції, простотою програмної та апаратної реалізації і відносно високою швидкістю, обумовленою часом виконання мікрооперації підсумовування.

Загальним прийомом для всіх інтерполяторів, що працюють за методом оцінювальної функції, є аналіз знаків оцінювальної функції, на основі якого роблять крок за тією чи іншою координатою з подальшим розрахунком її нового значення і корекцією відповідної координати поточної точки [4].

Якщо точка траєкторії знаходиться вище від прямої, то оцінювальна функція $OF$ більша нуля і наступний крок необхідно виконувати по осі X; якщо точка знаходиться нижче від цієї прямої, то $OF$ <0 і наступний крок необхідно виконувати по осі Y. При використанні восьмивекторної направленості крокових приростів в останньому випадку формують діагональний крок.

Згадані методи, які застосовуються для прямокутного растра, можуть бути модифіковані та адаптовані для застосування у гексагональному растрі. Оскільки метод оцінювальної функції отримав найбільше поширення, то доцільно модифікувати цей метод для формування відрізків прямої на гексагональному растрі.

Базовим елементом формування гексагонального растра є правильний рівносторонній шестикутник – гексагон [1]. Досліджено властивості зображень, які показують перевагу гексагональної решітки у порівнянні зі стандартною прямокутною. Багато дослідників вважають використання гексагонального растра кращим для відтворення зображень [1].

Мета дослідження – модифікувати метод оцінювальної функції для інтерполяції відрізків прямих на гексагональному растрі.

## *Метод оцінювальної функції для гексагонального растру*

Розглянемо інтерполяцію відрізка прямої методом оцінювальної функції на гексагональному растрі.

При інтерполяції відрізка прямої, яка задана приростами Δ по осях координат X, Y, загальна формула буде мати такий вигляд:

$$OF_i = \frac{y_i}{x_i} - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_i \Delta x - x_i \Delta y}{x_i \Delta x} \qquad (1)$$

Щоб визначити, по якій з осей OX чи OY робити наступний крок інтерполяції, знаходять знак $OF_i$ (рис. 1).

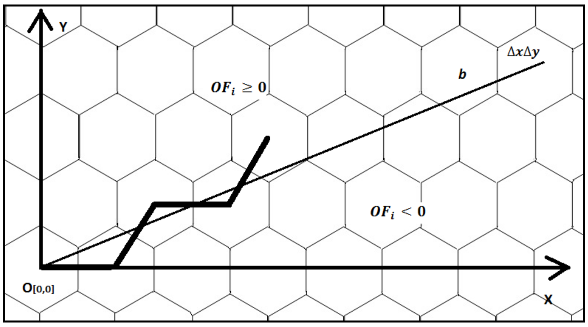


Рисунок 1 – Покрокове формування відрізка прямої

Якщо точка траєкторії знаходиться вище відрізка прямої ***b***, то оцінювальна функція $OF_i \geq 0$, і наступний крок треба робити по осі OX. Якщо точка траєкторії при інтерполяції знаходиться нижче прямої ***b***, то $OF_i \leq 0$ і наступний крок треба робити по обох осях, тобто виконується діагональний крок.

Оскільки в формулі (1) знаменник дробу $x_i \Delta x$ не впливає на знак оцінювальної функції, то

$$OF_i = y_i \Delta x - x_i \Delta y \qquad (2)$$

Знайдемо нове значення оцінювальної функції при виконанні кроку по осі OX. При формування крокової траєкторії значення координат по OY не зміниться, а значення координат по OX зросте на 1, тобто, $x_{i+1} = x_i + 1$.

$$\begin{aligned} OF_{i+1} &= y_i \Delta x - \Delta y (x_i + 1) = \\ &= y_i \Delta x - x_i \Delta y - \Delta y = OF_i - \Delta y \end{aligned} \qquad (3)$$

Аналогічно вирахуємо нове значення оцінювальної функції при виконанні кроку по обох осях OX і OY. Значення координат по осі OX збільшиться на $\frac{1}{2}$, а по осі OY на $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ (рис. 2).

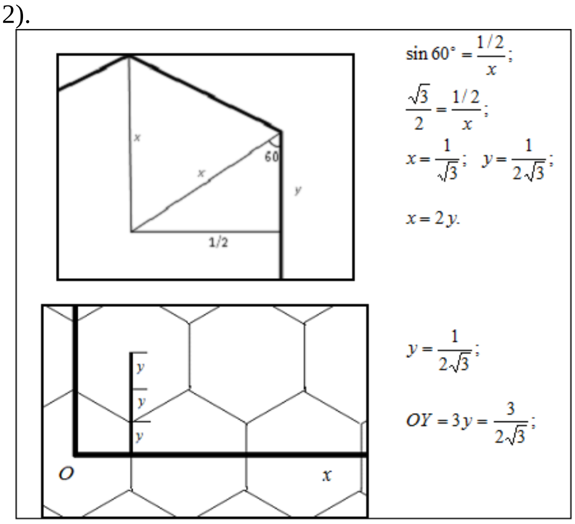


Рисунок 2 – Розрахунок значення координати по осі OY

Як показано на рисунку 4, значення координат крокової траєкторії по осі OY розраховується виходячи з того, що на гексагональному растрі відстань між центрами сусідніх пікселів рівна одиниці. Таким чином, при виконання діагонального кроку координату по OX збільшують на 1/2, а координату по OY на $\frac{3}{2\sqrt{3}}$.

З урахуванням останнього, нове значення оцінювальної функції знаходять за формулою:

$$OF_{i+1} = (y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}})\Delta x - (x_i + \frac{1}{2})\Delta y = \\ = \Delta x y_i + \Delta y x_i - \frac{\Delta y}{2} = OF_i + \frac{3\Delta x}{2\sqrt{3}} - \frac{\Delta y}{2} \quad (4)$$

Знайдені формули та розрахунки справедливі для інтерполяції відрізків прямих з кутами нахилу від 0° до 60° по відношенню до осі OX.

При формуванні відрізків прямих з кутами нахилу від 60° до 90° елементарні кроки інтерполяції по осі OX не виконуються. В цьому випадку кожен крок виконується по обох осях, тобто діагонально. Доведемо це твердження.

Розглянемо одиничний крок інтерполяції відрізка прямої з кутом нахилу до осі OX більшим 60° (рис.3).

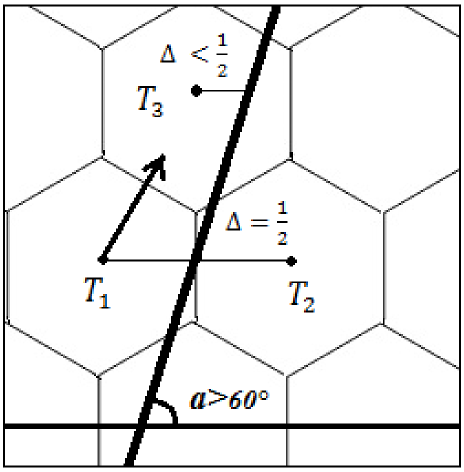


Рисунок 3 – Визначення діагонального кроку

Для піксела з центром в точці $T_1$, найближчими сусідами є два піксела: піксел з центром в точці $T_2$, та піксел з центром у точці $T_3$. Максимальне відхилення інтерполяції Δ від відрізка прямої, у випадку вибору сусіднього піксела $T_2$ буде більшим, ніж максимальне відхилення у випадку вибору сусіднього піксела $T_3$. З точки зору кращого наближення до відрізка прямої, оптимальним при інтерполяції буде вибір діагонального кроку.

Отже, для діапазону кутів нахилу від 60° до 90° кроки інтерполяції будуть лише діагональні. Виведемо формули для оцінювальної функції при формуванні відрізка прямої для кутів від 60° до 90° (рис. 4).

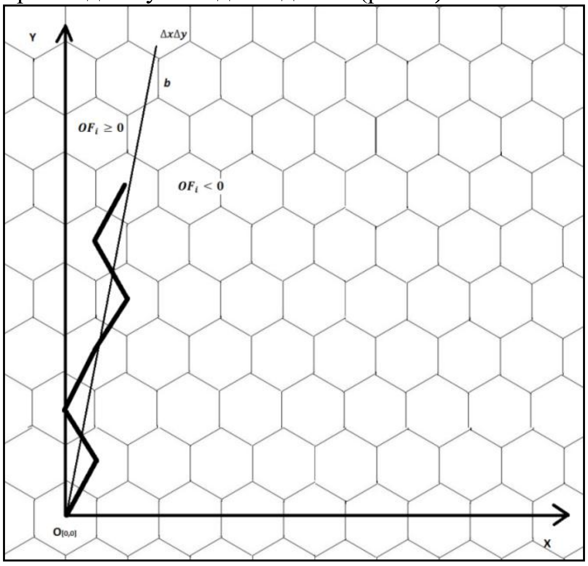


Рисунок 4 – Покрокове формування відрізка прямої для кутів нахилу відрізків прямих з діапазону 60°÷90°

Для $OF_i \geq 0$, при виконанні діагонального кроку координата по OX буде змінюватись за формулою $x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2}$, а по OY – $y_{i+1} = y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}}$.

Знайдемо значення оцінювальної функції

$$OF_{i+1} = \Delta x(y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}}) - \Delta y(x_i + \frac{1}{2}) = \\ = \Delta x y_i + \frac{3\Delta x}{2\sqrt{3}} - \Delta y x_i - \frac{\Delta y}{2} = OF_i + \frac{3\Delta x}{2\sqrt{3}} - \frac{\Delta y}{2} \quad (5)$$

Для $OF_i < 0$ $x_{i+1} = x_i - \frac{1}{2}$, $y_{i+1} = y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}}$;

$$OF_{i+1} = \Delta x(y_i + \frac{3}{2\sqrt{3}}) - \Delta y(x_i - \frac{1}{2}) = \\ = \Delta x y_i + \frac{3\Delta x}{2\sqrt{3}} - \Delta y x_i + \frac{\Delta y}{2} = OF_i + \frac{3\Delta x}{2\sqrt{3}} + \frac{\Delta y}{2} \quad (6)$$

Представимо операнд $\frac{3\Delta x}{2\sqrt{3}}$ у вигляді суми доданків, знаменники яких є степені двійки:

$$\frac{3\Delta x}{2\sqrt{3}} \approx (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512})\Delta x.$$

Це дасть можливість використати для обчислення операнду мікрооперації додавання та зсуву в сторону молодших розрядів. Значення відносної похибки обчислень в цьому випадку не буде перевищувати $\delta$=0,09142% .

На рис. 5 зображено структурну схему пристрою для визначення операнда $\frac{3\Delta x}{2\sqrt{3}}$.

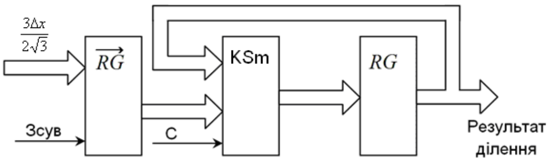


Рисунок 5 – Структурна схема пристрою визначення операнда.

У регістр $\vec{RG}$ заноситься операнд $\frac{3\Delta x}{2\sqrt{3}}$. Регістр $RG$ перед початком обчислень обнуляється. У регістрі $\vec{RG}$ виконується зсув операнду у сторону молодших розрядів. При необхідності отримане значення додається до поточної суми, яка формується нагромаджу вальним суматором.

## Висновок

У роботі модифіковано метод оцінювальної функції для інтерполяції відрізків прямих на гексагональному растрі. Запропоновано формули для обчислення оцінювальної функції при інтерполяції відрізків прямих на гексагональному растрі. Розглянуто особливості генерації векторів на гексагональному растрі.

## Список використаної літератури

1. Carstens B. Hexagonal domain transform for shape analysis / B. Carsten, M. Quinn // Intelligent Robots and Computer Vision X: Algoritms and Techniques, SPIE. – 1991. – P. 197-205.
2. Романюк О. Н. Особливості гексагональної моделі піксела / О. В. Мельник, О. Н. Романюк // Міжнародний науково-технічний журнал «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах», Хмельницький, ХНУ, 2014р. №1 (46) – 214 с. С. 91-95.
3. Пєтух А.М. Інтерполяція в задачах контурного формоутворення [Монографія] / Пєтух А.М., Обідник Д.Т., Романюк О.Н. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007. – 103 с.
4. Романюк О.Н, Використання методу оцінювальної функції для задач антиаліайзингу /М. С. Курінний, О. Н. Романюк // Сборник научных трудов НГУ. – №19. – Том 2. – Дніпропетровськ: НГУ. – 2004. – С. 200-208.

*Надійшла до редакції 10.11.2016*

**А.Н. РОМАНЮК, А.В. МЕЛЬНИК, О. В. РОМАНЮК**
Винницкий национальный технический университет

**МЕТОД ОЦЕНОЧНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ОТРЕЗКОВ ПРЯМЫХ НА ГЕКСАГОНАЛЬНОМ РАСТРЕ**

В данной работе предлагается модифицированный метод оценочной функции для интерполяции отрезков прямых на гексагональном растре. Получены формулы оценочной функции для интерполяции отрезков прямых. Рассмотрены особенности генерации векторов на гексагональном растре.
***Ключевые слова: оценочная функция, пиксель, гексагональный растр.***

**O.N. ROMANYUK, O. V. MELNYK, O. V. ROMANYUK**
Vinnytsia National Technical University

**ESTIMATION FUNCTION METHOD FOR INTERPOLATION OF LINE SEGMENTS IN A HEXAGONAL GRID**

This paper describes a method of estimate functions to interpolate line segments on a hexagonal grid. The formulas of estimation functions are calculated to interpolate segments. The features of vector generation on a hexagonal grid are described.

***Keywords: hexagonal raster, pixel, estimate functions.***